UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

LIBRO DE EJERCICIOS PARA EL CURSO PROPEDÉUTICO

(ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA)

LIBRO DE EJERCICIOS PARA EL CURSO DE INDUCCIÓN

Nombre del Estudiante:

Grupo:

Turno:

Mexicali, Baja California

Junio de 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

LIBRO DE EJERCICIOS PARA EL CURSO PROPEDÉUTICO

(ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA)

LIBRO DE EJERCICIOS PARA EL CURSO DE INDUCCIÓN

Nombre del Estudiante:

Grupo:

Turno:

Mexicali, Baja California

Junio de 2013

ELABORADO POR:

DR. MAXIMILIANO DE LAS FUENTES LARA
ING. OLGA GONZALES ZAVALA
M.C. CARLOS ENRIQUE VALDEZ GONZÁLEZ

ACTUALIZADO POR:

M.C. ERNESTO VICTOR GONZÁLEZ SOLIS
M.C. RIGOBERTO HERRERA GARCÍA
M.C. LEGLEW CRUZ MARÍA INÉS
M.C. JOSE LUIS ARCE VALDEZ

Índice de Contenido

1. Sistema de los números reales **1**

1.1. Definición y notación de conjuntos 1

1.1.1. Tipo de Conjuntos 2

1.1.2. Relaciones entre Conjuntos 3

1.1.3. Operaciones con conjuntos 4

1.2. Los números reales y la recta real 7

1.2.1. Los números reales 7

2. Propiedades del sistema de los números reales **11**

2.1. Propiedades para la Adición y Multiplicación 11

2.2. Propiedades para la Sustracción 13

2.3. Propiedades para las Fracciones 13

2.4. Propiedades para la eliminación de los símbolos de agrupación (llaves, paréntesis y corchetes) 15

3. Expresiones exponenciales **20**

3.1. Leyes de los exponentes 20

3.1.1. Teorema sobre exponente negativo y cero 23

3.2. Radicales 26

3.2.1. Leyes de los radicales 27

3.2.2. Operaciones con radicales 27

3.2.3. Racionalización 32

3.3. Exponentes racionales 33

4. Polinomios y productos notables **38**

4.1. Expresión de un polinomio de una variable 38

4.2. Polinomios de más de una variable 39
4.3. Monomios, Binomios y Trinomios 39
4.4. Términos semejantes 40
4.5. Operaciones con polinomios 41
4.5.1. Suma 41
4.5.2. Resta 41
4.5.3. Multiplicación 42
4.5.4. División 43
4.5.5. Productos notables. 45

5. Factorización **50**
5.1. Tipos de Factorización 50
5.1.1. Factorización por factor común. 50
5.1.2. Factorización de Diferencias de Cuadrados. 51
5.1.3. Factorización de sumas y diferencias de cubos. 53
5.1.4. Factorización de binomios de la forma $x^n \pm y^n$. 54
5.1.5. Factorización de trinomios cuadrados de la forma $ax^2 + bx + c$ 54

6. Expresiones racionales **60**
6.1. Simplificación de expresiones racionales 60
6.2. Mínimo Común Múltiplo (m.c.m) 62
6.3. Operaciones con expresiones racionales 63
6.3.1. Suma 63
6.3.2. Resta 63
6.3.3. Multiplicación 64
6.3.4. División 65

Apéndices

A. Examen Diagnóstico de Aritmética **69**

Prólogo

La matemática ha sido parte de la humanidad desde tiempos remotos, pues es una herramienta indispensable para entender múltiples fenómenos que son parte de nuestra naturaleza. Lamentablemente en la actualidad existe una apatía hacia esta ciencia por parte de los estudiantes, lo que a su vez, refleja la falta de conocimiento de su aplicación en la resolución de problemas además de su contribución en la formación de valores trascendentes de la personalidad; porque efectivamente, la matemática no solo sirve para resolver problemas de los libros de texto, sino tambien para desarrollar una forma de pensamiento que permita enfrentar los problemas que se suscitan en cualquier contexto en la vida diaria. Así pués, el empleo de la matemática permite adquiror valores que determinan sus actitudes y su conducta que sirven como patrones para guiar su vida, además de un estilo lógico y coherente de enfrentar la realidad; además de una búsqueda de exactitud en los resultados; comprensión y expresión clara a través de la utilización de símbolos; poder de abstracción, razonamiento y generalización; representación gráfica de fenómenos de la vida real; y la creatividad.

Cada vez surgen nuevas teorías y métodos en diversas ramas para la resolución de problemas, de la mano evoluciona tambien el surgimiento de nuevas tecnologías, y no se concibe el entendimiento y el desarrollo de éstas sin el empleo de la matemática, especialmente si se habla de las áreas de la Ingeniería, donde los estudiantes conviven con la matemática todos los dias. Por ello es importante dejar de lado, la idea de apatía respecto de esta ciencia.

Bajo este concepto, la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónomad e Baja California se ocupa de la generación y actualización del material didactico que coadyuve al estudio de esta ciencia. De este modo se presenta esta nueva edición de este manual de Álgebra, Geometría y Trigonometría, el cual esta estructurado por unidades con sus respectivos subtemas, donde los ejercicios de cada subtema se ha estructurado en tres partes; los ejercicios de ejemplo, los cuales se aconseja se elaboren en clase bajo la guía del profesor, los ejercicios de taller, los cuales se recomienda sean elaborados en clase en grupos de estudio bajo la supervisión e intervención mínima del profesor, y finalmente los ejercicios de tarea, diseñados para que el alumno realice un repaso extraclase de los tópicos tratados en clase.

Además, se han desarrollado algunos videotutoriales que van de la mano con este manual, los cuales se recomienda sean consultados como una herramienta más de este libro, ya que en ellos los ejemplos y los ejercicios taller son explicados nuevamente para reforzar lo visto en clase o con la finalidad de utilizarlos como apoyo para resolver los ejercicios de tarea. El canal donde puedes consultar los videos se llama "**Curso propedéutico UABC**", en la plataforma de YouTube. La Universidad cuenta con diferente infraestructura, donde se tiene acceso a máquinas de computo e internet inhalámbrico, para poder hacer consulta de este material.

Es de hacer notar que los tópicos que aquí se presentan, son de elemental importancia

al momento de cursar diferentes unidades de aprendizaje de los primeros semestres, de ahí la importancia de hacer este repaso, antes de iniciar las clases formales en la Facultad de Ingeniería.

Este material ha sido elaborado, por académicos de la Facultad de Ingeniería, con la unica intención de lograr el éxito de los estudiantes en el área matemática, de ahí la exhortación a que empleen este material en beneficio propio.

Capítulo 1

Sistema de los números reales

En este capítulo abordaremos de manera breve las notaciones que se utilizan en el estudio y tratamiento de los conjuntos, ya que estos juegan un papel importante en el análisis de problemas matemáticos, puesto que proporcionan las bases para comprender algunos de los aspectos de la teoría de la probabilidad, además se tratará con especial atención el conjunto de los números reales.

1.1. Definición y notación de conjuntos

En matemáticas podemos definir a un conjunto, como una colección o listado de objetos con características bien definidas que los hacen pertenecer a un grupo determinado.

A los conjuntos se les representa con letras mayúsculas A, B, C, y a los elementos con letras minúsculas a, b, c, entendiendo por elementos de un conjunto a todos aquellos objetos que forman a dicho conjunto.

Existen dos formas para denotar un conjunto: la primera es por *extensión*, cuando se listan todos y cada uno de los elementos entre llaves { }. Esto se hace comunmente cuando son pocos los elementos del conjunto, como se muestra en el Ejemplo 1.1. Y la segunda forma es por compresión, cuando sus elementos se caracterizan mediante una propiedad, característica común o regla, como se muestra en el Ejemplo 1.2 y Ejemplo 1.3, generalmente esta segunda notación se utiliza cuando los elementos del conjunto son demasiados.

Ejemplo 1.1 *Definamos el conjunto B, cuyos elementos son los números pares entre* 1 y 11.
En este caso el conjunto se puede denotar en forma extendida de la siguiente manera:

$$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}. \tag{1.1}$$

Para describir si un elemento pertenece a un conjunto se utiliza el símbolo de pertenencia $\in$, en caso contrario se emplea el símbolo $\notin$. Por ejemplo, se puede establecer:

$2 \in B$, significa: "2 pertenece al conjunto B",

$7 \notin B$, significa: "7 no pertenece al conjunto B".

Ejemplo 1.2 *Definamos al conjunto A, cuyos elementos son los colores primarios.*

En este caso se puede establecer el conjunto en forma compacta, debido a que los elementos poseen una propiedad o característica común. Se puede denotar de la siguiente manera:.

$$A = \{x \mid x \text{ es un color primario}\},$$

y se lee: "A es el cojunto de los elementos x, tales que x es un color primario. O también se puede denotar en forma extendida. Se buscan aquellos elementos que cumplan con la regla: "x es un color primario", por lo que le representación en forma extendida del conjunto A es $A = \{rojo,\ azul,\ amarillo\}$.

Ejemplo 1.3 *Definamos el conjunto C, elementos son todos los números pares positivos.*

En este caso, se complica representar el conjunto C en forma extendida, pues se habla ahora de un conjunto de elementos infinitos. En este caso impera la necesidad de representar el cojunto a través de una regla. Por ejemplo se puede denotar de esta forma:

$$C = \{x \mid x = 2n \ \ ; \ \ n = 1, 2, 3, ..., \infty.\},$$

y se lee: "C es el cojunto de los elementos x, tales que $x = 2n$, donde n toma valores enteros desde 1 a ∞."

Ejercicios de Taller

1. Liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) El conjunto $A = \{x \mid x\ es\ un\ municipio\ de\ Baja\ California\}$

b) El conjunto $B = \{x \mid x\ es\ un\ número\ entero\ entre\ 1\ y\ 5\}$

c) El conjunto $C = \{x \mid x\ es\ un\ número\ impar\ positivo\ menor\ a\ 9\}$

d) El conjunto $D = \{x \mid x = (n-3)^2; n = 1, 2, 3, 4, 5\}$

2. Sea el conjunto E definido como: $E = \{1, 5, 6, 7, 8\}$.

Determine si las siguientes proposiciones son correctas:

a) $2 \in E$

b) $20 \in E$

c) $5 \notin E$

3. Defina una notación compacta de los conjuntos para los elementos que contiene. Puede auxiliarse de los ejemplos 1.2 y 1.3.

a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

b) $B = \{6, 12, 18, 24\}$

c) $C = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right\}$

d) $D = \{América,\ Europa,\ África,\ Antártida,\ Asia,\ Oceanía\}$

1.1.1. Tipo de Conjuntos

Conjunto Vacío o Nulo: Es aquel que no tiene elementos y se denota por $\{\}$ ó por ϕ. Por ejemplo, $B = \{\}$ y $B{=}\phi$, significan que el conjunto B no tiene elementos.

Nota: *Es común atribuir las notaciones* $B=\{0\}$ *ó* $B = 0$*, a un conjunto vacío, lo cual es incorrecto. El caso* $B = \{0\}$ *establece que el conjunto* B *consta de un sólo elemento, siendo el número* 0 *(cero). En el caso* $B = 0$*, no se puede afirmar que hablamos de un conjunto, ya que se debe recordar que un conjunto se denota con llaves, en este caso solo denota que* $B = 0$*.*

Conjunto Universal: Es el conjunto de todos los elementos del contexto al que se hacer referencia, se denota con U.

Ejemplo 1.4 *Sea el conjunto universal* $U = \{Animales\ vertebrados\}$*, defina cuatro conjuntos cuyos elementos formen parte de este universo.*

Cuatro conjuntos de animales vertebrados son por ejemplo: $A = \{Aves\}$, $B = \{Peces\}$, $C = \{Conejos\}$ y $D = \{Monos\}$.

Si se define un conjunto que no cumpla esta condición como $E = \{Gusanos\}$, ya que los gusanos no tienen vertebras. Entonces se pude decir que A, B, C, $D \in U$,mientras que $E \notin U$.

Ejercicios de Taller

1. Sean los conjuntos A *y* B *definidos como:* $A = \{Mercurio, Venus, Marte, Urano,\}$ *y* $B = \{Tierra, Jupiter, Plutón\}$*. Determine lo siguiente:*

a) ¿Cuál es el conjunto Universal en este contexto?

b) Defina un conjunto con los elementos restantes del Universo propuesto.

2. Sea el conjunto $U = \{Números\ enteros\ positivos\}$*. Responda:*

a) *¿Cuántos elementos contiene el conjunto?*

b) *Si se tienen los conjuntos finitos* $A = \{1, 5, 6, 7\}$ y $B = \left\{\frac{1}{2}, 0{,}45, \pi\right\}$*. ¿Qué conjunto tiene elementos que están contenidos en el conjunto universal planteado?*

3.- Liste los elementos del conjunto $C = \{x \mid x$ *es un número par mayor a* 4 *y menor a* $6\ \}$

1.1.2. Relaciones entre Conjuntos

Igualdad de Conjuntos: Se tienen dos conjuntos A y B, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3, 1, 4\}$, si ambos tienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento que pertenece a A también pertenece a B, y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A. Se dice que ambos conjuntos son iguales y se denota de la forma:

$$A = B.$$

Nota: *No importa el orden de los elementos mientras ambos conjuntos tengan los mismos elementos. Además, en teoría de conjuntos no es necesario repetir los elementos, por ejemplo, el conjunto* $\{b, b, b, d, d\}$*, se escribe* $\{b, d\}$*.*

Subconjunto: Se tiene dos conjuntos A y B, donde $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se representa

$A \subset B$, donde se lee: "*el conjunto A es un subconjunto del conjunto B*".

Nota: *De acuerdo con esta definición se puede decir que:*

• *Un conjunto es subconjunto de sí mismo*

• *El conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto, ya que no podemos encontrar elementos en el conjunto vacío que no estén en A.*

Ejemplo 1.5 *Dados los siguientes conjuntos:*

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 7,\ 3,\ 3\}$, $B = \{1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 3,\ 7\}$, $C = \{1, 2, 5\}$, $D = \{\phi\}$.

Determine si las proposiciones planteadas son correctas:

a) $A = B$

b) $C = A$

c) $C \subset A$

d) $C \subset C$

e) $D \subset C$

f) $B \subset C$

a) Correcta, b) Falsa, c) Correcta, d) Correcta, e) Correcta, f) Falsa.

Ejercicios de Taller

1. Dados los siguientes conjuntos determine, ¿cuáles son iguales?.

a) $A = \{1,\ 3\}$.

b) $B = \{x \mid x$ *es un número de un dado*$\}$.

c) $C = \{x \mid -2x + 6 = 0\}$.

d) $D = \{x \mid x$ *es el número de caras que se obtiene al lanzar* 6 *monedas*$\}$.

e) $E = \{x \mid x$ *es un número impar mayor a* 0 *y menor a* 4 $\}$.

2.-*Dados los siguientes conjuntos :*

$A = \{0\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{3, 5\}$, $D = \{\phi\}$.

Determine si las proposiciones planteadas son correctas:

a) $A = D$

b) $D \subset A$

c) $A \subset B$

d) $C \subset B$

1.1.3. Operaciones con conjuntos

Las operaciones de conjuntos se pueden representar gráficamente en un plano mediante Diagramas de Venn. En dichos diagramas el conjunto universal U se representa por un rectángulo, cualquier otro

conjunto se representa con un círculo. Una operación se representa mediante el sombreado de los elementos del conjunto, ver Figura 1.1.

Unión de Conjuntos: La unión de dos conjuntos cualesquiera A y B, expresada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B. En forma simbólica:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

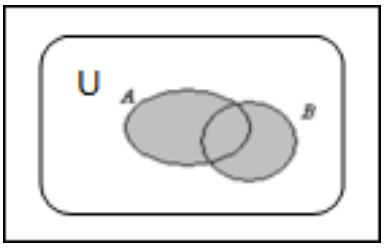


Figura 1.1. Diagrama de Venn de la unión de dos conjuntos.

Ejemplo 1.6 *Se tiene los siguientes conjuntos:* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ y $C = \{5, 9, 1\}$, *entonces:*

Realice las siguientes operaciones:

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $\{x \mid x \in B \text{ ó } x \in C\}$

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 9\}$, c) $B \cup C = \{1, 4, 5, 6, 9\}$.

Intersección de Conjuntos: La intersección de dos conjuntos cualesquiera A y B, expresada por $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B simultáneamente. En forma simbólica:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

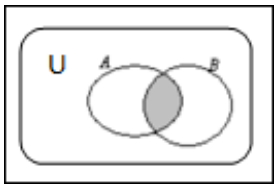


Figura 1.2. Diagrama de Venn de la intersección de dos conjuntos.

Ejemplo 1.7 *Dados los conjuntos:* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 2, 4, 9\}$ *y* $C = \{9\}$, *entonces: Realice las siguientes operaciones:*

a) $A \cap B$.

b) $B \cap C$.

c) $\{x \mid x \in A \text{ y } x \in C\}$.

a) $A \cap B = \{2, 4\}$, b) $B \cap C = \{9\}$, c) $A \cap C = \{\phi\}$ $(Conjunto\ vacío)$.

Ejercicios de Taller

1. Dados los siguientes conjuntos: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{0, 2, 6, 8, 10\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 11\}$. *Determine:*

a) $A \cup B$.

b) $A \cap B$.

c) $A \cup C$.

d) $B \cap C$.

Ejercicios de Tarea

1. Liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de números enteros que se encuentran entre 2 y 30, y que son divisibles por 7.

b) El conjunto $A = \{x \mid 2x - 1 = 5\}$.

c) El conjunto $B = \left\{x \mid x^2 + 4x - 5 = 0\right\}$.

d) El conjunto $C = \left\{x \mid x = (2n - 1)^2; n = 1, 2, 3, 4\right\}$.

2. *Sean los conjuntos A y B definidos como:* $A = \{1, 5, 6, 7, 8\}$ *y* $B = \{1, 1, 6, 7, 10, 20\}$. *Determine lo siguiente:*

a) ¿Cuáles son los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B?

b) Establezca si la proposición $10 \notin B$ es correcta.

c) $A \cup B$

3. Utilice la notación de los conjuntos para expresar el conjunto dado.

a) El conjunto de los números reales cuyo cuadrado es 25.

b) El conjunto de los enteros positivos pares menores a 15.

4. Sean los conjuntos A y B definidos como: $A = \{Domingo,\ Lunes\}$ *y* $B = \{Martes,\ Jueves,\ Viernes\}$. *Determine lo siguiente:*

a) ¿Cuál es el conjunto Universal en este contexto?.

b) ¿Cuál es la intersección de los conjuntos A y B?.

c) ¿Cuál es la unión de los conjuntos A y B?.

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-5, 5\}$, $C = \left\{x \mid x^2 - 25 = 0\right\}$.

$D = \{x \mid x$ es un número entero mayor a -4 y menor a 4 $\}$, $E = \{x \mid x = \sqrt{n}; n = 9, 4, 1, 0\}$.

6. Dados los siguientes conjuntos: $A = \{a, b, c, d, e, f, f, g, m\}$, $B = \{y, f, m\}$ *y* $C = \{h, i, j, k, l, m\}$. D*etermine:*

a) $A \cap B$.

b) $A \cap C$.
c) $A \cup C$.
d) $A \cup B \cap C$.
e) $A \cap B \cap C$.

7. Use la notación de la regla de conjuntos, para definir el conjunto de todos los números impares.

1.2. Los números reales y la recta real

1.2.1. Los números reales

La Tabla 1 y la Figura 1.3 descomponen el sistema de los números reales en subconjuntos importantes y muestran como estos subconjuntos están relacionados entre sí.

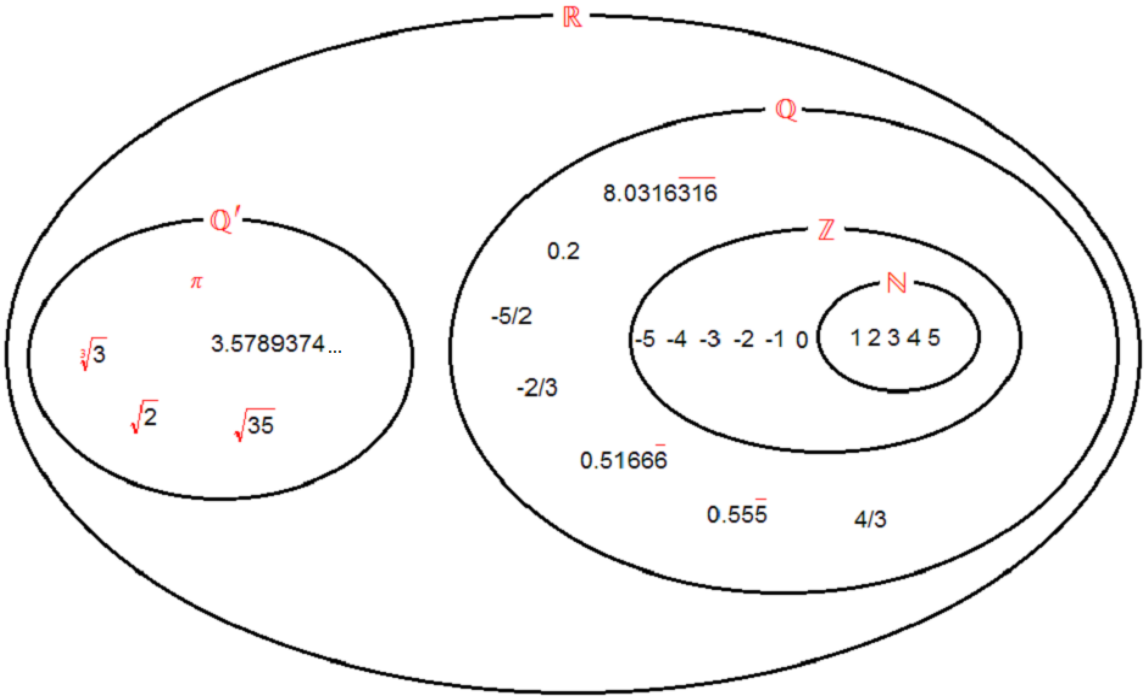


Figura 1.3. El conjunto de los números reales y sus subconjuntos más importantes.

Ejemplo 1.8 *De acuerdo con la Figura 1.3, los números racionales ($\mathbb{Q}$) e irracionales ($\mathbb{Q}'$) son subconjuntos de los números reales ($\mathbb{R}$), es decir que los números reales están conformados tanto por los números racionales como por los irracionales. Siguiendo esta forma de representación se puede notar que los números racionales están compuestos por los números enteros ($\mathbb{Z}$) y éstos a su vez por los números naturales ($\mathbb{N}$). A partir de esto podemos concluir que:*

Símbolo	Conjunto de Números	Descripción	Ejemplos
$\mathbb{N}$	Naturales	Es el conjunto de números que sirven para contar cosas (también se llaman enteros positivos).	1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$	Enteros	Es el conjunto de los números naturales, los enteros negativos y cero.	..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Q}$	Racionales	Es el conjunto de números que puden representarse como el cociente de dos enteros $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$. Los números racionales pueden ser decimales finitos, o bien, decimales infinitos periódicos.	$\frac{3}{5}$, 0, 7, 3,25, 1,33$\overline{3}$, 8,0316$\overline{316}$
$\mathbb{Q}'$	Irracionales	Es el conjunto de números que no pueden expresarse como el cociente de dos enteros y se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales que no siguen un periódo definido. Por lo tanto, los números irracionales son decimales infinitos no periódicos.	π, e, 4,156821...
$\mathbb{R}$	Reales	El conjunto de todos los números racionales e irracionales	$\frac{-3}{5}$, 0, π, -4

Tabla 1.1. Subconjuntos de los números reales.

a) Es verdadero, decir que, "Todo número entero es un número racional y real".

b) Es verdadero, decir que, "Todo número decimal infinito no periódico es irracional y real".

Los números racionales son expresados por decimales periódicos (se repiten) ó por decimales finitos (terminan), mientras que los números irracionales son expresados por decimales infinitos no periódicos (no terminan y no se repiten).

Ejemplo 1.9 *De acuerdo con la Tabla 1.1, determine si los siguientes números son racionales o irracionales. Dé sus argumentos.*

a) -2.6 Es un número racional, ya que es un decimal finito que puede ser representado como el cociente de dos números enteros, $\frac{-13}{5}$. Donde el denominador tiene que ser diferente de cero.

b) $\frac{-7}{11}$ Es un número racional, ya que está representado como el cociente de dos números enteros $\frac{-7}{11} = 0{,}63\overline{63}$, cuyo decimal es infinito y periódico.

c) $\frac{5}{4}$ Es un número racional, ya que está representado como el cociente de dos números enteros $\frac{5}{4} = 1{,}25$, cuyo decimal es finito.

d) 4.5 Es un número racional, ya que es un decimal finito, que puede ser representado como el cociente de dos números enteros $\frac{9}{2}$.

e) $\sqrt{2}$ Es un número irracional, ya que $\sqrt{2} = 1{,}414213562373095..$,cuyo decimal es infinito no periódico.

f) e Es un número irracional, ya que el valor de e es decimal infinito no periódico.

g) π Es un número irracional, ya que el valor de π es decimal infinito no periódico.

La Recta Numérica

Para representar el conjunto de los números reales usamos un sistema de coordenadas denominado recta numérica, ver Figura 1.4.

Ejercicios de Tarea

1. Clasifique los números (decimal finito, decimal repetitivo infinito, decimal no repetitivo infinito) que se presentan a continuación. También clasifique el número como racional o irracional.

a) -5

b) $\sqrt{16}$

c) $\frac{7}{5}$

d) 4π

e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $\frac{-3}{\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{-11}{12}$

h) $\sqrt{2}\sqrt{8}$

i) $\sqrt{32}\sqrt{8}$

j) 0

k) $\dfrac{1}{9}$

l) $\dfrac{1}{17}$

2. Conteste falso o verdadero a las siguientes proposiciones:

a) Todo número irracional es un número real.

b) Todo número natural es un número entero.

c) Todo número entero es un número racional.

3. Clasifique los siguientes subconjuntos como reales, enteros, naturales, racionales o irracionales.

a) $\{3,\ 5,\ 10,\ 100\}$

b) $\left\{-2,\ 2,\ \sqrt{2},\ \dfrac{1}{4}\right\}$

c) $\left\{\ln 2,\ -\sqrt{3},\ e,\ 5\pi\right\}$

d) $\{-1,-2,-3,3,2,1\}$

e) $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \}$

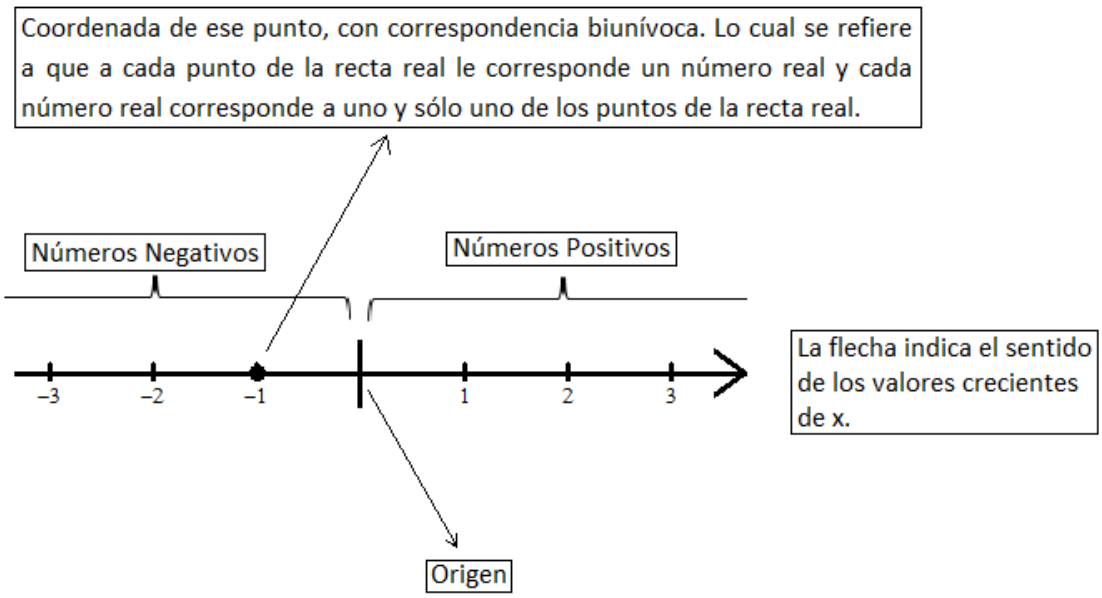


Figura 1.4. Recta Numérica.

Capítulo 2

Propiedades del sistema de los números reales

Se le llama sistema de números reales al conjunto de números reales y a las operaciones de adición $(+)$, sustracción $(-)$, división $(/)$ y multiplicación $(*)$ que se efectúan entre dichos números. Existen leyes y propiedades fundamentales para este sistema que nos permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para encontrar soluciones a problemas matemáticos.

En esta sección se abordarán las propiedades básicas del sistema de los números reales para las operaciones matemáticas.

2.1. Propiedades para la Adición y Multiplicación

Estas propiedades se muestran en la tabla 2.1, donde a, b y c representan números reales.

Propiedades	*Adición*	*Multiplicación*
1. Ley Clausurativa	$a+b$ es un número real	$a \cdot b$ es un número real
2. Ley asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\,(b \cdot c)=(a \cdot b)\,c$
3. Ley Conmutativa	$a+b=b+a$	$a \cdot b=b \cdot a$
4. Propiedad Identidad	El número real 0 es llamado identidad aditiva, ya que para todo número real a: $a+0=a=0+a$	El número real 1 es llamado identidad multiplicativa, ya que para todo número real a: $a \cdot 1=a=1 \cdot a$
5.Propiedad del Inverso Aditivo y del Recíproco	Para todo número real a existe un único número real llamado negativo o inverso aditivo de a representado por $-a$ de tal manera que: $a+(-a)=0=(-a)+a$	Para todo número real diferente de cero existe un único número real llamado recíproco o inverso multiplicativo de "a" representado por $\frac{1}{a}$ de tal forma que: $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)=1=\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a$
6.Propiedad Distributiva	a) $a\,(b+c)=ab+ac$ b) $(a+b)\,c=ac+bc$	
7.Ley cancelativa o Anulativa	a) Si $a+c=b+c$ b) Si $ac=bc$ *y* $c \neq 0$	entonces $a=b$. entonces $a=b$.
8.Ley de la multiplicación por cero	a) Si $a \cdot 0=0=0 \cdot a$ b) Si $a \cdot b=0$	 entonces $a=0$ *ó* $b=0$; o ambas.

Tabla 2.1. Propiedades para la adición y la multiplicación.

2.2. Propiedades para la Sustracción

La tabla 2.2 muestra las propiedades más importantes de la sustracción, relacionadas con los números negativos y fracciones.

2.3. Propiedades para las Fracciones

En la tabla 2.3 se listan las propiedades para las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$,donde los denominadores son diferentes de 0, ($b \neq 0$ y $d \neq 0$).

Propiedades de la sustracción-	*Ejemplo*
$a)\ -(-a) = a$	$-(-2) = 2$
$b)\ -(ab) = -ab = a(-b)$	$-(2 \cdot 4) = -24 = 2(-4)$
$c)\ -a = (-1)(a)$	$-5 = (-1)(5)$
$d)\ (-a)(-b) = ab$	$(-2)(-3) = (2 \cdot 3)$

Tabla 2.2. Propiedades para la sustracción.

Propiedades para las fracciones	*Ejemplo*
1. Fracciones Equivalentes	
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$ Comprobamos que: $2 \cdot 21 = 42 = 3 \cdot 4$
2. Regla de Signos	
$-\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{-a}{b}\right) = \frac{a}{-b}$	$-\left(\frac{4}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}\right) = \frac{4}{-2}$
3. Regla Cancelativa	
$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}; si\ c \neq 0$	$\frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4}$ Comprobamos que: $\frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12} = 0{,}5 = \frac{2}{4}$
4. Adición y sustracción con común denominador	
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$	$\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = \frac{-1}{4}$ ó $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$
5. Adición y sustracción con distinto denominador	
$\frac{a}{d} \pm \frac{c}{b} = \frac{ab \pm dc}{db}$	$\frac{2}{4} - \frac{3}{5} = \frac{(5 \cdot 2) - (4 \cdot 3)}{(4 \cdot 5)} = \frac{(10) - (12)}{20} = \frac{-2}{20}$ ó $\frac{2}{4} + \frac{3}{5} = \frac{(5 \cdot 2) + (4 \cdot 3)}{(4 \cdot 5)} = \frac{(10) + (12)}{20} = \frac{22}{20}$
6.Multiplicación	
$\frac{a}{d} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{db}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{(2 \cdot 4)}{(3 \cdot 5)} = \frac{8}{15}$
7.División	
$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}; c \neq 0, b \neq 0$	$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{(2 \cdot 5)}{(3 \cdot 4)} = \frac{10}{12};\ \ c \neq 0, b \neq 0$
8.División de cero y por Cero	
$0 \div b = \frac{0}{b} = 0; b \neq 0$ $0 \div 0$; está indefinido $a \div 0 = \frac{a}{0}$; está indefinido, porque el denominador debe ser diferente de cero	$0 \div 2 = \frac{0}{2} = 0;\ \ 2 \neq 0$ $3 \div 0 = \frac{3}{0}$

Tabla 2.3. Propiedades para las fracciones.

Ejercicios de Taller

1. Realice las siguientes operaciones.

a) $(-x)(-y) =$

b) $-z \cdot \dfrac{0}{5} =$

c) $\dfrac{m}{2-(5-3)} =$

2. Aplique en cada caso la propiedad entre paréntesis.

a) $(3+5)+2 =$ (Propiedad asociativa de la adición)

b) $(6+8)\,y =$ (Propiedad conmutativa de la multiplicación)

c) $(x+3)\,y+2 =$ (Propiedad distributiva)

d) $x\,(2+3) =$ (Propiedad distributiva)

e) $[(1)\,(2)]\,(3) =$ (Propiedad asociativa de la multiplicación)

3. Calcule los resultados de las siguientes operaciones

a) $-(-a)\,(2-3) =$

b) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{7} =$

c) $\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{4} =$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{4} =$

e) $\dfrac{25}{45}-\dfrac{2}{9} =$

f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

2.4. Propiedades para la eliminación de los símbolos de agrupación (llaves, paréntesis y corchetes)

En el proceso de simplificación de expresiones algebraicas se requiere de la eliminación de símbolos de agrupación, empleando las propiedades que se enlistan a continuación:

Propiedad 1. Si el símbolo de agrupamiento está precedido por el signo (+) dicho símbolo puede ser eliminado sin modificar los términos que contiene.

Ejemplo 2.1 *Realice la siguiente operación.*
$(1+2)+(3+4) = 1+2+3+4 = 10$

Ejemplo 2.2 *Realice la siguiente operación.*
$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right)-(\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{8} = \dfrac{12+16-18-12}{24} = \dfrac{-2}{24} = \dfrac{-1}{12}$

Propiedad 2. Si el símbolo de agrupamiento está precedido por el signo (-) dicho símbolo puede ser eliminado cambiando el signo de cada uno de los términos que contiene.

Ejemplo 2.3 *Realice la siguiente operación.*
$(1+2)-(3+4) = 1+2-3-4 = -4$

Ejemplo 2.4 *Realice la siguiente operación.*
$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+(\frac{3}{4}+\frac{4}{8}) = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8} = \frac{12+16+18+12}{24} = \frac{28+30}{24} = \frac{58}{24} = \frac{29}{12}$

Propiedad 3. Cuando en una expresión algebraica se tienen uno o más pares de símbolos de agrupación encerrados en otro par, se eliminan primero los signos de agrupación más internos.

Ejemplo 2.5 *Realice la siguiente operación.*
$1-[(1+2)-(3-4)] =$
Pasos:
$1-[(1+2)-(3-4)] =$ *Se aplica la propiedad 3, por tanto resolvemos primero* $(1+2)-(3-4) = 1+2-3+4 = +4$
$= 1-[+4]$ *Se aplica la propiedad 2*
$= 1-4 = -3$

Ejemplos 2.6 *Realice la siguiente operación.*
$2-\{3a+a-[5+7+(a+2a)]\} =$
Pasos:
$2-\{3a+a-[5+7+(a+2a)]\}$ *Se aplica la propiedad 3.*
$= 2-\{3a+a-[5+7+3a]\}$ *Se aplica la propiedad 2.*
$= 2-\{3a+a-5-7-3a\}$
$= 2-\{a-12\}$ *Se aplica la propiedad 2.*
$= 2-a+12$
$= 14-a$

Propiedad 4. Cuando una expresión algebraica contiene símbolos de agrupación que indican multiplicación, suma y resta al mismo nivel. La jerarquía en el desarrollo de las operaciones prioriza a las multiplicaciones y a las divisiones sobre las sumas y restas. Por consiguiente la primera operación que debe efectuarse en el Ejemplo 2.7 es la multiplicación.

Ejemplo 2.7
$(1+2)-(3\cdot 5) =$
Pasos:
$(1+2)-(3\cdot 5)$ *Se aplica la propiedad 4.*
$= (1+2)-(15)$ *Se aplica la propiedad 2.*
$= 1+2-15$
$= 3-15$

$= -12$

Ejemplo 2.8

$1 + 4 - 4\left[3 + 2\left(5 - 2\right) + (3)(5)\right] =$

Pasos:

De acuerdo a la propiedad 3, resolvemos primero lo siguiente

$1 + 4 - 4\left[3 + 2\left(5 - 2\right) + (3)(5)\right] =$ *Se aplica la propiedad 4.*

$= 5 - 4\left[3 + 2\left(5 - 2\right) + 15\right]$ *Se aplica la propiedad 1 y 2.*

$= 5 - 4\left[3 + 2(3) + 15\right]$ *Resolvemos*

$= 5 - 4\left[3 + 6 + 15\right]$ *Se aplica la propiedad 2.*

$= 5 - 4(24)$

$= 5 - 96 = -91$

Ejercicios de Taller

1. Resuelva las operaciones indicadas

a) $7 + (-2) + (-3) =$

b) $4 - (-1) + (-2) =$

c) $(4r - 3u - 6t) + (3r + 5u + 2t) =$

d) $(2s + 3i - 4m) + (3s - 2i + 3m) + (-4s - 5i) =$

e) $5c + 2\left(4a - 2b\right) - 3\left(2a - 2b - c\right) =$

f) $4s - [2s - (3s - t) + 2] =$

g) $-3\{4 - [2(-3 - 5) - 4(-3 + 5)] - 8\}$

h) $-8 + 16/4 =$

i) $4 \cdot 5 + 6/2 - 8 \cdot 5 =$

j) $4 \cdot (5 + 6)/(2 - 8) \cdot 5 =$

Ejercicios de Tarea

1. Aplique las propiedades a las siguientes expresiones para simplificarlas

a) $-\dfrac{(-x)}{-y} =$

b) $\dfrac{2\left(u + v\right)}{2v} =$

d) $\dfrac{n}{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}} =$

e) $(2x - y + 3z) + (4x - 3y + 2z) =$

f) $(5w + 3t - 8u) + (2w + t - 6u) =$

2. Resuelva las operaciones indicadas

a) $3 + 5 - 2 =$

b) $13 - 14 + 2 - 8 =$

c) $9a - 2a - 3a =$

d) $7p + 8q - p + q =$
e) $1 + 6 * 3 =$
f) $13 - 2 - (1 - 3) =$
g) $12x + 2x - 7x =$
h) $5 - 2/(-1) =$
i) $2 - 3 - 12 + 1 =$
j) $2x - 5x - 8x =$
k) $7 - 2 * 2 - 3 =$
l) $5a + 2b - 7a - b =$
m) $11 * 6/33 * (2 + 1) =$
n) $12y + 3a - 5y - a =$
o) $5s - [2t + (3s - 4t) - s] =$
p) $3x - \{2x + [3x - 2y - 3(5x - 4y) - 2x] - 5y\} =$
q) $4b - (3a - 2c) - 2(2b - 3c) =$
r) $2a - [y - (2a + 3y) - y] =$
s) $2b - [5a - 5(2a - 3b) - a] =$
t) $4x - 2\{3y + [4x - 4(3y - 4x) - 3y] - 4x\} - 3y =$
u) $y + \{3y - 2[5x - y - (3x - 2y) - y] - 2x\} =$

3. Indique en cada una de las expresiones la propiedad que se aplica (x,y,z representan números reales).

a) $(x + y)1 = x + y$
b) $(x + 2) + [-(x + 2)] = 0$
c) $(y + z)\left[\dfrac{1}{(y + z)}\right] = 1$
g) $x(x + 1) = 0$ entonces $x = 0$ ó $x + 1 = 0$

4. Señale la propiedad del sistema de los números reales que justifica las siguientes igualdades:

a) $\left[(-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)\right] z = -2\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)(z)\right]$
b) $(f + g) + 3 = (g + f) + 3$
c) $(1 + 2)(-3) = 1(-3) + 2(-3)$

5. Calcule los resultados de las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{7}{3} - \dfrac{2\sqrt{3}}{5} =$
b) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{9} =$
c) $\dfrac{1}{7} - \dfrac{3}{4} =$
d) $\dfrac{5}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3} =$

e) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{3}{4} =$

f) $\dfrac{4\,(3+c)}{4c} =$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3} =$

h) $\dfrac{2}{7} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} =$

i) $\dfrac{1}{7} + 3 - \dfrac{2}{b} =$

j) $\left[(4)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right](-z) + z =$

k) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{7} - 3 =$

l) $5 - \dfrac{2}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} =$

m) $1 - \dfrac{6}{7} + \dfrac{2c}{3} =$

Capítulo 3

Expresiones exponenciales

Una notación exponencial x^n representa el producto de un número real x multiplicado n veces por si mismo. La expresión x^n se lee "x a la enésima potencia.º simplemente "x a la n". En la expresión n se le denomina **exponente** o **potencia** y a x se le denomina **base**.

Ejemplo 3.1 *Represente en notación exponencial:*
a) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$
b) $\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right)^4 = \mathbf{\frac{1}{625}}$
c) $\left(m^2\right)\left(m^2\right)\left(m^2\right) = (m^2)^3$
d) $(-3) \cdot (3) \cdot (-3) \cdot (3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4(3)^2 = (81)(9) = 729$
e) $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -(2)^4 = -2^4 = -16$
f) $-2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = (-2)^4 = 16$
g) $-3 \cdot -3 \cdot -3 + 2 \cdot 2 - (-5 \cdot -5 \cdot -5 \cdot -5 \cdot -5) = (-3)^3 + 2^2 - (-5)^5 = -27 + 4 - (-3125) = 3102$

Ejemplo 3.2 *Desarrolle las siguientes potencias:*
a) $5(-2)^3 = 5\,(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 5\,(-8) = -40$
b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \mathbf{\frac{16}{81}}$
c) $-(4)^3 = -(4 \cdot 4 \cdot 4) = -64$
d) $-3(-8)^3 = -3(-8)(-8)(-8) = -3(-512) = 1536$
e) $-6^2 + (-2)^3 - (4)^3 = -36 - 8 - 64 = -108$

3.1. Leyes de los exponentes

Se han establecido varias reglas para combinar potencias, llamadas **leyes de los exponentes,** las cuales se resumen en la tabla 3.1. Además son útiles para simplificar expresiones algebraicas.

Ejemplo 3.3 *Utilice las leyes de los exponentes para simplificar los siguientes expresiones:*

Ley	Descripción	Ejemplos
$x^m x^n = x^{m+n}$	El producto de potencias con la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$ $x^5 \cdot x^3 \cdot x^{-2} = x^{5+3-2} = x^6$ $x^{1/2} \cdot x^{3/4} = x^{1/2+3/4} = x^{5/4}$ $\left(4ab^2c\right)\left(-2a^3b^5\right) = -8a^4b^7c$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	El cociente de dos potencias con la misma base es igual a la base elevada a la resta del exponente del numerador menos el exponente del denominador.	$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$ $\frac{y^{-8}}{y^{-3}} = y^{-8-(-3)} = y^{-8+3} = y^{-5}$ $\frac{z^{2/7}}{z^{1/4}} = z^{2/7-1/4} = z^{1/28}$ $\frac{-6xy^2z^4}{4xyz^5} = \frac{-3}{2}x^0y^1z^{-1}$
$(x^m)^n = x^{mn}$	Una base a una potencia elevada a otra potencia es igual a la base elevada al producto de las potencias.	$\left(3^2\right)^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6 = 729$ $\left(x^{-2}\right)^4 = x^{-2\cdot 4} = x^{-8}$ $3\left(z^{-2}\right)^{-4} = 3z^{-2(-4)} = 3z^8$ $\left(x^{1/4}\right)^2 = x^{1/4\cdot 2} = x^{1/2}$
$(xy)^n = x^n y^n$	El producto de dos bases diferentes elevadas a una potencia es igual al producto de cada base elevada a la potencia.	$(4\cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$ $(xyz)^{-3} = x^{-3}y^{-3}z^{-3}$ $\left(2x^2y^3\right)^2 = 2^2\left(x^2\right)^2\left(y^3\right)^2 = 4x^4y^6$ $\left(x^{1/2}y^{2/3}\right)^6 = \left(x^{1/2}\right)^6\left(y^{2/3}\right)^6 = x^3y^4$
$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	Un cociente elevado a una potencia es igual al nuemrador elevado al a potencia entre el denominador elevado a la misma potencia.	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$ $\left(\frac{x}{y^5}\right)^{-2} = \frac{x^{-2}}{(y^5)^{-2}} = \frac{x^{-2}}{y^{-10}}$ $\left(\frac{u^{1/5}}{v^2}\right)^3 = \frac{u^{3/5}}{v^6}$ $\left(\frac{2x^{-3}y}{3z^2}\right)^4 = \frac{\left(2x^{-3}y\right)^4}{\left(3z^2\right)^4} = \frac{16x^{-12}y^4}{81z^8}$

Tabla 3.1. Leyes de los exponentes.

a) $\dfrac{\left(3x^3y^4\right)\left(4xy^5\right)}{\left(-2xy^2\right)^3} = \dfrac{(3)(4)\,x^3xy^4y^5}{(-2)^3\,x^3\,(y^2)^3} = \dfrac{12x^4y^9}{-8x^3y^6} = -\dfrac{3}{2}xy^3$

b) $\dfrac{\left(2a^2b^3c\right)^4}{4b^2c} = \dfrac{2^4\left(a^2\right)^4\left(b^3\right)^4c^4}{4b^2c} = \dfrac{16a^8b^{12}c^4}{4b^2c} = 4a^8b^{10}c^3$

c) $\left(\dfrac{2r^3}{s}\right)^4\left(\dfrac{s^2}{r^3}\right)^3 = \dfrac{\left(2r^3\right)^4}{s4}\cdot\dfrac{\left(s^2\right)^3}{\left(r^3\right)^3} = \dfrac{2^4\left(r^3\right)^4}{s^4}\cdot\dfrac{s^6}{\left(r^3\right)^3} = \left(\dfrac{16r^{12}}{s^4}\right)\left(\dfrac{s^6}{r^9}\right) = \dfrac{16s^6r^{12}}{s^4r^9} = 16s^2r^3$

d) $\left(u^{-2}v^{-3}\right)^{-3} = \left(u^{-2}\right)^{-3}\left(v^{-3}\right)^{-3} = u^6v^9$

e) $\left(-2x^{1/2}y^{1/3}\right)^6\left(3x^{1/2}y\right)^4 = (-2)^6\left(x^{1/2}\right)^6\left(y^{1/3}\right)^6\cdot 3^4\left(x^{1/2}\right)^4y^4 = 64x^3y^2\cdot 81x^2y^4 = 5184x^5y^6$

Ejercicios de Taller

1.-Aplique las leyes de los exponentes para simplificar las expresiones:

a) $x^6\cdot x^{-5}\cdot x^{-7} =$

b) $y^2\cdot y^{2/4}\cdot y^{3/8} =$

c) $(6^4)^7 =$

d) $(9^{-5})^{-2} =$

e) $\left(x^{2/3}\right)^2 =$

f) $(6tre)^4 =$

g) $(zw)^{5/6} =$

h) $\left(\dfrac{8}{3}\right)^6 =$

i) $\left(\dfrac{t}{2}\right)^{-2} =$

j) $\left(\dfrac{8^9}{8^3}\right) =$

k) $\left(\dfrac{7^{-5}}{7^{-3}}\right) =$

l) $\left(\dfrac{z^{7/3}}{z^{7/3}}\right) =$

2.- Simplifique las siguientes expresiones:

a) $(5z^2y^3)(6zy^4) =$

b) $(7x^2y^{-4})(-3x^2y^3)^2 =$

c) $(-3a^4b^2c)^5 =$

d) $\left(\dfrac{3x^4}{y}\right)^4\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^3 =$

e) $\left(z^{-4}w^2\right)^{-5} =$

f) $\dfrac{\left(-6x^2y^{-4}\right)^2\left(-2xy\right)^3}{4\left(xy^2\right)^2} =$

g) $\dfrac{\left(2x^{1/4}y^{1/3}\right)\left(3x^2y3\right)^2}{\left(-2x^{1/2}y\right)^4} =$

3.1.1. Teorema sobre exponente negativo y cero

Estos teoremas se resumen en la tabla 3.2.

Teorema	*Descripción*	*Ejemplos*
$x^0 = 1$	Todo cantidad elevada a la potencia cero es igual a uno.	$2^0 = 1$ $-5000^0 = 1$
$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$	Toda expresión exponencial con exponente negativo en el numerador puede representarse con exponente positivo en el denominador, o viceversa.	$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ $\dfrac{1}{(-4)^{-2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{(-4)^2}} = (-4)^2 = 16$ $(xyz)^{-4} = \dfrac{1}{(xyz)^4}$ $\dfrac{a^{-2}}{b^{-2}} = \dfrac{b^2}{a^2}$

Tabla 3.2. Teoremas de exponente negativo y cero.

Ejemplo 3.4 *Simplifique evitando exponentes negativos en la expresión final.*

a) $\left(-2x^3y^{-2}\right)^3 = (-2)^3\left(x^3\right)^3\left(y^{-2}\right)^3 = -8x^9y^{-6} = \dfrac{-8x^9}{y^6}$

b) $\left(\dfrac{2}{3}a^2bc\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}a^2bc\right)^3} = \dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(a^2\right)^3b^3c^3} = \dfrac{1}{8/27a^6b^3c^3} = \dfrac{27}{8a^6b^3c^3}$

c) $\dfrac{-\left(2xyz^2\right)^{-4}\left(x^2y\right)^2}{\left(-xz^3\right)^3} = \dfrac{-\left(2\right)^{-4}x^{-4}y^{-4}z^{-8}x^4y^2}{\left(-1\right)^3x^3z^9} = \dfrac{-\left(2\right)^{-4}x^0y^{-4}z^{-8}}{-1x^2z^9} = \dfrac{-(1)y^{-4}z^{-8}}{-1\left(2\right)^4x^2z^9} = \dfrac{y^{-4}z^{-8}}{16x^2z^9} = \dfrac{y^{-4}z^{-17}}{16x^2} = \dfrac{1}{16x^2y^4z^{17}}$

d) $\left(-3r^{-2}s^{-4}t\right)^3 = (-3)^3r^{-6}s^{-12}t^3 = \dfrac{-27t^3}{r^6s^{12}}$

e) $\left(x^{1/3}y^{2/3}\right)^2 = x^{2(1/3)}y^{2(2/3)} = x^{2/3}y^{4/3}$

f) $(a^{-2}bc^3)^{\frac{1}{2}} = a^{-1}b^{1/2}c^{3/2} = \dfrac{b^{1/2}c^{3/2}}{a^1} = \dfrac{b^{1/2}c^{3/2}}{a}$

Ejercicios de Taller

Simplifique evitando exponentes negativos en la expresión final.

a) $\dfrac{3a^4b^2c}{2a^6bc^8} =$

b) $\left(-2x^{1/2}y^{-2}z^{1/3}\right)^2 =$

c) $\dfrac{2xy^2z^{1/2}}{4xy^4z^{1/3}} =$

d) $\dfrac{\left(x^{1/3}y^{3/2}\right)\left(x^{5/3}y^{9/2}\right)}{x^{2/3}y} =$

e) $\left(-3p^4q^{-1/4}\right)^3 =$

Ejercicios de Tarea

1. Escriba la expresión con exponentes positivos. Suponga que en todos los ejercicios las variables son diferentes de cero.

a) $\dfrac{1}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3} =$

b) $-7 \cdot 7 \cdot 7 =$

c) $4x \cdot 4x \cdot 4x \cdot 2y \cdot 2y =$

d) $\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{1}{y} =$

2. Encuentre los números indicados.

a) $3^4 =$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 =$

c) $3^{-4} =$

d) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3} =$

e) $-3^{-4} =$

f) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} =$

g) $(-7)^2 =$

h) $-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5 =$

i) $-(7)^{-2} =$

j) $(-5)^0 =$

k) $(-1)^{-1} =$

3. Evalúe las siguientes expresiones:

a) $2 - 2^1 =$

b) $\dfrac{2^{-1} - 3^{-1}}{2^{-1} + 3^{-1}} =$

c) $\dfrac{(-1)^5 - 2^6}{(-1)^{-1}} =$

4. Encuentre el valor de la expresión considerando que $a = 2$, $b = -3$ y $c = -1$

a) $-2ab + c^2 =$

b) $ab^2 - c^3 =$

c) $ab^2 + bc^2 + ca^2 =$

d) $a^{-1}b^{-1}c^{-1} =$

e) $ab^{-1} + ca^{-1} =$

f) $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} =$

5. Simplifique y elimine cualquier exponente negativo:

a) $x^6x^2 =$

b) $2^{10}2^{12} =$

c) $\left(7x^4\right)\left(-3x^2\right) =$

d) $\left(-5x^2y^3\right)\left(3xy^{-2}\right) =$

e) $\dfrac{2^8}{2^3} =$

f) $\dfrac{3^4}{3^{-2}} =$

g) $\dfrac{10^{-7}}{10^4} =$

h) $\dfrac{35x^5y^8}{-21x^9y^{-1}} =$

i) $(5x)^2 =$

j) $(-4x)^3 =$

k) $\left(x^4\right)^{-5} =$

l) $\left(4x^2y^{-1}\right)^3 =$

m) $\left(3x^2y^4\right)^{-2} =$

n) $x^2x^3x^{-4} =$

6. Simplifique evitando exponentes negativos en la expresión final.

a) $\dfrac{-x^5\left(y^2\right)^3}{(xy)^2} =$

b) $\left(-3xy^5\right)^2\left(x^3y\right)^{-1} =$

c) $\dfrac{\left(7a^2b^3\right)^2}{a^3b^5} =$

d) $\left(\dfrac{a^4b^{-5}}{b^2}\right)^{-1} =$

e) $\left(\dfrac{a^{3/4}b^3}{b^{-2}}\right)^2 =$

f) $\dfrac{\left(-xy^2z^3\right)\left(y^4z^5\right)}{\left(xy^2z^3\right)^{-1}} =$

g) $\dfrac{(3abc)^3}{\left(2a^{-1}b^{-2}c\right)^2} =$

h) $\left(-2x^{-2}y^{1/3}z^{1/5}\right)^3 =$

i) $\left(\dfrac{6xyz^2}{5xy^2}\right)^{-3} =$

j) $\dfrac{4x^{-3}y^{4/5}z}{6xyz} =$

3.2. Radicales

En algunos problemas matemáticos se llega a planteamientos tales como $5^2 = 25$, $x^3 = 64$. Los valores para x se llaman raíces. En particular, si $s^2 = 25$, entonces a s, se llama la raíz cuadrada de 25; para $x^3 = 64$, decimos que x es la raíz cúbica de 64.

En general, las raíz r de un número x se definen por el enunciado $\sqrt[n]{x}$ si y solo si $r^n = x$, donde x y r son números reales no negativos y n es un entero positivo, o x y r son números reales negativos y n es un entero positivo impar. Al número r, se le denomina la raíz enésima principal de x.

La expresión se llama radical, el número n es el **índice del radical** y x se llama **radicando**. El símbolo se llama signo radical.

Si n es impar, se puede demostrar que para cualquier valor x hay exactamente una raíz enésima real de x.

Ejemplo 3.5 *Realizar las siguientes operaciones:*

a) $\sqrt{4} = 2$

b) $-\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} = -\dfrac{1}{3}$

c) $\sqrt[3]{64} = 4$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{2}{3}$

e) $\sqrt{-4}$ es un número imaginario, no tiene solución real.
f) $\sqrt[4]{-13}$ es un número imaginario, no tiene solución real.
g) $\sqrt[3]{-8} = -2$
h) $\sqrt[7]{-2187} = -3$

Si "n" es par y "x" es negativo no hay raíz enésima real de "x" (la raíz sería un número imaginario).

En los incisos e y f no hay solución en los números reales; a estos números se les conoce como números imaginarios. En los incisos g y h, se puede notar que también se tiene un número negativo en el radicando, sin embargo el resultado no es un número imaginario, es un número real. A diferencia de los incisos anteriores, en los incisos g y h se está obteniendo una raíz cúbica y una raíz de séptima respectivamente, y los números negativos si tienen raíces impares.

En otras palabras podemos establecer que, los números negativos no tienen raíces pares reales, pero si raíces impares reales.

3.2.1. Leyes de los radicales

Estas propiedades que se muestran en la tabla 3.3, se pueden usar frecuentemente para simplificar expresiones que contengan radicales.

3.2.2. Operaciones con radicales

Para efectuar las operaciones de suma y/o resta de radicales es necesario que éstos sean de igual radicando y del mismo orden –índice de radical–, y cuando se trate de multiplicación o división se utilizan las leyes de los radicales expuestas con anterioridad.

Ley	Descripción	Ejemplos
$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$	Si se tiene un radical elevado a un exponente igual al índice del radical, su resultado será el radicando.	$\left(\sqrt[3]{17}\right)^3 = 17$ $\left(\sqrt[5]{xy}\right)^5 = xy$
$\sqrt[n]{x^n} = x$, *si n es impar* $\sqrt[n]{x^n} = \lvert x\rvert$, *si n es par*	En un radical donde el índice del radical y la potencia del radicando son iguales se pueden diferir dos casos.	$\sqrt[3]{x^3} = x$ $\sqrt[7]{-y^7} = -y$ $\sqrt[2]{3^2} = \lvert 3\rvert = 3$ $\sqrt[4]{(-5)^4} = \lvert -5\rvert = 5$
$\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$	El producto de dos radicales con el mismo índice de radical y diferente radicando, es igual al producto de los radicandos en un solo radical con el mismo índice de radical.	$\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9\cdot 3} = \sqrt[3]{27}$ $\sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{16\cdot 81} = \sqrt[4]{1296}$ $\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x^3y^2} = \sqrt[3]{x^2\cdot x^3y^2} = \sqrt[3]{x^5y^2}$
$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$	El cociente de dos radicales con el mismo índice de radical y diferente radicando, es igual al radical del mismo índice del cociente de los dos radicandos.	$\dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[4]{\dfrac{16}{32}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{343}} = \sqrt[3]{\dfrac{512}{343}}$ $\dfrac{\sqrt[4]{xy^2}}{\sqrt[4]{x^2y}} = \sqrt[4]{\dfrac{xy^2}{x^2y}} = \sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$	Un radical sobre otro, es igual a un solo radical, donde el índice es el producto de ambos índices.	$\sqrt[4]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[8]{64}$ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[9]{25}$ $\sqrt[6]{\sqrt[3]{xy^3}} = \sqrt[18]{xy^3}$

Tabla 3.3. Leyes de los radicales.

Ejemplo 3.6 *Aplique las leyes de los radicales para simplificar las expresiones:*

a) $\left(\sqrt[6]{1894}\right)^6 = 1894$

b) $\left(\sqrt[8]{xy^3}\right)^8 = \sqrt[8]{xy^3}$

c) $\sqrt[5]{-25^5} = -25$

d) $\sqrt[6]{-25^6} = |-25| = 25$

e) $\sqrt[8]{xz^4}\sqrt[8]{x^5y^2z} = \sqrt[8]{xz^4 \cdot x^5y^2z} = \sqrt[8]{x^6y^2z^5}$

f) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{618}}{\sqrt[3]{309}} = \sqrt[3]{\dfrac{618}{309}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

h) $\sqrt[2]{\sqrt[15]{x^2z}} = \sqrt[30]{x^2z}$

Ejemplo 3.7 *Simplificar las siguientes expresiones.*

a) $3\sqrt{b} + 4\sqrt{b} - \sqrt{b} = 6\sqrt{b}$

b) $\sqrt{72} - 4\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{36 \cdot 2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

c) $3\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{162} = 3\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{6 \cdot 8} + \sqrt[3]{6 \cdot 27} = 3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{6} = 4\sqrt[3]{6}$

d) $\sqrt[3]{2ab}\sqrt[3]{3a^4b^2} = \sqrt[3]{6a^5b^3} = \sqrt[3]{6 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^3} = ab\sqrt[3]{6a^2}$

e) $\sqrt[5]{7xy}\sqrt[5]{2y^3}\sqrt[5]{x^2y} = \sqrt[5]{14x^3y^5} = y\sqrt[5]{14x^3}$

f) $\dfrac{\sqrt{8x^3y^4}}{\sqrt{2xy}} = \sqrt{\dfrac{8x^3y^4}{2xy}} = \sqrt{4x^2y^3} = \sqrt{4 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot y} = 2xy\sqrt{y}$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{24x^4y^5}\sqrt[3]{2xy}}{\sqrt[3]{3x^2y}} = \sqrt[3]{\dfrac{48x^5y^6}{3x^2y}} = \sqrt[3]{16x^3\mathbf{y}^5} = \sqrt[3]{8 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^2} = 2xy\sqrt[3]{2y^2}$

Ejercicios de Taller

1. Aplique las leyes de los radicales para simplificar.

a) $\left(\sqrt[4]{8}\right)^4 =$

b) $\left(\sqrt[3]{21}\right)^3 =$

c) $\sqrt[3]{x^3} =$

d) $\sqrt[7]{6^7} =$

e) $\sqrt[2]{27^2} =$

f) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9} =$

g) $\sqrt[4]{64}\sqrt[4]{25} =$

h) $\sqrt[5]{32}\sqrt[5]{243} =$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} =$

j) $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}} =$

k) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{45}} =$

l) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{16}} =$

2. Simplifique las expresiones.

a) $2\sqrt{a} + 7\sqrt{a} - \sqrt{a} =$

b) $3\sqrt{108} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{3} =$

c) $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{250} =$

d) $\sqrt{32} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{8} =$

Ejercicios de Tarea:

1. Escriba fuera del radical todos los factores posibles.

a) $\sqrt{18} =$

b) $\sqrt{45} =$

c) $\sqrt{48} =$

d) $\sqrt{72} =$

e) $\sqrt{75} =$

f) $\sqrt{128} =$

g) $\sqrt{320} =$

h) $\sqrt[3]{16} =$

i) $\sqrt[3]{448} =$

j) $\sqrt[4]{448} =$

k) $\sqrt[4]{32} =$

l) $\sqrt[4]{512} =$

2. Evalúe los siguientes radicales.

a) $\sqrt{7x^4y^8} =$

b) $\sqrt{x^6} =$

c) $\sqrt{x^4y^2} =$

d) $\sqrt{3^4x^{10}} =$

e) $\sqrt[3]{-108} =$

f) $\sqrt[3]{320} =$

g) $\sqrt[4]{256} =$

h) $\sqrt[3]{x^9y^6m^3} =$

i) $\sqrt[4]{n^8p^4} =$

j) $\sqrt[3]{16m^3n^6} =$

3. Escriba fuera del radical todos los factores posibles.

a) $\sqrt{7x^4y^8} =$

b) $\sqrt{18m^7} =$
c) $\sqrt{6n^3k^9} =$
d) $\sqrt{16a^6d^4} =$
e) $\sqrt{45a^9} =$
f) $\sqrt[3]{125a^5b^7} =$
g) $\sqrt{\dfrac{3a^3}{5b^4}} =$
h) $\sqrt[3]{\dfrac{2m^2}{125n^7}} =$

4. Realice las operaciones que se indican.

a) $2\sqrt{a} + 7\sqrt{a} - \sqrt{a} =$
b) $3\sqrt{108} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{3} =$
c) $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{250} =$
d) $\sqrt{32} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{8} =$
e) $\sqrt{128} - 6\sqrt{8} + 2\sqrt{18} =$
f) $\sqrt{50} - 2\sqrt{72} + 3\sqrt{162} =$
g) $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \dfrac{1}{3}\sqrt{32} =$
h) $\sqrt{147} - \sqrt{75} + \sqrt{21} =$
i) $\sqrt{\dfrac{3}{25}} + \sqrt{48} - \sqrt{\dfrac{12}{9}} =$

5. Efectúe las operaciones indicadas

a) $\sqrt{2}\sqrt{8} =$
b) $\sqrt{6}\sqrt{24} =$
c) $\dfrac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}} =$
d) $\dfrac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{6}} =$
e) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$
f) $\dfrac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}} =$
g) $\dfrac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}} =$
h) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{96}} =$

6. Simplifique cada una de las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8} =$

b) $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3} =$

c) $\left(\sqrt[5]{r} \cdot \sqrt[5]{s}\right)^5 =$

d) $\sqrt[3]{2x^2y^3} \cdot \sqrt[3]{4xz^3} =$

e) $\sqrt{6a^2b}\sqrt{2ab^7} =$

f) $\dfrac{\sqrt{7a^3b}}{\sqrt{ab}} =$

g) $\sqrt{\dfrac{3a}{5b^3}}\sqrt{\dfrac{25a^3}{6b}} =$

h) $\sqrt{\dfrac{343n^7p^2}{5n^3p^5}} =$

i) $\dfrac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}} =$

3.2.3. Racionalización

En una expresión algebraica del tipo racional que contenga algún radical, puede este eliminarse mediante un procedimiento denominado racionalización. Racionalizar el numerador significa eliminar el radical existente precisamente del numerador. Racionalizar el denominador significa eliminar el radical existente del denominador. El procedimiento consiste en multiplicar el numerador y denominador por una expresión conveniente, es decir, por una expresión algebraica que provoque la eliminación deseada.

Ejemplo 3.8 *Racionalizar las siguientes expresiones.*

a) $\dfrac{7}{\sqrt{2}} = \dfrac{7}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{5}{3\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5}\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) = \left(\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\right) = \dfrac{3-2}{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{1}{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$

Ejercicios de Taller

1. Racionalice el numerador

a) $\dfrac{\sqrt{7}}{3} =$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$

c) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{7} =$

2. Racionalice el denominador

a) $-\dfrac{3}{\sqrt{7}} =$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

Ejercicios de Tarea

1. En las siguientes expresiones racionalice el numerador

a) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{6} =$

b) $\dfrac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{11}+2} =$

c) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{5} =$

2. En las siguientes expresiones racionalice el denominador

a) $\dfrac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} =$

b) $\dfrac{5}{2-\sqrt{5}} =$

c) $\dfrac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{11}+2} =$

3.3. Exponentes racionales

El concepto de la raíz enésima de un número nos capacita para ampliar la definición de x^n de exponentes enteros a exponentes racionales; y como veremos con frecuencia es más fácil trabajar con exponentes racionales que con radicales.

Para cualquier número x y para cualquier entero positivo n, definimos: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ dado que $\sqrt[n]{x}$ sea un número real. Así, $x^{\frac{1}{n}}$ es simplemente otra forma de designar la raíz enésima principal de x. Además, definimos: $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ para cualquier número entero "m" tal que $\dfrac{m}{n}$ sea la mínima expresión. Se necesita ésta última definición si la ley de exponentes $(x^r)^s = x^{rs}$ va aplicarse a exponentes racionales.

Ejemplo 3.7 *Desarrollar las siguientes potencias.*

a) $(25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

b) $(64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $(0{,}09)^{\frac{5}{2}} = \left[(0{,}09)^{\frac{1}{2}}\right]^5 = \left(\sqrt{0{,}09}\right)^5 = (0{,}3)^5$

d) $(-27)^{-\frac{5}{3}} = \left[(-27)^{\frac{1}{3}}\right]^{-5} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^{-5} = \left[\sqrt[3]{(-3)^3}\right]^{-5} = (-3)^{-5} = \dfrac{1}{(-3)^5} = -\dfrac{1}{243}$

Para $x < 0$; se puede demostrar que

$$(x^m)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = x^{\frac{m}{n}},$$

sin embargo, para $x < 0$ y ciertas opciones de m y n, $x^{\frac{1}{n}}$ no es un número real y, en consecuencia $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ no esta definida, aunque la expresión $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ podría estar definida.

Por otro lado, si $x^{\frac{m}{n}}$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, y $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ cada una representa un número real; entonces todos son iguales.

Aunque $(125)^{\frac{2}{3}} = \left((125)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left((125)^2\right)^{\frac{1}{3}}$; la evaluación de $\left((125)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25$ se puede hacer mentalmente, mientras que $\left((125)^2\right)^{\frac{1}{3}} = (15625)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{15625} = 25$ podría necesitar el uso de calculadora.

El siguiente caso demuestra que $x^{\frac{m}{n}}$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, y $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ no son equivalentes.

Compare a) $x^{\frac{m}{n}}$ b) $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ c) $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ para $x = -9, m = 2, n = 2$

a) $x^{\frac{m}{n}} = (-9)^{\frac{2}{2}} = -9$

b) $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left((-9)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (81)^{\frac{1}{2}} = 9$

c) $(x^m)^{\frac{1}{n}} = \left((-9)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{-9}\right)^2$, que no es un número real ya que contiene la raíz cuadrada de un número negativo (complejo).

Ejercicios de tarea

1. Realice las siguientes operaciones.

a) $\left(a^2b^{-8}\right)^{\frac{1}{4}} =$

b) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{2}}} =$

c) $\left(\dfrac{3x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{5}} =$

d) $\sqrt{x^4\sqrt{x}} =$

e) $-\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}} =$

2. Vuelva e escribir la expresión usando exponentes racionales.

Nota: *Para todos los ejercicios suponga que todas las variables son positivas.*

a) $\sqrt[3]{ab} =$

b) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^4} =$

c) $\sqrt[5]{7x} =$

d) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^3} =$

e) $\sqrt[7]{x+y} =$

f) $\sqrt[3]{a^2+b^2} =$

g) $\sqrt{\left(x+\sqrt{x}\right)} =$

h) $\sqrt{x^2+y^2} =$

3. Vuelva a escribir la expresión usando notación radical.

a) $a^{2/3} =$

b) $2a^{1/3} =$

c) $(3a)^{2/3} =$

d) $2a^{2/3} =$

e) $3 + a^{2/3} =$

f) $(3+a)^{2/3} =$

g) $\dfrac{3}{a^{2/3}} =$

h) $(3a)^{-3/2} =$

4. Encuentre los números indicados.

a) $49^{1/2} =$

b) $-8^{1/3} =$

c) $(0{,}04)^{7/2} =$

d) $\left(\frac{1}{64}\right)^{2/3} =$

e) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-2/3} =$

f) $(27)^{7/3} =$

g) $(-27)^{-7/3} =$

h) $\left(\frac{2}{\sqrt{162}}\right) =$

5. Simplifique y elimine cualquier exponente negativo.

a) $\left(3w^{\frac{3}{2}}\right)\left(7w^{\frac{5}{2}}\right) =$

b) $a^{\frac{3}{2}}\left(4a^{\frac{2}{3}}\right) =$

c) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{8}}\right) =$

d) $\left(2a^{\frac{1}{2}}\right)\left(2a^{\frac{1}{3}}\right)\left(2a^{\frac{1}{6}}\right) =$

e) $\left(a^2b^4\right)^{\frac{1}{4}} =$

f) $\left(100x^4\right)^{-\frac{3}{2}} =$

g) $\left(25x^{\frac{1}{3}}y\right)^{\frac{3}{2}} =$

h) $\left(4x^4y^{-6}\right)^{\frac{1}{2}} =$

i) $\dfrac{cd^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}d} =$

j) $\dfrac{4x^{\frac{1}{2}}}{(8x)^{\frac{1}{3}}} =$

k) $\left(\dfrac{-y^{\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1} =$

l) $\left[\left(-27a^3b^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 =$

6. Vuelva a escribir la expresión como un solo radical.

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}} =$

b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[8]{a}} =$

c) $\sqrt{x\sqrt{x}} =$

d) $\sqrt{x^3\sqrt{x}} =$

7. Realice las siguientes operaciones, todas las variables representan números positivos.

a) $\left(\sqrt{10abc}\right)\left(\sqrt{15a^3c}\right)\left(\sqrt{12bc}\right) =$

b) $\sqrt[3]{9xy^2}\,\sqrt[3]{6x^2y^4}\,\sqrt[3]{60x^5y} =$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{10}{3}a^3}\,\sqrt[4]{24a^2b^3} =$

d) $\left(\sqrt[3]{6a^2}\right)\left(\sqrt[2]{3a^3}\right) =$

e) $\left(\sqrt[3]{7m}\right)\left(\sqrt[4]{2m}\right) =$

f) $\dfrac{\sqrt{4x^2n}}{\sqrt{2xn}} =$

g) $\dfrac{\sqrt{3s^3}}{\sqrt[4]{3s}} =$

8. Racionalice el denominador de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{x^3y}{\sqrt[5]{2x^2y^3z}} =$

b) $\dfrac{3m^2}{\sqrt[4]{4mnp}} =$

c) $\dfrac{x^2-y^2}{3x\sqrt{x+y}} =$

d) $\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x-\sqrt{x^2+y^2}} =$

Capítulo 4

Polinomios y productos notables

4.1. Expresión de un polinomio de una variable

La expresión algebraica de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$ es un polinomio de grado n y variable x. Los coeficientes $\{a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ a_{n-3}, ...,\ a_2,\ a_1,\ a_0\}$ pertenecen al conjunto de los números reales; mientras los exponentes $\{n,\ n-1,\ n-2,\ n-3, ...,\ 2,\ 1\}$ pertenecen al conjunto de los números naturales.

Ejemplo 4.1 *Exprese el polinomio para $n = 5$ con coeficientes $\{a_5 = 2,\ a_4 = -3,\ a_3 = 4,\ a_2 = 6,\ a_1 = 7,\ a_0 = 3\}$. Note que los coeficientes pertenecen al conjunto de los números enteros.*

$$2x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 7x + 3.$$

El grado del polinomio es 5.

Ejemplo 4.2 *Exprese el polinomio empleando los coeficientes* $\left\{a_6 = \frac{3}{2},\ a_5 = -4,\ a_4 = 0,\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_2 = 5,\ a_1 = 0,\ a_0 = -100\right\}$*. En este caso los coeficientes pertenecen al conjunto de los números racionales.*

Dicho polinomio es el siguiente:

$$\frac{3}{2}x^6 - 4x^5 + \frac{1}{4}x^3 + 5x^2 - 100.$$

Debido a que los coeficientes $a_4 = 0$ y $a_1 = 0$ los términos x^4 y x no aparecen en el polinomio. El exponente más grande es 6, por lo tanto el polinomio es de sexto grado.

Ejemplo 4.3 *Exprese el polinomio con coeficientes reales*

$$\left\{a_5 = \frac{1}{4},\ a_4 = -\sqrt{2},\ a_3 = 0,\ a_2 = 6,\ a_1 = 7,\ a_0 = -10\right\},$$

$$\frac{1}{4}x^5 - \sqrt{2}x^4 + 6x^2 + 7x - 10.$$

El polinomio es de grado 5.

Ejemplo 4.4 *Determine si la siguiente expresión algebraica es un polinomio*

$$\frac{6}{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x},$$

para identificar a que conjunto de números pertenecen los exponentes, la expresión puede escribirse como:

$$6x^{-2} - 4x^{1/3} + 5x^{-1}.$$

Puede notarse que los exponentes en la expresión son $\left\{-2,\ \frac{1}{3},\ -1\right\}$ y que pertenecen a los números racionales. Un polinomio tiene exponentes que pertenecen al conjunto de los números naturales. Por lo tanto la expresión no es un polinomio.

Algunos polinomios especiales son los siguientes:

Término algebraico	*Ejemplo*	*Grado*	*Polinomio*
$a_0x^0,\ [a_0 \neq 0]$	10	0	Constante
$a_1x^1 + a_0x^0,\ [a_1, a_0 \neq 0]$	$-7x - 8$	1	Lineal
$a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0,\ [a_2, a_1, a_0 \neq 0]$	$-\frac{1}{4}x^2 + 5x - \sqrt{6}$	2	Cuadrático
$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0,\ [a_3, a_2, a_1, a_0 \neq 0]$	$x^3 + 2x^2 + 8x + 1$	3	Cúbico

4.2. Polinomios de más de una variable

Existen polinomios con más de una variable; cada una de ellas tiene exponentes que pertenecen al conjunto de los números naturales.

Ejemplo 4.5. *Identifique las variables y los coeficientes del siguiente polinomio:* $-4x^3y^2 + x^4y^4 + \sqrt{2}xyz^2$

En el término aparecen las variables x, y, z y los coeficientes son $\{-4, 1, \sqrt{2}\}$. Todos los exponentes son números enteros positivos (naturales).

4.3. Monomios, Binomios y Trinomios

Un *monomio* es el polinomio representado por un solo término algebraico. Su grado se obtiene sumando los exponentes de sus variables.

Ejemplo 4.6 *Determine el grado del siguiente monomio:* $-8x^3y^4$.
El grado del monomio es $3 + 4 = 7$.

Los binomios son los polinomios de dos términos algebraicos. Un ejemplo es $6x^2 + 8y^3z$.

En el binomio anterior se involucran las variables x, y, z . El término $6x^2$ es de grado 2, mientras el término $8y^3z$ es de grado 4 . El grado de un binomio corresponde al del término con el mayor grado. Por tanto, el grado del binomio $6x^2 + 8y^3z$ es 4.

Ejemplo 4.7 *Determine el grado del siguiente trinomio:* $-3x^2yz^2 + 7x + y^2$.
Los grados de los términos son {5, 1, 2} respectivamente. Por lo que el grado del trinomio es 5.

4.4. Términos semejantes

Los términos semejantes son aquellos que tienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes aunque sus coeficientes sean diferentes.

Ejemplo 4.8 *Del siguiente grupo de términos identifique aquellos que son semejantes.*
$\left\{7x, -4x^2, 8xy, -6xy, \sqrt{5}yx^2, -4x, \frac{5}{3}x, 6x^2y, -3xy^2\right\}$
De acuerdo a la definición anterior se tienen los siguientes grupos de términos semejantes:
$\left\{7x, -4x, \frac{5}{3}x\right\}$, $\{8xy, -6xy\}$, $\{-4x^2\}$, $\left\{\sqrt{5}yx^2, 6x^2y\right\}$ y $\{-3xy^2\}$.

Ejercicios de Taller

1.-Determine si la expresión es un polinomio. Si lo es, defina su grado y escriba si es un monomio, binomio o trinomio.

Expresión	**Polinomio (Si/No)**	**Grado**	**Monomio, Binomio,Trinomio**
$\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$			
$-4x^3 + 8xy - \sqrt{2}$			
$x^{-3} + 6x + 8$			
$x^2 + 5x + 6$			
$6ab + 5ab^2$			
$\sqrt[3]{x} + 5xy$			
$x + y + z$			

2.- Agrupe los términos semejantes

$$\left\{-2ax,\ -2xy,\ 3x^2y^2,\ \sqrt{8}xy^2,\ -6xy^2,\ 5ax,\ -4bx,\ 5xy,\ \frac{1}{3}x^2y,\ -3xy^2,\ -2x^2y,\ 7ax,\ 5xy\right\}$$

Términos semejantes

1.-

2.-

3.-

4.-

5.-

4.5. Operaciones con polinomios

4.5.1. Suma

Ejemplo 4.9 *Realizar la suma* $(6x^2 + 8xy - 4y^2) + (-4x^2 + 7xy + 2y^2) =$

Para efectuar la operación se deben identificar los términos semejantes y agruparlos: $6x^2 + 8xy - 4y^2 - 4x^2 + 7xy + 2y^2 = (6x^2 - 4x^2) + (8xy + 7xy) + (-4y^2 + 2y^2)$.

Finalmente, se suman los coeficientes: $(6-4)x^2 + (8+7)xy + 7xy + (-4+2)y^2 = 2x^2 + 15xy - 2y^2$.

Ejemplo 4.10 *Realizar la suma* $(\frac{1}{7}a^2b^2 + 6a^2b - \frac{2}{3}ab^2 + 2a^2) + (\frac{2}{5}a^2b^2 - 3a^2b - 2ab^2) =$

Agrupando términos semejantes se obtiene $(\frac{1}{7}a^2b^2 + \frac{2}{5}a^2b^2) + (6a^2b - 3a^2b) + (-\frac{2}{3}ab^2 - 2ab^2) + 2a^2$

Sumando los coeficientes: $\frac{19}{35}a^2b^2 + 3a^2b - \frac{8}{3}ab^2 + 2a^2$

4.5.2. Resta

Ejemplo 4.11 *Efectuar la siguiente resta* $(-3x^2 + 2xy - 7y^2) - (-2x^2 - 8xy + 6y^2 - 8x) =$

Al aplicar el signo negativo al segundo grupo de términos se tiene:$(-3x^2 + 2xy - 7y^2) + (2x^2 + 8xy - 6y^2 + 8x)$

Agrupando términos y sumando coeficientes:$(-3x^2 + 2x^2) + (2xy + 8xy) + (-7y^2 - 6y^2) + 8x = -x^2 + 10xy - 13y^2 + 8x$

Ejemplo 4.12 *Efectuar la siguiente resta* $(8cd^2 - \frac{2}{3}cd - 4c) - (-\sqrt{7}cd^2 + \frac{1}{3}cd - 8c) =$

Al aplicar el signo negativo al segundo grupo de términos se tiene:$(8cd^2 - \frac{2}{3}cd - 4c) + (\sqrt{7}cd^2 - \frac{1}{3}cd + 8c)$

Agrupando términos: $(8cd^2 + \sqrt{7}cd^2) + (-\frac{2}{3}cd - \frac{1}{3}cd) + (-4c + 8c)$

y sumando coeficientes se tiene: $= (8 + \sqrt{7})cd^2 + (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3})cd + (-4 + 8)c = (8 + \sqrt{7})cd^2 - cd + 4c$

Ejercicios de Taller

a) $(6x + 2y - 3z) + (-4x + 8y - z) =$

b) $\left(-2xy + 5y^2 - \frac{2}{5}z^3\right) + \left(3xy - 5y^2 - \frac{1}{5}z^3\right) =$

c) $(5a + 2ab - 3ac) + \left(\frac{5}{3}a - \frac{1}{4}ab - 3ab\right) =$

d) $\left(\sqrt{2}x + \frac{1}{3}y\right) + \left(-4x + \frac{2}{3}y\right) =$

e) $(-2a + 3b + 2c) - (-4a - 2b + 5c) =$

f) $\left(-2x^2y - 6y^2 - \frac{2}{5}z^3\right) - \left(-2x^2y + 56y^2 - \frac{7}{5}z^3\right) =$

g) $\left(-2u + 5v - 3w^2\right) - (-3u - 2v + 2w) =$

h) $\left(\sqrt{2}xy + \frac{3}{4}y\right) - \left(-4xy + \frac{5}{6}y\right) =$

4.5.3. Multiplicación

Producto de dos monomios

Ejemplo 4.13 *Resolver el siguiente producto* $(-2x^2y^3z)(5xy^2z^3) =$
Considerando las leyes de los exponentes, se tiene: $(-2)(5)x^2xy^3y^2zz^3 = -10x^3y^5z^4$

Producto de un monomio por un binomio

Ejemplo 4.14 *Resolver el siguiente producto* $(7xy^2)(6x^3y - 5x^2yz^3) =$
Se aplica la propiedad distributiva como sigue: $(7xy^2)(6x^3y) - (7xy^2)(5x^2yz^3) = 42x^4y^3 - 35x^3y^3z^3$

Producto de dos binomios

Ejemplo 4.15 Resolver *el siguiente producto* $(6a + 5ab^2)(-3b + 8ab^2) =$
Al aplicar la propiedad distributiva y las leyes de los exponentes se tiene: $(6a)(-3b) + (6a)(8ab^2) + (5ab^2)(-3b) + (5ab^2)(8ab^2) = -18ab + 48a^2b^2 - 15ab^3 + 40a^2b^4$

Ejercicios de Taller

Simplificar las siguientes expresiones.

a) $\left(-2a^2b^3c^5\right)\left(4a^2bc^2\right) =$

b) $\left(5xy^2z\right)\left(-3xz^5 + \frac{1}{5}xy^3z^2\right) =$

c) $\left(3p^2q^5r^3\right)\left(-3pqr^3 + \sqrt{5}pr^5\right) =$

d) $\left(2a^2b + c\right)(5a - 2c) =$

e) $\left(\frac{1}{4}xy^2 + 2yz\right)\left(\frac{4}{3}xy^2 - 2yz + 8y\right) =$

4.5.4. División

Ejemplo 4.16 *Resolver* $(8x^3y + 10x^2 - 4x^2y - 5x)/(4xy + 5) =$

En el primer paso (i) mostrado en la Figura 4.1 se busca el factor requerido para que al operar sobre $4xy$, resulte $8x^3y$. O sea, $(Factor)(4xy) = 8x^3y$; el factor que cumple es $2x^2$.

El monomio $2x^2$ opera sobre el divisor $4xy + 5$,resultando: $2x^2(4xy + 5) = 8x^3y + 10x^2$. Dicho binomio se resta al dividendo, dando como resultado cero.

En el segundo paso (ii) se bajan los términos que quedan del dividendo y se busca un factor que al operar sobre $4xy$, resulte $-4x^2y$. El factor que cumple es $-x$.

Se multiplica el factor por el divisor $-x(4xy+5) = -4x^2y-5x$. Dicho término se resta al dividendo dejando un cero como residuo.

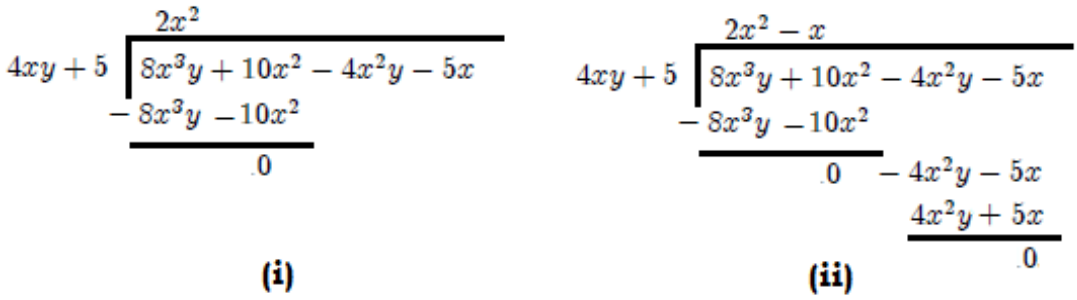


Figura 4.1. Procedimiento del ejemplo 4.16.

Ejemplo 4.17 *Resolver* $(18a^2 + b^2 + 9ab + 12a + 12)/(6a + b) =$

En el primer paso (i) de la Figura 4.2 se busca el factor que al operar sobre $6a$ dé como resultado $18a^2$. O sea, $(Factor)(6a) = 18a^2$. Dicho factor es $3a$. Al multiplicar el factor por el divisor se tiene $(3a)(6a + b) = 18a^2 + 3ab$, este binomio se resta al dividendo quedando como diferencia $b^2 + 6ab$.

En el segundo paso (ii) el factor empleado para operar es b. Al multiplicar b por el divisor se obtiene $b^2 + 6ab$ valor que se resta al dividendo.

Finalmente (iii) se bajan los últimos términos del dividendo. En este caso el factor para operar es el 2, se multiplica por el divisor y se resta al dividendo; quedando como residuo $-2b + 12$.

Ejercicios de Taller

a) $\left(48x^3 + 64x^2 + 30x + 20\right) / (6x + 8) =$
b) $\left(a^2 + 3ab + 2b^2\right) / (a + b) =$
c) $\left(30x^5 + 45x^2\right) / \left(15x^2\right) =$
d) $\left(5x^3 + 4x^2 + 5xy + 4y\right) / (5x + 4) =$

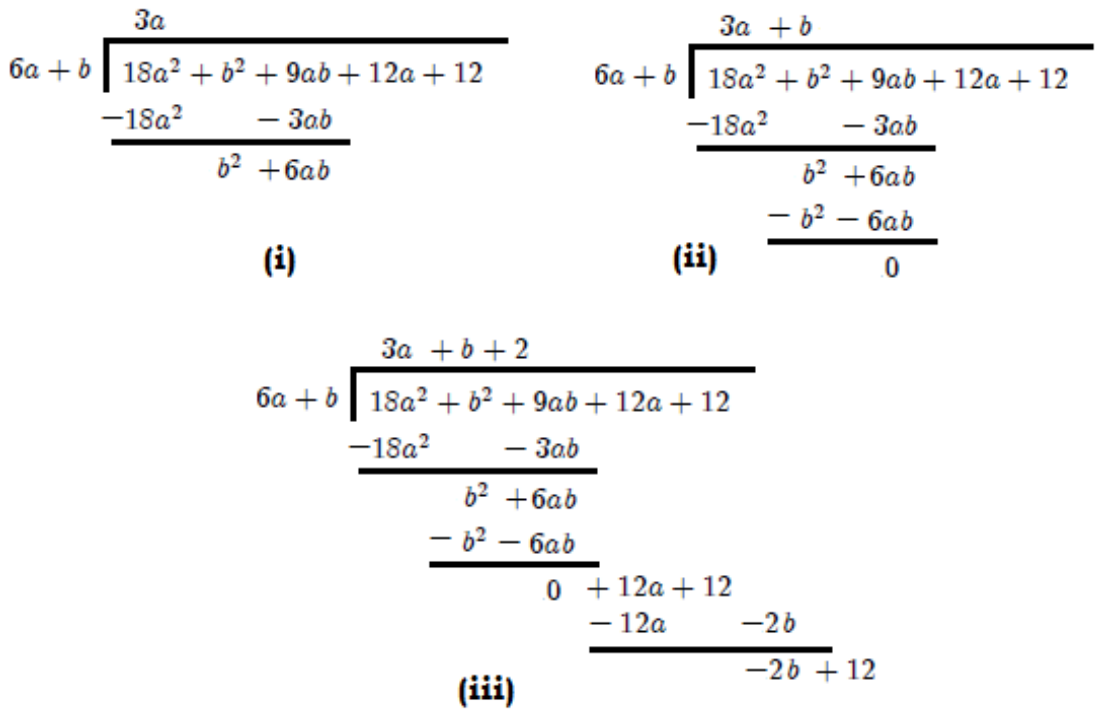


Figura 4.2. Procedimiento del Ejemplo 4.17.

4.5.5. Productos notables.

En la solución de problemas matemáticos existen algunos productos que aparecen frecuentemente y que con experiencia pueden desarrollarse de forma directa. Estos productos se conocen como *productos notables.*

Binomio al cuadrado

Se representa y desarrolla de la siguiente forma

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ab + bb,$$

que en forma compacta se puede escribir

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

El resultado de desarrollar un binomio al cuadrado se le llama *Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP).* En lenguaje común, este producto notable se describe así:

"*El cuadrado de la suma/resta de dos términos, resulta en el cuadrado del primer término más/menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término.*"

Ejemplo 4.18 *Desarrolle el producto* $(5p+6q)^2 =$

$$\begin{aligned}(5p+6q)^2 &= (5p)^2 + 2(5p)(6q) + (6q)^2 \\ &= 25p^2 + 60pq + 36q^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.19 *Desarrolle el producto* $(3ab^2 + 5a^2c)^2 =$

$$\begin{aligned}(3ab^2 - 5a^2c)^2 &= (3ab^2)^2 + 2(3ab^2)(-5a^2c) + (5a^2c)^2 \\ &= 9a^2b^4 - 30a^3b^2c + 25a^4c^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.20 *Desarrolle el producto* $(\frac{1}{3}x^3y^2 + \sqrt{5}yz)^2 =$

$$\begin{aligned}(-\frac{1}{3}x^3y^2 + \sqrt{5}yz)^2 &= (-\frac{1}{3}x^3y^2)^2 + 2(-\frac{1}{3}x^3y^2)(\sqrt{5}yz) + (\sqrt{5}yz)^2 \\ &= \frac{1}{9}x^6y^4 - \frac{2\sqrt{5}}{3}x^3y^3z + 5y^2z^2.\end{aligned}$$

Binomio conjugado

El conjugado del binomio $(a+b)$ es $(a-b)$. Su producto se representa y desarrolla de la siguiente forma

$$(a+b)(a-b) = aa - ab + ab - bb = a^2 - b^2.$$

El resultado de multiplicar binomios conjugados se llama *Diferencia de Cuadrados.* En lenguaje común, este producto notable se describe así:

"*El producto de un binomio con su conjugado, resulta en el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.*"

Nota: *Se dice que dos binomios son conjugados cuando solo uno de sus términos cambia de signo, por ejemplo:* $(x-3)(-x-3)$ son conjugados, $(3+m)(3-m)$ son conjugados.

Ejemplo 4.21 *Desarrolle el producto* $(6x+8y)(6x-8y) =$

$$(6x+8y)(6x-8y) = (6x)^2 - (8y)^2 = 36x^2 - 64y^2.$$

Ejemplo 4.22 *Desarrolle el producto* $(\frac{2}{3}ab^2 + \sqrt{2}c)(\frac{2}{3}ab^2 - \sqrt{2}c) =$

$$(\frac{2}{3}ab^2 + \sqrt{2}c)(\frac{2}{3}ab^2 - \sqrt{2}c) = (\frac{2}{3}ab^2)^2 - (\sqrt{2}c)^2 = \frac{4}{9}a^2b^4 - 2c^2.$$

Ejercicios de Taller

De a cuerdo a cada caso, identifique si se trata del producto de dos binomios idénticos (binomios al cudrado) o si se trata del producto de binomios conjuagdos. Desarrolle los binomios al cuadrado o realice el producto de los binomios conjugados.

a) $(-2a+3b)(-2a+3b) =$

b) $(\frac{2}{3}a^2b + 7b^3)^2 =$

c) $(-4x + \frac{1}{3}xy^2)^2 =$

d) $(\sqrt{2}s^3 + 5s^2)(\sqrt{2}s^3 + 5s^2) =$

e) $(2a+3b)(2a-3b) =$

f) $(\frac{1}{3}a^2b^2 + 4b^5)(\frac{1}{3}a^2b^2 - 4b^5) =$

g) $(-\sqrt{5}xy^2 + 4x^2y)(\sqrt{5}xy^2 + 4x^2y) =$

h) $(x+5)(x-5) =$

Binomio al cubo

Un binomio al cubo se desarrolla como sigue

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3,$$

Por lo que se puede establecer en forma compacta

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

El resultado de desarrollar un binomio al cubo no tiene un nombre en especial En lenguaje común, este producto notable se describe así:

"*El cubo de la suma/resta de dos términos, resulta en el cuadrado del primer término más/menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término.*"

Ejemplo 4.23 *Desarrolle el siguiente binomio* $(3x^2+2y)^3 =$

Empleando el desarrollo de un binomio al cubo se tiene: $(3x^2+y)^3 = (3x^2)^3 + 3(3x^2)^2(2y) + 3(3x^2)(2y)^2 + (2y)^3 = 27x^6 + 54x^4y + 36x^2y^2 + 8y^3$.

Ejemplo 4.24 *Desarrolle el siguiente binomio* $(2p - \frac{2}{3}p^2q)^3 =$

El binomio se desarrolla de la siguiente manera $(2p)^3 - 3(2p)^2(\frac{2}{3}p^2q) + 3(2p)(\frac{2}{3}p^2q)^2 - (\frac{2}{3}p^2q)^3$, al elevar los términos a sus respectivos exponentes, resulta: $8p^3 - 3(4p^2)(\frac{2}{3}p^2q) + 3(2p)(\frac{4}{9}p^4q^2) - (\frac{8}{27}p^6q^3)$, por último se multiplican los monomios, $8p^3 - 8p^4q + \frac{8}{3}p^5q^2 - \frac{8}{27}p^6q^3$.

Ejercicios de Taller

Desarrolle los siguientes binomios al cubo.

a) $(a^3+4b^2)^3 =$

b) $(4a^2b + 2ab^3)^3 =$

c) $(-2x - \frac{1}{3}x^4y^2)^3 =$

Otros productos notables

En la tabla se muestran otros productos

$(a+b+c)^3 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$
$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$
$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

Ejemplo 4.25 *Desarrolle el producto* $(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4) =$

Empleando el producto notable se tiene:

$(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4) = (2x)^3 - (y^2)^3 = 8x^3 - y^6$

Ejercicios de Tarea

1.- Realice las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(a+2bc+d^2) + (-2a+8bc+4d^2+5e) =$

b) $(-\frac{1}{3}x + 6xy + y^2) + (2x - 3xy + 8y^2) =$

c) $(\frac{4}{3}w + 6y + \frac{2}{3}z) + (-\frac{1}{7}w + y^2 - 2z) =$

d) $(mn - \sqrt{3}m^2 + \frac{5}{4}n) + (\frac{1}{8}n - \frac{5}{4}m^2 + \sqrt{3}mn) =$

e) $(3a - 2bc + 4d^2) - (\frac{3}{7}a - 4bc - 8d^2 + ef) =$

f) $(\pi uv^2 + 6uv - 3v^2)\ -(2uv^2 - 3uv - \frac{1}{15}v^2)$

g) $(8b^3 - 3b^2 - 2b) - (-3b^3 + 7b^2 + 2b) =$

h) $(\frac{1}{2}ab^3c^2)(2a^2bc^4) =$

i) $(8xyz^2)(-2x + 3xy^2z) =$

j) $(x + 6)(x - 3) =$

k) $(-3ab^3 + \frac{1}{2}ab^2)(ab + 2a^2) =$

l) $(\frac{1}{4}rp - 2r + 5)(-3r + \frac{1}{2}) =$

m) $(6x^3 + 35x^2 + 28x + 15)/(6x^2 + 5x + 3) =$

n) $(y^2x^2 + yx^2 - y^3 + y)/(y^2 + y) =$

2.- Desarrolle el producto notable:

a) $(5p + 8)^2 =$

b) $(2x^2y^3 + 3xy)^2 =$

c) $(\sqrt{5}a^2 - 4b)^2 =$

d) $(\frac{1}{3}a + 5b)(\frac{1}{3}a - 5b) =$

e) $(x + 3)(x - 3) =$

f) $(\sqrt{6}mn + \sqrt{3})(\sqrt{6}mn - \sqrt{3}) =$

g) $(6x + 8y)(6x - 8y) =$

h) $(2a + 7)^3 =$

i) $(3xy^2 + 2x^3y)^3 =$

j) $(x^2 + 2x + 3)^3 =$

k) $(4m + 2n)(16m^2 - 8mn + 4n^2) =$

3.- Calcule el producto de las siguientes expresiones:

a) $(x - 1)(x + 2) =$

b) $(x + 2y)^2 =$

c) $(3h - \sqrt{2}k)^2 =$

d) $(5b^4 + 3x^2)(5b^4 - 3x^2) =$

e) $(a + b - c)^2 =$

f) $(2a^2 - 4a + 1)^2 =$

g) $(3x - 5)(7x + 4) =$

h) $(x^2 + 7x - 2)(3x^2 - x + 5) =$

i) $(3x - 2)(3x - 2)(3x - 2) =$

j) $(4x + 5y)(6x^2 - \frac{3}{4}xy + 2y^2) =$

4.- Determine el producto de las siguientes expresiones:

a) $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{2x}{3}+\frac{2y}{4}\right)=$

b) $\left(\frac{m^2}{3}+\frac{2n^2}{5}\right)\left(\frac{m^2}{3}-\frac{2n^2}{5}\right)=$

c) $\left(\frac{3a^2}{b}+\frac{5x}{4y}\right)\left(\frac{3a^2}{b}-\frac{5x}{4y}\right)=$

d) $\left(m^3+m^2-2m+1\right)^2=$

e) $[3\,(2y+3b)+7]\,[7\,(2y+3b)-7]=$

f) $\left[\left(a^3-a\right)+\left(a^2-3\right)\right]\left[\left(a^3-a\right)-\left(a^2-3\right)\right]=$

Capítulo 5

Factorización

Se conoce como *Factorización* al proceso a través del cual se descompone una cantidad en factores. Así como los números pueden ser expresados como el producto de dos o más números, un polinomio puede ser expresado como el producto de dos o más expresiones algebraicas. Así por ejemplo si se desea factorizar el número 30, se tiene que

$$30 = (10)(3) = (15)(2) = (3)(5)(2) = (6)(5)$$

Se puede ver que el número 30 se ha factorizado en cuatro diferentes formas. Los números 10, 3, 15, 6, 5, 10 y 3 se llaman factores del número 30, y en su caso también son divisores del número 30.

Por otro lado si deseamos factorizar el polinomio $3x^2y + 6x^3m - 9x^2yn$, se tiene

$$3x^2y + 6x^3m - 9x^2yn = 3\left(x^2y + 2x^3m - 3x^2yn\right) \quad \text{ó} \quad 3x^2y + 6x^3m - 9x^2yn = 3x^2\left(y + 2mx - 3yn\right) \quad \text{ó}$$

$$3x^2y + 6x^3m - 9x^2yn = 3x^3m\left(\frac{y}{xm} + 2 - \frac{3yn}{xm}\right)$$

aquí se puede ver, que el polinomio se ha factorizado de tres formas diferentes, y desde luego no son las únicas. El tipo de factorización que se deberá emplear dependerá del tipo de expresión que se tenga y además del objetivo de la misma. Así pues, se pueden definir diferentes tipos de factorización, los cuales se detallan en lo sucesivo.

5.1. Tipos de Factorización

5.1.1. Factorización por factor común.

Como el nombre lo indica, consiste en determinar un factor que sea común a todos o la mayoría de los términos de una expresión algebraica.

Ejemplo 5.1 *Factorizar el polinomio* $3r^3p + 6r^5q - 12r^2s$.

En este caso el factor estará compuesto por el máximo comun divisor de los coeficientes del polinomio y por las variables con exponente menor que sean común a los términos del polinomio.

Aquí se puede ver que los coeficientes del polinomio son 3, 6 y 12. El MCD (Máximo Común Divisor) de estos coeficientes es 3. También se puede ver que la variable común a todos los términos es r, y su exponente menor es el 2. Por lo tanto nuestro factor común será $3r^2$. Así, nuestro polinomio puede factorizarse como

$$3r^3p + 6r^5q - 12r^2s = 3r^2\left(rp + 2r^3q - 4s\right),$$

donde el primer factor es conocido como factor común.

Ejemplo 5.2 *Factorizar el polinomio* $2r\left(3t+1\right) + \left(3t+1\right)\left(k-5\right) - q\left(3t+1\right).$

En este caso, tenemos tres términos y se puede notar que el factor común a los tres términos es $\left(3t+1\right)$, así pues el polinomio puede ser expresado por la siguiente factorización

$$2r\left(3t+1\right) + \left(3t+1\right)\left(k-5\right) - q\left(3t+1\right) = \left(3t+1\right)\left[2r + \left(k-5\right) - q\right].$$

Ejemplo 5.3 *Factorizar el polinomio* $4x^3y^4z + 5m^2nt^3 - 2x^2y^6w + 10m^2n^5k^2.$

En este otro caso, no hay un factor común explícito para los cuatro términos, no obstante, podemos hacer una agrupación previa para realizar la factorización. Si agrupamos el primer y tercer término $\left(4x^3y^4z - 2x^2y^6w\right)$, se puede notar que el MCD de los coeficientes de ambos términos es 2, y las variables en común para ambos términos son x e y, y sus exponentes menores son 2 y 4 respectivamente. Entonces nuestro factor común para estos dos términos será $2x^2y^4$. De igual manera si agrupamos el segundo y cuarto término del polinomio $\left(5m^2nt^3 + 10m^2n^5k^2\right)$ el factor común es $5m^2n$. Si reordenamos nuestro polinomio, se puede factorizar así

$$4x^3y^4z - 2x^2y^6w + 5m^2nt^3 + 10m^2n^5k^2 = 2x^2y^4\left(2xz - y^2w\right) + 5m^2n\left(t^3 + 2n^4k^2\right).$$

Ejercicios de Taller

Factorizar los siguientes polinomios.

a) $12x^3 + 2x^2 + 6x =$

b) $6x^3y^4 - 3\sqrt{3}x^2y^2 - 3x^2y + 3xy =$

c) $2y^2 - yz - 3z =$

d) $15at + bs + 3bt + 5as =$

5.1.2. Factorización de Diferencias de Cuadrados.

En términos generales, una diferencia de cuadrados es una expresión formada por dos términos de signo contrario y ambos pueden tener o no raíz cuadrada exacta. Por ejemplo son diferencias de cuadrados los términos $16x^2 - 9y^2$, $-2m^4 + 4r^6$ y $25t^8 - 3x^5$. Las diferencias de cuadrados se factorizan en dos binomios que se denominan *Binomios Conjugados,* tales binomios tienen la característica de tener los mismos términos pero con sólo un signo diferente. Así se tiene que

$$a^2 - b^2 = \left(a-b\right)\left(a+b\right), \tag{5.1}$$

donde los términos de los factores del miembro derecho de la ecuación son las raíces cuadradas de los términos del miembro izquierdo de la igualdad.

Ejemplo 5.4 *Factorizar la diferencia de cuadrados* $x^2 - y^4$.

Podemos ver a esta expresión como una diferencia de cuadrados porque es un binomio con términos de signo contrario y podemos sacar raíz cuadrada a los términos. Para encontrar los términos de los binomios conjugados, obtenemos las raíces cuadradas de los términos de la diferencia de cuadrados, asi la raíz cuadrada del primer término es $\sqrt{x^2} = x^{\frac{2}{2}} = x$ y la raíz cuadrada del segundo término es $\sqrt{y^4} = y^{\frac{4}{2}} = y^2$. Tomamos como referencia a (5.1) y se tiene que

$$x^2 - y^4 = \left(x + y^2\right)\left(x - y^2\right).$$

Ejemplo 5.5 *Factorizar la diferencia de cuadrados* $-9m^5 + 3n^6$.

Nuevamente se tiene un binomio con términos de signo contrario, reagrupamos los términos por cuestiones prácticas, quedando la expresión como $3n^6 - 9m^5$, ahora obtenemos las raíces cuadradas de los términos de la diferencia de cuadrados, así $\sqrt{3n^6} = \sqrt{3}\sqrt{n^6} = \sqrt{3}n^{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}n^3$ y $\sqrt{9m^5} = \sqrt{9}\sqrt{m^5} = 3m^{\frac{5}{2}}$, en este caso hay que notar que el 3 y m^5 no tienen raíz cuadrada exacta. Tomamos como referencia (5.1) y se tiene que

$$-9m^5 + 3n^6 = 3n^6 - 9m^5 = \left(\sqrt{3}n^3 + 3m^{\frac{5}{2}}\right)\left(\sqrt{3}n^3 - 3m^{\frac{5}{2}}\right).$$

Ejemplo 5.6 *Factorizar la diferencia de cuadrados* $(x + 2y)^4 - (3m + 6t)^2$.

En este caso, se presenta otra diferencia de cuadrados, donde cada término de la diferencia de cuadrados es a su vez un binomio. De igual manera se procede a obtener las raíces cuadradas de los términos de la diferencia de cuadrados, así $\sqrt{(x+2y)^4} = (x+2y)^{\frac{4}{2}} = (x+2y)^2$ y $\sqrt{(3m+6t)^2} = (3m+6t)^{\frac{2}{2}} = (3m+6t)$. Tomamos como referencia (5.1) y se tiene que

$$(x + 2y)^4 - (3m + 6t)^2 = \Big[(x + 2y)^2 + (3m + 6t)\Big]\Big[(x + 2y)^2 - (3m + 6t)\Big].$$

Nota: *Las expresiones* $x^2 + y^2$, $-m^4 - t^2$ *por ejemplo, no son diferencias de cuadrados, porque los términos tienen signos iguales, por lo tanto de ninguna manera se pueden factorizar en Binomios Conjugados. Se deja como ejercicio hacer las demostraciones:*

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\ a^2 + b^2 &\neq (a - b)(a + b). \end{aligned}$$

Ejercicios de Taller

Factorizar las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $36x^2 - 25 =$

b) $x^4 - y^4 =$

c) $x^8 - y^4 =$

d) $7m^6 - 16n^{10} =$

5.1.3. Factorización de sumas y diferencias de cubos.

En términos generales, una diferencia o suma de cubos, es una expresión formada por dos términos que pueden tener o no el mismo signo y ambos pueden tener o no raíz cúbica exacta. Las diferencias y sumas de cubos se factorizan en el producto de un binomio por un trinomio de acuerdo a la siguiente regla

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right), \tag{5.2}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right). \tag{5.3}$$

En ambos casos, el primer factor está compuesto de las raíces cúbicas de los términos del miembro izquierdo, el segundo factor se construye a partir de los términos del primer factor, a saber: el cuadrado del primer término más el producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término. Hay que notar el orden de los signos.

Ejemplo 5.7 *Factorizar la diferencia de cubos* $x^3 - y^3$,

Se determinan los términos del primer factor, obteniendo las raíces cúbicas de los términos de la diferencia de cubos. Así la raíz cúbica del primer término es $\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x$ y la raíz cúbica del segundo término es $\sqrt[3]{y^3} = y^{\frac{3}{3}} = y$. Tomamos como referencia (5.2) y se tiene

$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right).$$

Ejemplo 5.8 *Factorizar la suma de cubos* $27m^6 + 8p^{12}$.

Se determinan los términos del primer factor, obteniendo las raíces cúbicas de los términos de la suma de cubos. Así $\sqrt[3]{27m^6} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{m^6} = 3m^{\frac{6}{3}} = 3m^2$ y $\sqrt[3]{8p^{12}} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{p^{12}} = 2p^{\frac{12}{3}} = 2p^4$. Tomamos como referencia (5.3) y se tiene

$$27m^6 + 8p^{12} = \left(3m^2 + 2p^4\right)\left(\left(3m^2\right)^2 - \left(3m^2\right)\left(2p^4\right) + \left(2p^4\right)^2\right) = \left(3m^2 + 2p^4\right)\left(9m^4 - 6m^2p^4 + 4p^8\right).$$

Ejemplo 5.9 *Factorizar la diferencia de cubos* $12x^6 - 64y^5$.

Se determinan los términos del primer factor, obteniendo las raíces cúbicas de los términos de la diferencia de cubos. Así $\sqrt[3]{12x^6} = \sqrt[3]{12}\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{12}x^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{12}x^2$ y $\sqrt[3]{64y^5} = \sqrt[3]{64}\sqrt[3]{y^5} = 4y^{\frac{5}{3}}$. Tomamos como referencia (5.2) y se tiene

$$\begin{aligned} 12x^6 - 64y^5 &= \left(\sqrt[3]{12}x^2 - 4y^{\frac{5}{3}}\right)\left(\left(\sqrt[3]{12}x^2\right)^2 + \left(\sqrt[3]{12}x^2\right)\left(4y^{\frac{5}{3}}\right) + \left(4y^{\frac{5}{3}}\right)^2\right) \\ &= \left(\sqrt[3]{12}x^2 - 4y^{\frac{5}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{12^2}x^4 + 4\sqrt[3]{12}x^2y^{\frac{5}{3}} + 16x^{\frac{10}{3}}\right). \end{aligned}$$

Nota: *Los signos de los factores ya están asignados por (5.2) y (5.3).*

Ejercicios de Taller

Factorizar las siguientes diferencias y sumas de cubos.
a) $a^3 - 64b^3 =$
b) $8x^3y^6 + 27 =$
c) $y^9 + 125 =$
d) $64m^{12} - 8x^3 =$

5.1.4. Factorización de binomios de la forma $x^n \pm y^n$.

Para realizar la factorización de este tipo de binomios es recomendable que n sea impar y mayor que 3. Si el binomio $x^n + y^n$ se divide por el binomio $x + y$ se obtiene como resultado el factor $\left(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 - \cdots x^2y^{n-3} - x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}\right)$ donde el residuo es cero. Por lo cual se puede establecer la regla (5.4).

$$x^n + y^n = (x+y)\left(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 - \cdots x^2y^{n-3} - x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}\right), \quad (5.4)$$

y de la misma forma

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \cdots x^2y^{n-3} + x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}\right). \quad (5.5)$$

Ejemplo 5.10 Factoricemos el binomio $x^7 + y^7$.
De acuerdo al modelo (5.4), el primero factor es $(x + y)$ y el segundo factor es $\left(x^6y^0 - x^5y^1 + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - x^1y^5 + x^0y^6\right)$. Finalmente se tiene

$$\begin{aligned} x^7 + y^7 &= (x+y)\left(x^6y^0 - x^5y^1 + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - x^1y^5 + x^0y^6\right), \\ &= (x+y)\left(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.11 Factoricemos ahora el binomio $x^7 - y^7$.
De acuerdo a la identidad (5.5), el primer factor es $(x - y)$ y el segundo factor es $\left(x^6y^0 + x^5y^1 + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + x^1y^5 + x^0y^6\right)$. Finalmente se tiene

$$\begin{aligned} x^7 - y^7 &= (x-y)\left(x^6y^0 + x^5y^1 + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + x^1y^5 + x^0y^6\right), \\ &= (x-y)\left(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6\right). \end{aligned}$$

Ejercicios de Taller

Factorizar los siguientes binomios.
a) $p^5 + c^5 =$
b) $h^7 - t^7 =$

5.1.5. Factorización de trinomios cuadrados de la forma $ax^2 + bx + c$

Los trinomios cuadrados están compuestos desde luego de la suma de tres términos, un término cuadrático, un término lineal y un término independiente y se pueden factorizar como el producto de

dos binomios como se muestra en la ecuación (5.6).

$$ax^2 + bx + c = (x + \beta)(x + \delta) \tag{5.6}$$

Es de hacer notar que existen trinomios cuadrados que son factorizables y otros que no lo son. Dentro de los que son factorizables hay unos que son trinomios cuadrados perfectos (TCP) y otros que son no perfectos. En los TCP el resultado de la factorización es un producto de dos binomios iguales, mientras que en los trinomios cuadrados no perfectos el resultado de la factorización es el producto de dos binomios diferentes. Habrá algunos trinomios cuadrados que no se puedan factorizar por el método aquí descrito, cuando esto suceda significa una de dos cosas, una es que β y γ son números decimales o la otra que β y δ no existen dentro de los números reales.

Trinomios cuadrados perfectos (TCP)

Los trinomios cuadrados perfectos son aquellos cuya factorización resulta en el producto de dos binomios iguales, y por tanto puede ser representado como un binomio al cuadrado.

Ejemplo 5.12 *Factorizar el trinomio* $-6x + 9 + x^2$.

Para factorizar un trinomio cuadrado es recomendable acomodar los términos de mayor a menor grado, así pues podemos reescribir el trinomio en la forma $x^2 - 6x + 9$. Después se buscan los factores adecuados que deberán ir en los binomios.

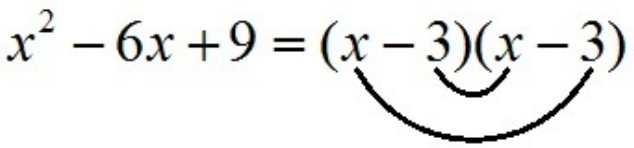


Figura 5.1. Factorización de un TCP.

Finalmente se debe comprobar que la factorización sea correcta, para esto, el término cuadrático x^2 debe resultar de la multiplicación de los términos izquierdos de los binomios. El término independiente $+9$ debe resultar de la multiplicación de los términos derechos de los binomios considerando sus signos. Por último el término lineal $-6x$ debe resultar de la suma del producto de los términos medios más el producto de los términos de los extremos como lo muestra la Figura 5.1.

Ejemplo 5.13 *Factorizar el trinomio* $-\frac{4}{3}x + x^2 + \frac{4}{9}$.

Si acomodamos los términos de mayor a menor grado, se tiene $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$, y buscamos los factores adecuados para los binomios resultantes de la factorización, como se muestra en la Figura 5.2.

Finalmente se debe comprobar que la factorización sea correcta, para esto, el término cuadrático x^2 debe resultar de la multiplicación de los términos izquierdos de los binomios. El término independiente $+\frac{4}{9}$ debe resultar de la multiplicación de los términos derechos de los binomios considerando sus signos.

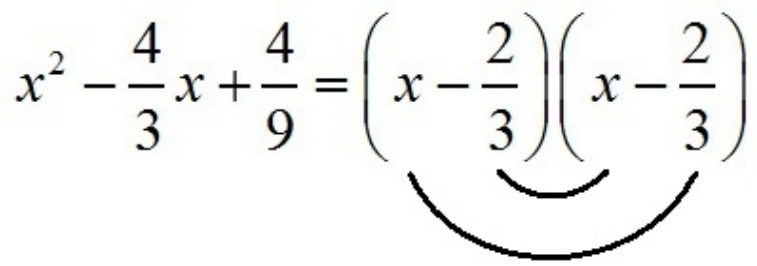


Figura 5.2. Factorización de un TCP.

Por último el termino lineal $-\frac{4}{3}x$ debe resultar de la suma del producto de los términos medios más el producto de los términos de los extremos como lo muestra la Figura 5.2.

Nota: *La factorización de un TCP resulta en la factorización de dos binomios iguales, por lo que un TCP puede ser representado como un binomio al cuadrado. Así el Ejemplo 5.12 se pueden representar como* $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ y el Ejemplo 5.13 como $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$.

Trinomios cuadrados no perfectos

Los trinomios cuadrados no perfectos son aquellos cuya factorización resulta en el producto de dos binomios diferentes, y no puede ser representados como un binomio al cuadrado.

Ejemplo 5.14 *Factorizar el trinomio* $-8x - 8 + 6x^2$.

Acomodamos los términos de mayor a menor grado y se tiene $6x^2 - 8x - 8$, y buscamos los factores adecuados quedando la factorización como se muestra en la Figura 5.3.

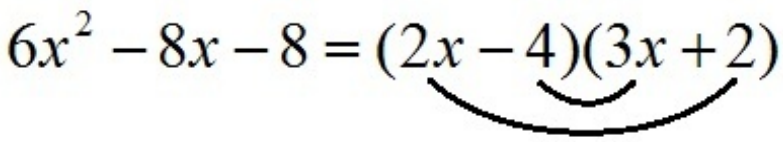


Figura 5.3. Factorización de un trinomio cuadrado no perfecto.

Ejemplo 5.15 *Factorizar el trinomio* $2x + \frac{3}{8} + 2x^2$.

Primero se acomodan los términos en grado descendente, así se tiene el trinomio $2x^2 + 2x + \frac{3}{8}$, enseguida se buscan los factores adecuados de los binomios resultantes de la factorización como se ve en la Figura 5.4.

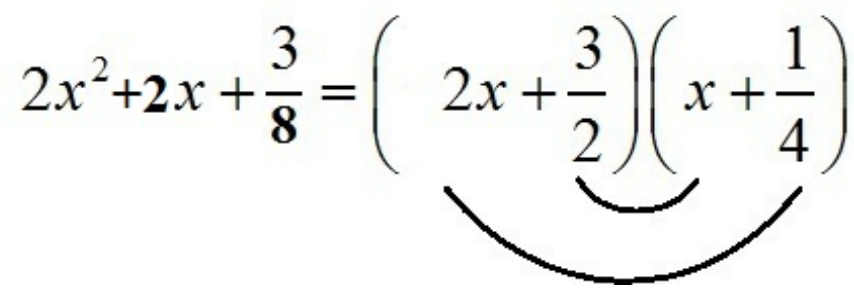


Figura 5.4. Factorización de un trinomio cuadrado no perfecto.

Finalmente se debe comprobar que la factorización sea correcta, para esto, el término cuadrático $-2x^2$ debe resultar de la multiplicación de los términos izquierdos de los binomios. El término independiente $+\frac{3}{8}$ debe resultar de la multiplicación de los términos derechos de los binomios considerando sus signos. Por último el término lineal $+x$ debe resultar de la suma del producto de los términos medios más el producto de los términos de los extremos como lo muestra la Figura 5.4.

Ejemplo 5.16 (Trinomio no factorizable) Como se mencionó con anterioridad, algunos trinomios cuadrados no son factorizables, como por ejemplo $x^2 + 12x - 1$ ó $x^2 + x + 2$. Se deja como ejercicio intentar la factorización de estos trinomios.

Ejercicios de Taller (Trinomios cuadrados perfectos)

Factorizar los siguientes trinomios.
a) $9 + x^2 + 6x =$
b) $x^2 + 4 - 4x =$
c) $x^2 - 10x + 25 =$
d) $x^2 + 10x + 25 =$

Ejercicios de Taller (Trinomios cuadrados no perfectos)

Factorizar los siguientes trinomios.
a) $-6 + x^2 + x =$
b) $x^2 + 20 - 9x =$
c) $x^2 + 6x + 8 =$
d) $x^2 + 6x + 5 =$

Ejercicios de Tarea

1. Factorice los siguientes polinomios.
a) $6x^5y^5 + \sqrt{2}x^2y^3 + 14xy^3 =$
b) $3a^2b^3 - 3\sqrt{2}a^4b^2 + 9a^2b =$
c) $xyz^3 - xy^3z + x^3yz =$

d) $x^3 + 2x + x^2 + 2 =$
e) $2p^3 - p^2 - 1 =$

2. Factorice los siguientes binomios.
a) $a^2 - 4b^2 =$
b) $4x^2y^2 - 1 =$
c) $49x^2 - 64y^2 =$
d) $x^6 + y^6 =$
e) $y^6 - 1 =$
f) $1 - m^3 =$

3. Factorice los siguientes polinomios.
a) $x^2 - 5x + 6 =$
b) $x^2 - 10x + 24 =$
c) $y^2 + 7y + 10 =$
d) $y^4 + 10y^2 + 21 =$
e) $x^4 - 3x^2 - 4 =$
f) $x^2 + 4x - 12 =$
g) $r^2 + 2r + 1 =$
h) $r^2 + 5r - 14 =$
i) $x^2 - xy - 2y^2 =$
j) $x^2 - 4xy + 3y^2 =$
k) $r^2 - 8rt + 16t^2 =$
l) $9m^2 - 6mn + n^2 =$
m) $2p^2 + 7p + 5 =$
n) $8q^2 + 2q - 3 =$
ñ) $10b^4 - 23b^2 + 12 =$
o) $2x^2 - 7xy + 3y^2 =$
p) $6a^4 + 13a^2 - 15 =$
q) $-3x^2 - 5xy + 12y^2 =$
r) $3m^2 + 8h^3 =$
s) $25h^4 - 7x^3 =$

4. Factorice los siguientes polinomios.
a) $(x^2 + 1)^3 + (y^2 - 1)^3 =$
b) $(4 - x^2)^3 - (4 - y^2)^3 =$
c) $x(x - y) + y(y - x) =$
d) $x(x - y) - y(y - x) =$
e) $(1 - x^2)^3 - (1 - y^2)^3 =$
f) $(x^2 - 4)^3 + (4 - y^{23}) =$
g) $1 - 256m^2 =$

h) $r^8 - 6561 =$
i) $x^6 - 7x^3 - 8 =$
j) $m^{10} - 5m^5 + 6 =$
k) $r^3s^3 - 8t^3 =$
l) $25c^2d^2 - x^2y^4 =$
m) $p^3 - pq^2 - p^2q - q^3 =$
n) $4x^2 + 7xy - 2y^2 =$
ñ) $36x^2 + 12xy + y^2 =$

5. Factorice las siguientes expresiones.
a) $x^2 - 13 =$
b) $2m^2 - 1 =$
c) $5m^2 - 1 =$
d) $\frac{1}{4}a^2 - b^2 =$
e) $x^2 + x + \frac{1}{4} =$
f) $m^2 - \frac{2}{5}m + \frac{1}{25} =$
g) $3m^2 - 4r^2 =$
h) $24 - n^2 =$
i) $x^2 - 2\sqrt{2}xy + 2y^2 =$
j) $p^{11} - q^{11} =$

Capítulo 6

Expresiones racionales

El cociente de dos polinomios puede o no ser un polinomio y se conoce como *expresión racional*. Algunos ejemplos de expresiones racionales son las siguientes:

a) $\dfrac{6x^2+8x+3}{2x+2}$

b) $\dfrac{-3x^5+8}{x+4}$

c) $\dfrac{\frac{1}{4}xy+8y+6}{y^2+xy}$

6.1. Simplificación de expresiones racionales

La simplificación de expresiones racionales se realiza mediante la aplicación de sus propiedades y la factorización de los polinomios.

Para cualquiera de los polinomios A, B, C y D. Las propiedades son las siguientes:

Propiedad	
Cancelación	$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{A}{B}; C\neq 0$
Suma o Resta	$\dfrac{A}{B}\pm\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD\pm CB}{BD}$
Multiplicación	$\dfrac{A}{B}\cdot\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$
División	$\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD}{BC}$

Ejemplo 6.1 *Simplificar la siguiente expresión* $\dfrac{x^2-25}{x+5}$.

El polinomio en el numerador corresponde a una diferencia de cuadrados que se factoriza de la siguiente forma: $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

Por lo que la expresión se puede escribir como

$$\frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)}.$$

Finalmente aplicando la propiedad de cancelación se tiene que

$$\frac{(\mathbf{x+5})(x-5)}{(\mathbf{x+5})} = (x-5)$$

Ejemplo 6.2 *Simplificar la siguiente expresión* $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-9}$.

Para simplificar se factorizan ambos polinomios. La factorización del numerador es $x^2-8x+15 = (x-3)(x-5)$. *Mientras que el denominador se factoriza como* $x^2-9 = (x-3)(x+3)$. *Sustituyendo y aplicando la propiedad de cancelación se tiene*

$$\frac{(\mathbf{x-3})(x-5)}{(\mathbf{x-3})(x+3)} = \frac{x-5}{x+3}.$$

Ejemplo 6.3 *Simplificar la siguiente expresión* $\dfrac{x^3-8}{-6x+12}$.

El numerador es una diferencia de cubos por lo que su factorización es $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$. En el denominador se factoriza el -6, resultando $-6x+12 = -6(x-2)$. Sustituyendo y aplicando la propiedad de cancelación la expresión queda

$$\frac{(\mathbf{x-2})(x^2+2x+4)}{-6(\mathbf{x-2})} = \frac{(x^2+2x+4)}{-6} = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Nótese que el resultado del cociente es un polinomio.

Ejemplo 6.4 *Simplificar la siguiente expresión*

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2-2x+1}.$$

Las factorizaciones son las siguientes:

Para el numerador :$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$.

El denominador es un TCP por lo que: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.
Sustiyuyendo y aplicando las propiedades se tiene

$$\frac{(2x+1)(\mathbf{x-1})}{(x-1)(\mathbf{x-1})} = \frac{2x+1}{x-1}.$$

Ejercicios de Taller

Simplifique las siguientes expresiones racionales:

a) $\dfrac{x+7}{x^2-49} =$

b) $\dfrac{p^2+3p+2}{p^2+6p+8} =$

c) $\dfrac{x^3-9x}{x^3-6x^2+9x} =$

d) $\dfrac{x^2-9}{x^3+27} =$

6.2. Mínimo Común Múltiplo (m.c.m)

Algunas veces para efectuar operaciones con expresiones racionales es necesario obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo 6.5 *Encuentre el mínimo común múltiplo de los denominadores de las siguientes expresiones* $\dfrac{1-x}{x^2}; \dfrac{x+5}{x^2-4}; \dfrac{2}{(x+2)^2}$

Los denominadores de las expresiones son: $x^2; x^2-4; (x+2)^2$
Los factores para cada uno son: $xx; (x+2)(x-2); (x+2)(x+2)$
Por lo que el m.c.m es: $xx(x+2)(x-2)(x+2) = x^2(x+2)^2(x-2)$

Ejemplo 6.6 *Encuentre el mínimo común múltiplo de los denominadores de las siguientes expresiones* $\dfrac{5}{x^2+3x}; \dfrac{x-2}{(x-3)^3}; \dfrac{4}{x^3}$

Los denominadores de las expresiones son: $x^2+3x; (x-3)^3; x^3$
Los factores para cada uno son: $x(x+3); (x-3)(x-3)(x-3); xxx$
Por lo que el m.c.m es:$x(x+3)(x-3)(x-3)(x-3)xx = x^3(x+3)(x-3)^3$

Ejercicios de Taller

Determine el mínimo común múltiplo (m.c.m)

a) $\dfrac{1}{(r+2)^2(r+3)}; \dfrac{1}{(r+3)^3(r+2)}$

b) $\dfrac{1}{x^2+x+2};\ \dfrac{4}{x+2}$

c) $\dfrac{1}{x^2-10x+25};\ \dfrac{x}{x^2-25};\ \dfrac{1}{x^2+10x+25}$

d) $\dfrac{p}{p+r};\ \dfrac{r}{p^2+2pr+r^2};\ \dfrac{1}{p^3+r^3}$

6.3. Operaciones con expresiones racionales

6.3.1. Suma

Ejemplo 6.7 *Realice la siguiente suma* $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{5}{x-2}$.

Debe identificarse el mínimo común múltiplo y emplearlo como común denominador

$$\frac{x}{x+2}+\frac{5}{x-2}=\frac{x(x-2)+5(x+2)}{(x+2)(x-2)},$$

al desarrollar los productos se tiene

$$\frac{x(x-2)+5(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-2x+5x+10}{x^2-4}=\frac{x^2+3x+10}{x^2-4}.$$

Ejemplo 6.8 *Realice la siguiente suma* $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x^2+4x+4}$.

El mínimo común múltiplo (m.c.m) es: $(x-2)(x+2)^2$. La operación se desarrolla de la siguiente forma

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{(x+2)(x+2)}=\frac{x(x+2)+(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+2)}=$$

$$\frac{x^2+2x+x-2}{(x-2)(x+2)^2}=\frac{x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

6.3.2. Resta

Ejemplo 6.9 *Realice la siguiente resta* $\dfrac{6x}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x-1}$.

El m.c.m es $(x-1)(x+1)$.

La operación se desarrolla como sigue

$$\frac{6x-(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{6x-(x^2-x-2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{6x-x^2+x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{-x^2+7x+2}{x^2-1}.$$

Ejemplo 6.10 *Realice la siguiente resta* $\dfrac{x+5}{2x}-\dfrac{x}{x+8}$.

El m.c.m es $(2x)(x+8)$.
La operación se desarrolla como sigue

$$\frac{(x+5)(x+8)-x(2x)}{2x(x+8)}=\frac{x^2+13x+40-2x^2}{2x(x+8)}=\frac{-x^2+13x+40}{2x^2+16x}.$$

Ejercicios de Taller

Realice las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{6x}{2x+2}+\dfrac{6}{2x+2}=$

b) $\dfrac{p}{p-q}+\dfrac{p}{q-p}=$

c) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x^2+1}{x^2+4x+3}=$

d) $\dfrac{q}{q-p}-\dfrac{p}{q+p}=$

e) $\dfrac{5a}{5a-1}-\dfrac{1}{1-5a}=$

f) $\dfrac{3}{a-2}-\dfrac{6}{a^2-4}=$

6.3.3. Multiplicación

Ejemplo 6.11 *Realice el siguiente producto* $\left(\dfrac{x^2y}{x+5}\right)\left(\dfrac{y+3}{y}\right)$.

Aplicando las propiedades de multiplicación y distributiva resulta

$$\frac{x^2y(y+3)}{(x+5)y}=\frac{x^2y^2+3x^2y}{xy+5y}.$$

Ejemplo 6.12 *Realice la siguiente multiplicación* $\left(\dfrac{x+9}{x^2}\right)\left(\dfrac{x}{x^2-81}\right)$.

Aplicando las propiedades necesarias se obtiene

$$\frac{(x+9)x}{x^2(x^2-81)} = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{x+9})}{(\mathbf{x})(x)(\mathbf{x+9})(x-9)} = \frac{1}{x(x-9)} = \frac{1}{x^2-9x}.$$

Ejemplo 6.13 *Realice la siguiente multiplicación* $\left(\frac{r^2+2r-15}{r+2}\right)\left(\frac{8}{r+5}\right)$.

Aplicando las propiedades y las factorizaciones necesarias se obtiene

$$\frac{8(r^2+2r-15)}{(r+2)(r+5)} = \frac{8(r-3)(\mathbf{r+5})}{(r+2)(\mathbf{r+5})} = \frac{8(r-3)}{(r+2)} = \frac{8r-24}{r+2}.$$

Ejercicios de Taller

Realizar los siguientes productos de expresiones racionales

a) $\left(\frac{x+4}{x+3}\right)\left(\frac{x-2}{x+5}\right) =$

b) $\left(\frac{a^2+a}{a^2-1}\right)\left(\frac{a+1}{a^2}\right) =$

c) $\left(x^2-2x+1\right)\left(\frac{x+1}{x^3-1}\right) =$

d) $-\left(\frac{2p+8}{p-1}\right)\left(\frac{p+4}{2p}\right) =$

e) $(5x+2)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x+1}{x^2}\right) =$

6.3.4. División

Ejemplo 6.14 *Realice la siguiente división* $\frac{p+1}{p+2} \div \frac{p+1}{p+5}$.

Aplicando las propiedades se obtiene

$$\frac{(\mathbf{p+1})(p+5)}{(p+2)(\mathbf{p+1})} = \frac{p+5}{p+2}.$$

Ejemplo 6.15 *Realice la siguiente división* $\frac{x^4+4x^2+4}{x+2} \div \frac{4-x^4}{5}$.

Aplicando las propiedades de las expresiones racionales la división queda como

$$\frac{(x^4+4x^2+4)(5)}{(4-x^4)(x+2)} = \frac{(\mathbf{x^2+2})(x^2+2)(5)}{(\mathbf{2+x^2})(2-x^2)(x+2)} = \frac{(x^2+2)(5)}{(2-x^2)(x+2)} = \frac{5x^2+10}{-x^3-2x^2+2x+4}.$$

Ejemplo 6.16 *Realice la siguiente división* $\dfrac{x^2+xy+y^2}{\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}}$.

Se factoriza el numerador y se efectua la resta del denominador

$$\frac{x^2+xy+y^2}{\frac{x^3-y^3}{xy}}=\frac{xy(x^2+xy+y^2)}{x^3-y^3},$$

factorizando la diferencia de cubos de la expresión se tiene

$$\frac{xy(\mathbf{x^2}+\mathbf{xy}+\mathbf{y^2})}{(x-y)(\mathbf{x^2}+\mathbf{xy}+\mathbf{y^2})}=\frac{xy}{x-y}.$$

Ejercicios de Taller

Resolver las siguientes divisiones de expresiones racionales.

a) $\left(\dfrac{3w+1}{w-4}\right)\div\left(\dfrac{2w+1}{w}\right)=$

b) $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}\right)\div\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)=$

c) $\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\right)\div\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)=$

d) $\dfrac{\frac{a}{a-1}-\frac{a+1}{a}}{1-\frac{a}{a-1}}=$

Ejercicios de Tarea

1. Determine el mínimo común múltiplo (m.c.m) de las siguientes expresiones racionales.

a) $\dfrac{5}{v^2+2v+1};\ \dfrac{v}{v^2-3v-4}$

b) $\dfrac{10}{b^3+b^2-6b};\ \dfrac{1}{b^2(b-6)};\ \dfrac{b}{b-2}$

c) $\dfrac{1}{m^2+m};\ \dfrac{m}{m^2+2m+1};\ \dfrac{1}{m^2-1}$

d) $\dfrac{1}{x^3-x^2};\ \dfrac{x}{x^2-1};\ \dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$

2. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=$

b) $(2x)(x-1)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(x^2)=$

c) $\dfrac{1}{u^{-1}+v^{-1}} =$

d) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+6x+8} =$

e) $\dfrac{x^2-9}{x^3+27} =$

f) $\dfrac{v^4+4v^2+4}{4-v^4} =$

g) $\dfrac{3x^2-7x-20}{2x^2-5x-12} =$

h) $\dfrac{w^3-9w}{w^3-6w^2+9w} =$

i) $\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2} =$

3. Combine y simplifique la expresión:

a) $\dfrac{4x}{4x+5}+\dfrac{5}{4x+5} =$

b) $\dfrac{3}{s-2}+\dfrac{4}{2-s} =$

c) $\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{5}{x^2-1} =$

d) $\dfrac{b}{2b+1}-\dfrac{2b}{b-2} =$

e) $\dfrac{2}{r^2-r-12}+\dfrac{r}{r+3} =$

f) $\dfrac{z}{2z+3}-\dfrac{3}{4z^2-3z-1}+\dfrac{4z+1}{2z^2+z-3} =$

g) $\left(\dfrac{t-4}{t+3}\right)\left(\dfrac{t+5}{t-2}\right) =$

h) $\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\right)\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right) =$

i) $\left(\dfrac{6x+5}{3x+3}\right)\left(\dfrac{x+1}{6x^2-7x-10}\right) =$

j) $-\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)\left(\dfrac{x^2+x-12}{3+2x-x^2}\right) =$

k) $\dfrac{3w+1}{w-4}\div\dfrac{2w+1}{w} =$

l) $\dfrac{x}{x+4}\div\dfrac{x+5}{x} =$

m) $\dfrac{s^2-5s+6}{s^2-7s+10}\div\dfrac{2-s}{s+2} =$

n) $\dfrac{x}{x+y} \div \dfrac{y}{x+y} =$

4. Simplifique las siguientes expresiones racionales:

a) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - x}{\frac{1}{x^2} + x} =$

b) $\dfrac{\frac{1}{s} + \frac{1}{t}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{t}} =$

c) $\dfrac{\frac{1+r}{r} + \frac{r}{1-r}}{\frac{1-r}{r} + \frac{r}{1-r}} =$

d) $\dfrac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} =$

e) $\dfrac{a+b}{a^{-1} + b^{-1}} =$

f) $\dfrac{u^{-2} - v^{-2}}{u^2 + v^2} =$

g) $\dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{y}}} =$

h) $\dfrac{v}{\sqrt{z}} - \dfrac{z}{\sqrt{v}} =$

Apéndice A

Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ingeniería, Campus Mexicali.
Examen Diagnóstico de Aritmética

Instrucciones. Responda correctamente lo que se pide en cada reactivo sin el uso de calculadora. Auxíliese del material audiovisual del sitio web YouTube: buscar nuestro canal de nombre C*urso Propedeutico UABC*, en la lista de reproducción de nombre *Conocimientos básicos*

1. Realice la siguiente operación $3+2-10+4-1=$
   $A)-2 \quad B)-5 \quad C)\ 2 \quad D)\ 5$
2. Realice la siguiente operación $4+10\div 2-3\times 5+7$
   $E)\ 27 \quad F)\ -27 \quad G)\ 1 \quad H)\ 8$
3. De los siguientes números: 0, 1/2, −1,5, −2, ¿cuál es el menor?
   $A)\ 0 \quad B)\ 1/2 \quad C)\ -1{,}5 \quad D)-2$
4. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene la misma fracción sombreada que el rectángulo de la figura 1?

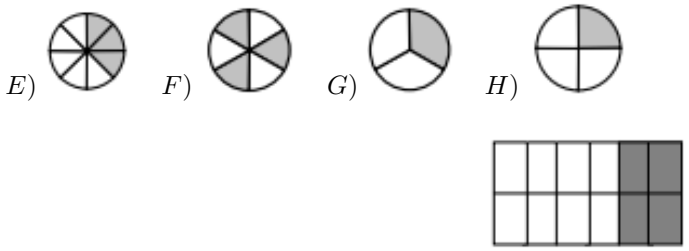


Figura 1: Problema 4.

5. ¿Cuál de las siguientes relaciones es correcta?
   $A)\ \frac{3}{7}>\frac{7}{3} \quad B)\ \frac{1}{3}<\frac{1}{4} \quad C)\ \frac{-2}{5}>0 \quad D)\ 0<\frac{1}{20}$
6. Realice la operación $2(3)^2+4(-2)=$
   $E)\ 10 \quad F)$ -44 $\quad G)\ 4 \quad H)\ 28$
7. Realice la operación $\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=$
   $A)\ \frac{3}{-8} \quad B)\ \frac{8}{3} \quad C)\ \frac{1}{6} \quad D)\ \frac{3}{5}$
8. Resolver para x de la siguiente ecuación: $(2x-3)^2=49$
   $E)\ 7 \quad F)\ 7.5 \quad G)\ 4 \quad H)\ 5$
9. Si un alumno obtiene una calificación aprobatoria en 2 de cada 7 examenes, ¿cuántas calificaciones aprobatorias puede esperar obtener en 28 examenes?
   $A)\ 4 \quad B)\ 14 \quad C)\ 8 \quad D)\ 7$
10. Si una secretaria puede mecanografiar 5 páginas de texto en 3 minutos ¿cuántas paginas puede procesar en 1 hora?
    $E)\ 15 \quad F)\ 100 \quad G)\ 180 \quad H)\ 300$
11. ¿Que porcentaje del círculo está sombreado?

$A)\ 16\,\% \quad B)\ 25\,\% \quad C)\ 30\,\% \quad D)\ 40\,\%$

12. Usualmente 6 de los 28 pacientes citados para un día cualquiera faltan a su cita. ¿Aproximadamente que porcentaje de los paciente asiste en un día?

    E) 22 % *F*) 85 % *G*) 79 % *H*) 100 %

13. El largo de un rectánculo es 3 pies mayor que su ancho. Si L representa su largo, ¿cuál de las siguientes expresiones representa su ancho?

    A) $\frac{L}{3}$ *B*) $L-3$ *C*) $3L$ *D*) $L+3$

14. Realice la sigueinte operación $\frac{3}{5}+2\frac{3}{4}=$

    E) $\frac{70}{20}$ *F*) $\frac{67}{20}$ *G*) $\frac{54}{20}$ *H*) $\frac{3}{20}$

15. Realice la operación $\left(\frac{3}{8}\right)\left(1\frac{3}{2}\right)=$

    A) $\frac{15}{16}$ *B*) $\frac{3}{16}$ *C*) $\frac{8}{16}$ *D*) $\frac{9}{16}$

16. Realice la operación $\left(\frac{9}{5}\right)\left(\frac{3}{6}\right)=$

    E) $\frac{9}{10}$ *F*) $\frac{27}{16}$ *G*) $\frac{5}{16}$ *H*) $\frac{1}{2}$

17. Realice la operación $\frac{6}{8}\div\frac{4}{7}=$

    A) $3\frac{1}{4}$ *B*) $\frac{21}{16}$ *C*) $\frac{13}{23}$ *D*) $\frac{24}{56}$

18. Realice la operación $1\frac{5}{7}\div\frac{-5}{6}=$

    E) $2\frac{3}{4}$ *F*) 3 *G*) $\frac{-6}{7}$ *H*) $\frac{3}{7}$

TRIGONOMETRÍA

CAPÍTULO 7. TRIGONOMETRÍA, ÁNGULOS Y SU MEDICIÓN 38
7.1 MEDICIÓN DE ÁNGULOS
7.2 CONVERSIÓN ENTRE RADIANES Y GRADOS

CAPITULO 8. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS 44
8.1 LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO GENERAL
8.2 LAS FUNCIONES RECÍPROCAS
8.3 ÁNGULOS ESPECIALES (30,45,60 Y 90 GRADOS)

CAPITULO 9. APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA A TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS 51
9.1 TRIGONOMETRÍA DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO
9.2 APLICACIONES

CAPÍTULO 10. LEY DE SENOS Y COSENOS 62
10.1 LA LEY DE LOS SENOS
10.2 LA LEY DE LOS COSENOS

GEOMETRÍA

CAPÍTULO 11. GEOMETRÍA, EL PLANO CARTESIANO 67
11.1 CONCEPTOS BÁSICOS
11.2 FÓRMULAS DE LA DISTANCIA Y PUNTO MEDIO

CAPÍTULO 12. LA LÍNEA RECTA 70
12.1 PENDIENTE DE UNA RECTA
12.2 ECUACIÓN DE LA RECTA
12.3 GRAFICACIÓN POR PARÁMETROS

CAPÍTULO 13. SECCIONES CÓNICAS 79
13.1 SECCIONES CÓNICAS
13.2 CÍRCULOS
13.3 CIRCUNFERENCIA
13.4 ELIPSE
13.5 PARÁBOLA
13.6 HIPÉRBOLA

CAPÍTULO 14. PERÍMETRO, ÁREA Y VOLUMEN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS 90

APÉNDICE A. VALORES A UTILIZAR PARA FUNCIONES TRIGONOMËTRICAS 130

BIBLIOGRAFÍA 132

CAPÍTULO 7
TRIGONOMETRÍA, ÁNGULOS Y SU MEDICIÓN

7.1 MEDICIÓN DE ÁNGULOS

[1]Un ángulo es la figura formada por dos líneas o rayos con un extremo común. A este punto común se le llama vértice del ángulo (Véase la figura 1).

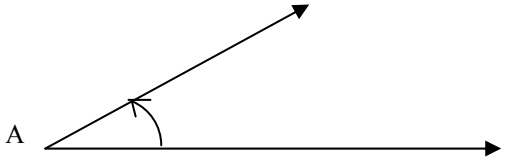


Figura 1. A es el vértice. A este ángulo se le llama ángulo A (a menudo se escribe $\angle A$).

Consideramos conveniente hablar de los ángulos desde un punto de vista dinámico. Analizaremos los ángulos en función de la magnitud y de la orientación; es decir, tomaremos las dos líneas que forman el ángulo como coincidentes (que comienzan juntas). Un lado permanece fijo y el otro lado gira para formar el ángulo. El lado fijo se denomina lado inicial y el lado que gira se llama lado terminal.

Cuando el lado terminal gira en la dirección contraria a las manecillas del reloj (como lo indica la flecha dentro del ángulo en la figura 2(a)), a $\angle B$ se le llamará un ángulo positivo. Si el lado terminal gira en la dirección de las manecillas del reloj (como se indica con la flecha dentro del ángulo de la figura 2(b)), a $\angle B$ se le llamará un ángulo negativo.

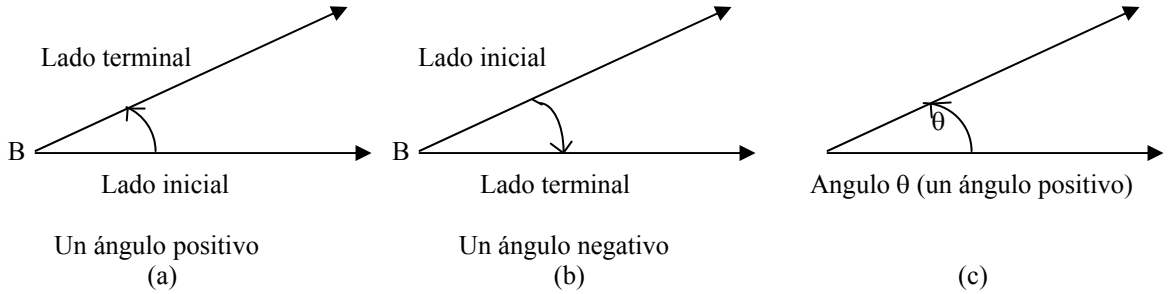


Figura 2

Además de nombrar a un ángulo por su vértice, a menudo colocamos una letra dentro del ángulo y lo utilizamos como su nombre. Por ejemplo, en la figura 2(c) se muestra el ángulo θ (la letra griega theta, un nombre común para un ángulo). Algunas otras letras griegas que se utilizan con frecuencia para nombrar a los ángulos son α (alfa), β (beta) y γ (gamma).

Si le pidiéramos a un niño pequeño que mirara los dos ángulos de la figura 3 y que nos dijera cuál es "más grande", el niño probablemente nos respondería que $\angle A$ es mayor, pero nosotros sabemos que $\angle B$ es mayor. ¿Qué significa que $\angle B$ sea mayor que $\angle A$? ¿Qué cualidad tratamos de medir en un ángulo cuando medimos su magnitud? Después de reflexionar un poco, llegaremos a la conclusión de que cuando medimos un ángulo tratamos de responder la siguiente pregunta: ¿Qué parte de la rotación total ha recorrido el lado terminal? Cuanto más haya girado el lado terminal, mayor será el ángulo.

[1] Arthur Goodman / Lewis Hirsch. ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. Primera Edición. Editorial Prentice Hall.

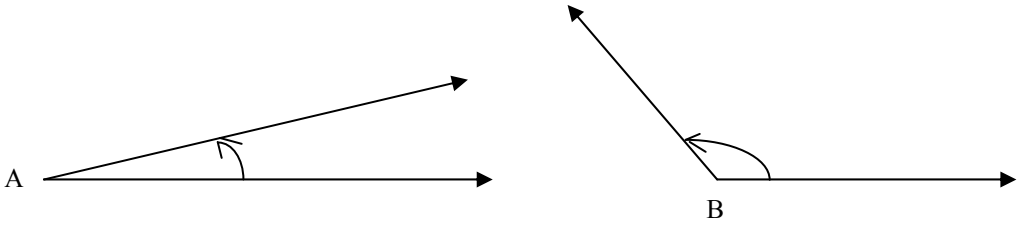


Figura 3

Cuando medimos un ángulo, tratamos de asignarle un número que indique la magnitud de éste. Cuanto mayor sea el ángulo (es decir, cuanto más haya de una rotación completa), el número deberá ser mayor. Si pensamos en el ángulo de la figura 4 como una rotación completa, podríamos asignarle el número 1.

Así podemos obtener de forma "natural" los ángulos y sus asignaciones numéricas que se muestran en la figura 5.

Figura 4 Una rotación completa

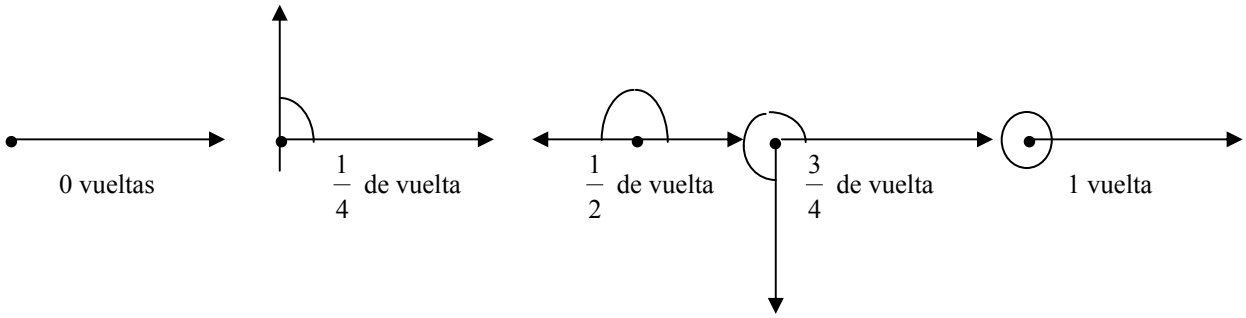


Figura 5 Posibles asignaciones numéricas para distintos ángulos

Sin embargo, éstos no son los números que la mayoría de nosotros estamos acostumbrados a utilizar cuando medimos los ángulos. Estamos familiarizados con el empleo de medidas en grados para describir el tamaño de un ángulo.

La utilización de las medidas en grados simplemente significa que en lugar de asignarle el número 1 a una rotación completa, le asignamos 360; es decir, dividimos una rotación completa en 360 partes iguales. Por lo tanto, un grado (que se escribe 1°) es $\frac{1}{360}$ *de una rotación completa.*

Podemos regresar ahora a dibujar la figura 5 e incluir las medidas en grados de los distintos ángulos. (Véase la figura 6).

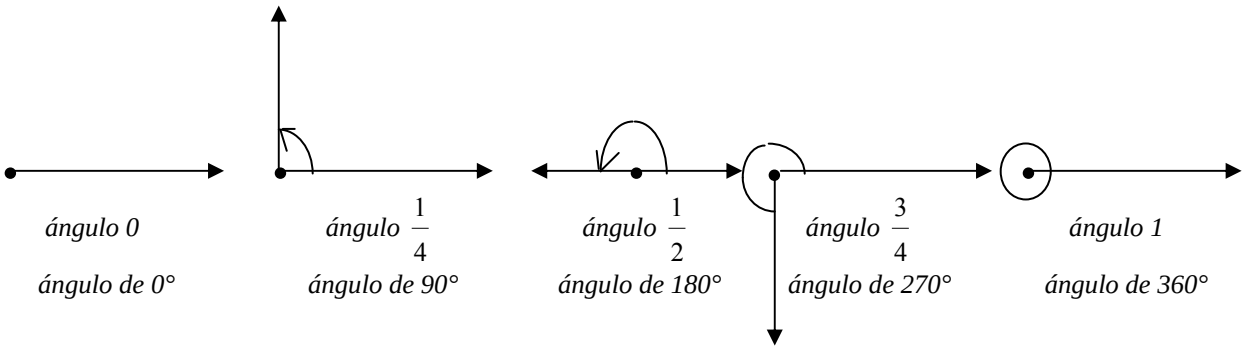


Figura 6 Posibles asignaciones numéricas para distintos ángulos

De manera análoga, podemos dibujar un ángulo de $\frac{2}{3}$ *de una rotación completa. Véase la figura 7. Fácilmente podemos calcular que la medida en grados de este ángulo es* $\frac{2}{3}(360°) = 240°$.

Figura 7 Un ángulo de $\frac{2}{3}$ *de una rotación completa, que equivale a 240°*

Observe que no existe razón por la cual el ángulo no pueda ser mayor que una rotación completa; es decir, mayor de 360°. Por ejemplo, un ángulo de 400° se vería como el que se presenta en la figura 8.

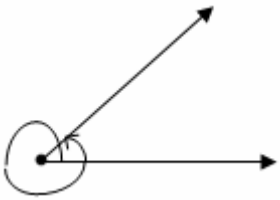


Figura 8 Un ángulo de 400°

Hay que recordar que la división de una rotación completa en 360 partes iguales es totalmente arbitraria. En teoría, pudimos de igual manera haber dividido una rotación completa en 500 partes iguales (en cuyo caso cada parte sería más pequeña que 1°).

Conforme avancemos en nuestro estudio de la trigonometría, veremos que aunque la medición en grados tiene la ventaja de que nos es familiar, existen una gran cantidad de razones por las cuales la medición en grados no es adecuada para gran parte de las tareas matemáticas y científicas. Podremos hablar un poco más acerca de esta "insuficiencia" después de introducir un procedimiento distinto para asignarles números a los ángulos con el fin de indicar su tamaño. Esto nos llevará a una unidad alternativa para medir los ángulos, que se acercan mucho más a las unidades "naturales" que vimos en la figura 5.

Consideremos un ángulo θ y dibujemos un círculo de radio r con el vértice de θ en su centro 0. Sea s la longitud del arco del círculo interceptado por $\angle\theta$. Véase la figura 9.

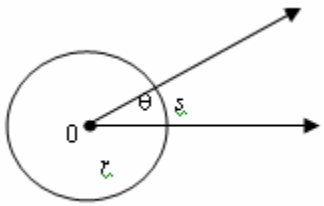


Figura 9

La geometría básica nos dice que el ángulo central θ es la misma parte fraccionaria de una rotación completa como s lo es de la circunferencia del círculo. Por ejemplo, si θ es $\frac{1}{4}$ de una rotación completa, entonces s será $\frac{1}{4}$ de la circunferencia. (Hay que recordar que la fórmula para la circunferencia C de un círculo es $C = 2\pi r$.)

En otras palabras, podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{\theta}{(1 \text{ rotación completa})} = \frac{s}{(\text{circunferencia del círculo})} = \frac{s}{2\pi r}$$

Si utilizamos esta razón de $\frac{s}{2\pi r}$ para medir θ, obtenemos exactamente el número que vimos en la figura 5. Sin embargo, por motivos que serán obvios conforme avancemos, modificamos esta razón al multiplicarla por 2π. Observe que esto no altera el hecho de que la razón sigue reflejando el tamaño del ángulo. Así, a esta razón se le llama medida de un ángulo en radianes.

La medida en radianes de un ángulo θ está definida como $\theta = \frac{s}{r}$, donde θ, s y r están descritas en la figura 9. De este modo, un ángulo de 90°, que es $\frac{1}{4}$ de una rotación completa, subtiende (corta) un arco s que es $\frac{1}{4}$ de la circunferencia del círculo. Véase la figura 10.

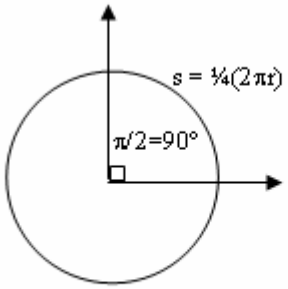


Figura 10 Un ángulo de 90° = $\pi/2$ radianes

Por lo tanto, tenemos $s = \frac{1}{4}(2\pi r) = \frac{\pi r}{2}$.

La medida en radianes de θ es entonces: $\theta = \frac{s}{r} = \frac{\frac{\pi r}{2}}{r} = \frac{\pi r}{2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\pi}{2}$

Observe que este resultado es independiente de r.

En consecuencia, 90° = $\frac{\pi}{2}$ radianes; si multiplicamos este resultado por 2, nos da 180° = π radianes

Hay que aclarar varios puntos importantes. Primero, hay que tener en mente que no estamos diciendo que los números 180 y π sean iguales, al igual que el hecho de que 36 pulgadas son iguales a 3 pies no significa que los números 3 y 36 sean iguales. Como número, π es aproximadamente igual a 3.14 (hay que recordar que π es irracional). Lo que estamos diciendo es que un ángulo que mide π radianes es del mismo tamaño que un ángulo que mide 180°, de la misma manera en que podríamos decir que una mesa que mide 2 metros de largo tiene la misma longitud que una mesa que mide 6.56 pies. Si utilizamos una medición en grados, una rotación completa es de 2π radianes.

Segundo, es importante reconocer que la medida en radianes de un ángulo es un número real que no va acompañado de unidades. En la definición $\theta = \frac{s}{r}$, tanto s como r deben ser medidos en las mismas unidades de longitud. Por ejemplo, si s = 6 cm y r = 3 cm, entonces
θ = 6 cm /3 cm = 2. El número 2 no tiene unidades. Así, un ángulo de 2 (radianes) significa un ángulo que subtiende un arco que es dos veces la longitud del radio. Véase la figura 11.

Tercero, si θ es un ángulo que subtiende un arco cuya longitud es la misma que el radio; es decir, s = r, entonces según la definición, $\theta = \frac{s}{r} = \frac{r}{r} = 1$

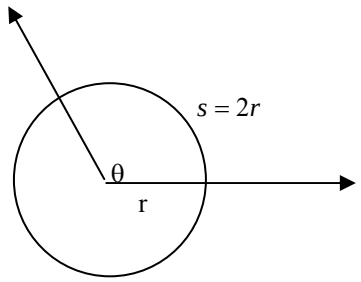


Figura 11 θ es un ángulo de 2 (radianes)

Así, un ángulo de 1 radián es un ángulo central que subtiende un arco igual a la longitud del radio. Véase la figura 12. De hecho, ésta es una forma alterna de definir la medición de un ángulo en radianes; es decir, podemos definir un ángulo de 1 radián como el ángulo central que subtiende un arco igual a la longitud del radio.

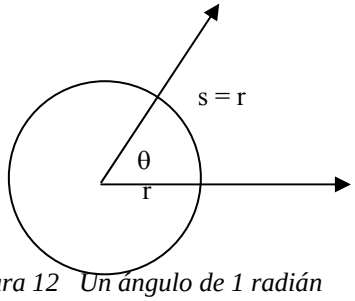


Figura 12 Un ángulo de 1 radián

7.2 CONVERSIÓN ENTRE RADIANES Y GRADOS

Al igual que en la mayoría de los problemas de conversión de una unidad de medición a otra, al convertir de radianes a grados o viceversa, podemos utilizar una proporción para llevar a cabo dicha conversión.

La proporción que podemos utilizar es la siguiente. $\frac{\theta(grados)}{180^\circ} = \frac{\theta(radianes)}{\pi}$

Ejemplo número 1:

Convierta la siguiente medida en radianes a grados. $\frac{\pi}{6}$

Podemos utilizar la proporción anterior para hacer la conversión. Sea θ *la medida en grados del ángulo dado.* $\frac{\theta}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi}$ *luego,* $\frac{\theta}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{1}{6}$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por 180. $\theta = \frac{1}{6}\cdot 180^\circ = 30^\circ$

Al convertir la medida en radianes de un ángulo dado en términos de π*, en vez de utilizar la proporción ya dada, podemos simplemente sustituir* π *por 180°. En otras palabras,* $\frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$

Ejemplo número 2:
Convierta de grados a radianes. 90°
Sea θ *la medida en radianes de 90°. Utilizando la proporción de conversión, obtenemos:*

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{90^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

De hecho, con frecuencia trabajaremos con ángulos que son múltiplos de 30°, 45°, 60° y 90°. Si conocemos las medidas en radianes de estos ángulos, obtendremos con facilidad la medida en radianes de sus múltiplos.

Habiendo revisado los ejemplos anteriores, observemos que la proporción de la conversión utilizada es equivalente a usar los siguientes factores de conversión.

Para convertir de radianes a grados, multiplicar la medida en radianes por $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Para convertir de grados a radianes, multiplicamos la medida en grados por $\frac{\pi}{180^\circ}$.

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1. Convierta el ángulo dado de radianes a grados.

a) $\frac{\pi}{4}$ *b)* $\frac{\pi}{3}$ *c)* $-\frac{5\pi}{2}$ *d)* -2π *e)* $-\frac{\pi}{12}$ *f)* $\frac{\pi}{18}$

2. Convierta el ángulo dado de grados a radianes.

a) 150^o *b)* 315^o *c)* -120^o *d)* -40^o *e)* 18^o *f)* 330^o

CAPITULO 8
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

8.1 TRIGONOMETRÍA DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En este capítulo se examinará la trigonometría de un triángulo rectángulo general.

Un triangulo rectángulo, con se recordará, es aquél que tiene un ángulo recto. Los lados del triángulo rectángulo reciben nombres especiales como puede verse en la figura 1:

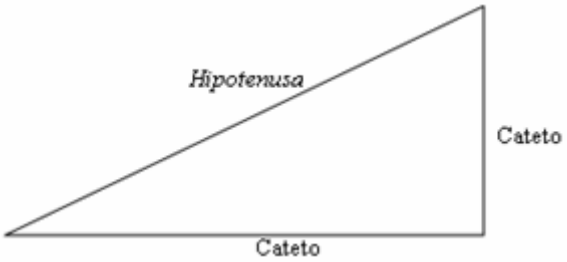
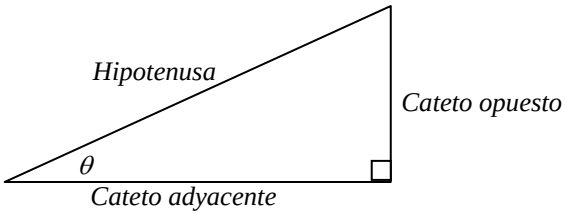


Figura 1 Nombres de los lados del triángulo rectángulo

Los catetos son los lados que forman el ángulo recto y la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.

Así, para un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo, se pueden establecer las definiciones de las seis funciones trigonométricas, utilizando las razones entre sus lados:



$$Seno\ \theta = Sen\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad Cosecante\ \theta = Csc\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

$$Coseno\ \theta = Cos\ \theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad Secante\ \theta = Sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

$$Tangente\ \theta = Tan\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad Cotangente\ \theta = Cot\theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

Donde:
a) El cateto opuesto está frente al ángulo que se busca y el cateto adyacente está a un lado del ángulo.
b) A las funciones Cosecante, Secante y Cotangente se les llama Funciones Trigonométricas Reciprocas del Seno, Coseno y Tangente, respectivamente. Esto se explica con más detalle en la siguiente sección.

Ejemplo número 1:
Determine el seno, coseno y tangente del ángulo A en el triángulo de la figura 2.

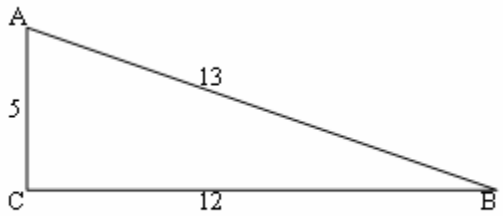


Figura 2

Si vemos los lados del triángulo desde la perspectiva de $\angle$ A, el cateto opuesto $\angle$ A es 12, el cateto adyacente a $\angle$ A es 5 y la hipotenusa es 13. Por lo tanto,

$$senA = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{12}{13} \qquad \cos A = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{5}{13} \qquad \tan A = \frac{cateto\ opuesto}{adyacente} = \frac{12}{5}$$

8.2 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS.

Se dice que una función es recíproca de otra, si al multiplicarse la original por la recíproca, el resultado es 1. Por ejemplo:

Si $f(x) = \frac{a}{b}$ *su recíproca es:* $\frac{b}{a}$, *ya que al multiplicarlas:* $\frac{a}{b} * \frac{b}{a} = 1$

La manera de obtener la recíproca de una función es dividiendo uno entre la función original y resolviendo la división. Por ejemplo, ¿Cuál es la función reciproca de Sen x?

$$Sen\ x = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}, \text{ su función recíproca es: } \frac{1}{Sen\ x} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = Csc\ x$$

Del mismo modo, se puede determinar que la función recíproca del Cos x es la Sec x y que la Tan x tiene como recíproca a la Cot x.

Relaciones Cofuncionales: *la función trigonométrica de un ángulo es igual a la "co" función trigonométrica del ángulo complementario. Estas relaciones son válidas aun cuando* θ *no sea un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.*

Las relaciones cofuncionales

$$\text{sen}\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \text{sen } \theta = \cos(90° - \theta)$$

$$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \tan \theta = \cot(90° - \theta)$$

$$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \sec \theta = \csc(90° - \theta)$$

8.3 APLICACIONES

Ejemplo número 2:

Un piloto de un jet de la fuerza naval va a aterrizar en un portaaviones. A una altitud de 3000 pies, el piloto observa el portaaviones con un ángulo de depresión de 15°. Véase la figura 3. Redondeado al décimo de milla más cercano, ¿Cuál es la distancia horizontal entre el avión y el portaaviones?

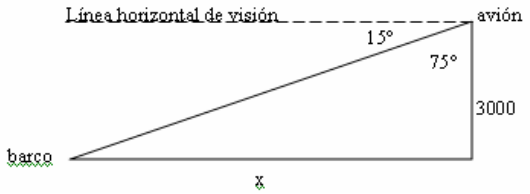


Figura 3

Sea x la distancia horizontal entre el avión y el portaaviones. Como el ángulo de depresión es de 15°, su complemento es 90° - 15° = 75°. Si miramos el triángulo en la figura, veremos que lo que estamos buscando es el cateto opuesto al ángulo de 75°, y que conocemos el cateto adyacente al ángulo de 75°. Por lo tanto, empleamos la función tangente.

$$\tan 75° = \frac{x}{3000}$$

x = 3000 tan 75° — *Utilizando una calculadora obtenemos*

x= 11 196.152 — *Esta respuesta está en pies, así que dividimos* entre 5280 para convertirlos en millas.

x = 2.1204834 millas

Así, la distancia horizontal entre el jet y el portaaviones es de 2.1 millas, redondeado al décimo de milla más cercano.

Ejemplo número 3:

El dirigible de Goodyear está volando a una altitud de 500 pies y pasa directamente por encima de un observador en el suelo. Después de un minuto, el ángulo de elevación desde el observador hacia el dirigible es de 24°. Determinar la velocidad del dirigible, redondeada a la milla/hora más cercana.

En la figura 4 se resume la información dada. A representa el punto directamente por encima del observador, y B es la posición del dirigible un minuto después. Una vez que hayamos encontrado la distancia que el dirigible viajó en 1 minuto (a la que llamamos x), podremos calcular la velocidad del mismo.

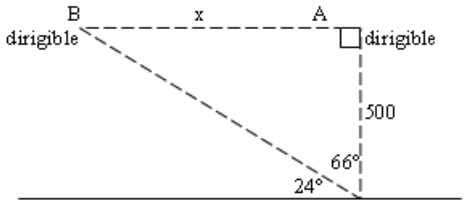


Figura 4

$$\tan 66° = \frac{x}{500} \qquad x = 500 \tan 66° \approx 1123.02 \text{ pies}$$

Así pues, el dirigible viajó 1123.02 pies en un minuto. Para convertir esta velocidad de 1123.02 pies/minuto en millas por hora, debemos multiplicar por 60 minutos/hora y dividir entre 5280 pies/milla.

$$\frac{60(1123.02)}{5280} \approx 12.76$$

Redondeando a la milla por hora más cercana, la velocidad del dirigible es de 13 millas/hora.

Ejemplo número 4:

Una escalera eléctrica forma un ángulo de 20° con respecto al suelo y transporta a la gente a través de una distancia vertical de 38 pies entre una plataforma del metro y la calle. Si una persona tarda 30 segundos en llegar desde el principio de la escalera hasta el final, ¿a qué velocidad (redondeado a la décima más cercana) se mueve la escalera?

Con la información dada, podemos crear el diagrama de la figura 5. Para determinar la velocidad de la escalera, necesitamos encontrar la distancia (nombrada x) que recorre ésta en 30 segundos.

Figura 5: Una escalera eléctrica con un ángulo de 20° con respecto al suelo

$$sen20° = \frac{38}{x} \qquad por\ lo\ que\ \ x = \frac{38}{xen20°} \approx 111.1045.7$$

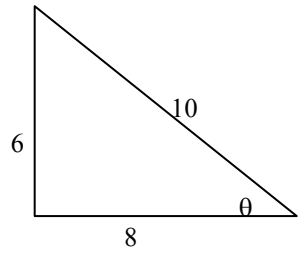
Redondeando a los décimos más cercanos, vemos que la escalera viaja 111.1 pies en 30 segundos, y por lo tanto, r es:

$$r = \frac{111.1 pies}{30 segundos} = 3.7\ pies/segundos$$

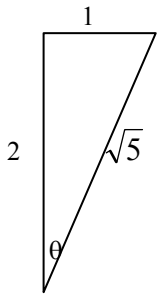
ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1. En los ejercicios siguientes, determine las seis funciones trigonométricas de θ.

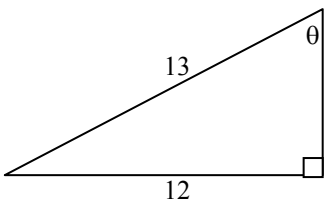
a)



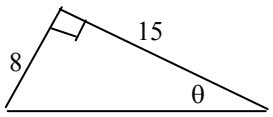
b)



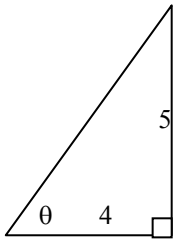
c)



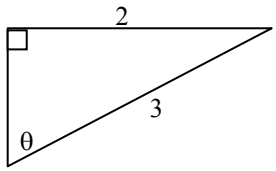
d)



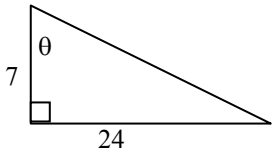
e)



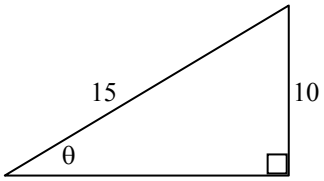
f)



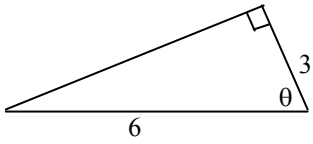
g)



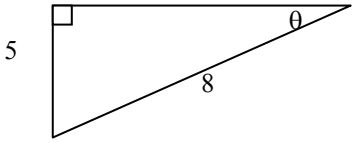
h)



i)

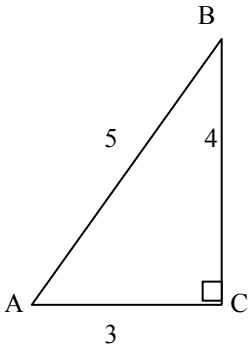


j)

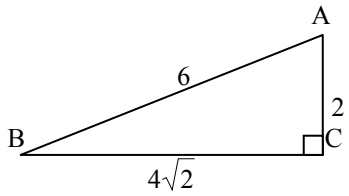


2. En los ejercicios siguientes, determine sen A y cos B.

a)

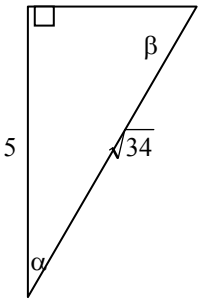


b)

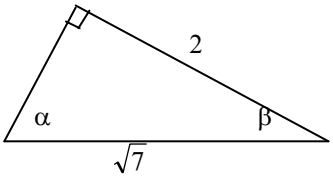


3. En los ejercicios siguientes, determine tan α y cot β.

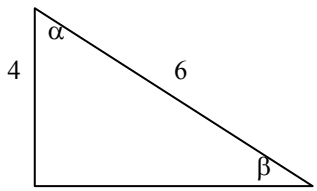
a)



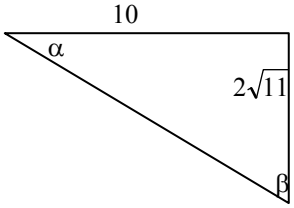
b)



c)

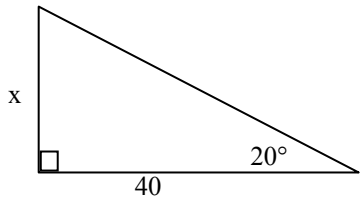


d)

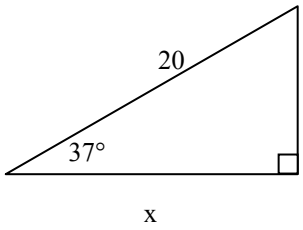


4. En los ejercicios siguientes, determine x. Redondee sus respuestas a los décimos más cercanos.

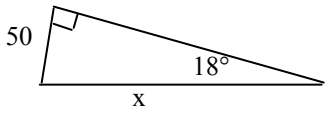
a)



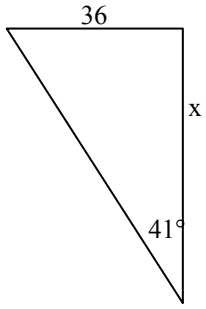
b)



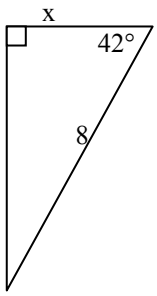
c)



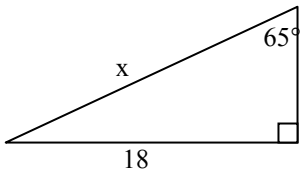
d)



e)

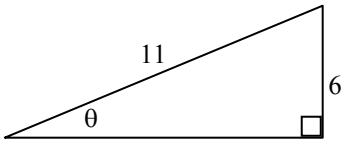


f)

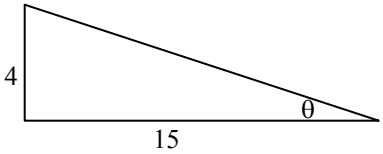


5. En los ejercicios siguientes, determine θ al grado más cercano.

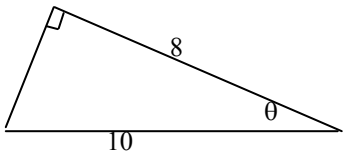
a)



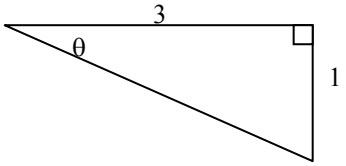
b)



c)



d)



6. En los ejercicios siguientes, determine el valor indicado. Utilice una calculadora sólo cuando sea necesario.

a) sen 123°	b) cos 212°	c) tan 351°	d) cos 317°	e) sec 225°	f) csc 330°
g) cos 158°	h) sen 204°	I) tan 111°	j) cot 249°	k) sec 150°	l) csc 240°

7. En los ejercicios siguientes, determine θ o x hasta el grado más cercano en el intervalo [0, 90°].

a) sen θ = 0.4384	b) cos θ = 0.7547	c) tan x = 1.428	d) cot x = 6.314
e) sec θ = 3.420	f) csc x = 1.086	g) sen x = 0.9630	h) cos θ = 0.7450

8. Resuelva los siguientes problemas:

a) Una escalera de 25 pies de largo está reclinada en un edificio. Si la escalera forma un ángulo de 37° con el suelo, ¿a qué altura del edificio llega la escalera?

b) Una escalera está reclinada en un edificio. Si la escalera forma un ángulo de 63° con el suelo y llega al edificio a una altura de 16 metros, ¿a qué distancia del edificio se encuentra el pie de escalera?

c) Un observador, que se encuentra a 50 pies de la base del asta de una bandera, determina que el ángulo de elevación hasta la punta del asta es de 48°. ¿Qué altura tiene el asta?

d) Un guardabosque se encuentra en una torre a 40 metros sobre el nivel del suelo. Descubre un incendio a un ángulo de depresión de 6°. ¿A qué distancia se encuentra el incendio de la torre del guardabosque?

e) Un alambre de soporte debe ser colocado en la punta de un poste telefónico de 30 pies de altura y fijado en la tierra. ¿Qué cantidad de alambre se necesitará para que hiciera un ángulo de 50° con el nivel del suelo?

f) Una escalera eléctrica debe transportar a la gente a una distancia vertical de 18 pies y debe hacer un ángulo de 20° con el suelo. ¿Qué longitud debe tener la escalera?

g) Un pentágono regular (la palabra regular significa que todos los lados tienen la misma longitud) está inscrito en un círculo con un radio de 12 cm. Determine el área del pentágono.

h) Un hexágono regular está inscrito en un círculo con un radio de 10 pulgadas. Determine el área del hexágono.

i) Un globo de aire caliente se mantiene a una altitud constante de 800 metros y pasa directamente por encima de un observador. Después de dos minutos, el observador ve el globo con un ángulo de elevación de 70°. Determine la velocidad del globo, redondeado al kilómetro por hora más cercano.

j) Una lancha de motor se encuentra a media milla exactamente enfrente del punto A y viaja en dirección paralela de la playa. Después de cinco minutos se observa la lancha a un ángulo de 34° retirada de la línea de visión original. Determine la velocidad de la lancha, redondeado a la milla por hora más cercana.

CAPITULO 9
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS EN EL PLANO CARTESIANO

9.1 LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO GENERAL

[2]En el estudio que se presenta a continuación, veremos todos los ángulos en el contexto de un sistema cartesiano de coordenadas; es decir, que cuando se da un ángulo θ, comenzamos poniendo a θ en una posición canónica, lo cual significa que el vértice de θ se encuentra en el origen y el lado inicial de θ se coloca a lo largo del eje x. Por supuesto, el lugar en el que se encuentre el lado terminal de θ dependerá del tamaño de θ. En la figura 1, se presenta un típico ángulo positivo θ en posición canónica. En este caso, el lado terminal se encuentra en el segundo cuadrante.
A continuación, ubique un punto P (diferente al origen) en el lado terminal de θ e identifique sus coordenadas (x, y) y su distancia hasta el origen, por lo que r debe ser positivo.
Con θ en posición canónica, ahora definiremos las tres primeras funciones trigonométricas de θ. (Más adelante en esta sección, definiremos las otras tres funciones).

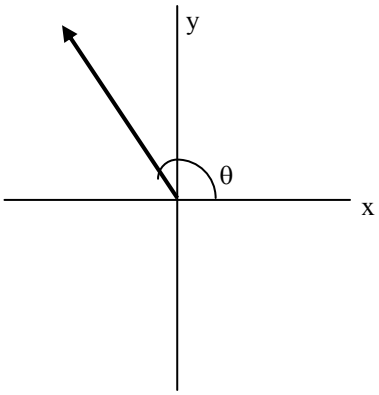


Figura 1 Típico ángulo positivo en posición canónica.

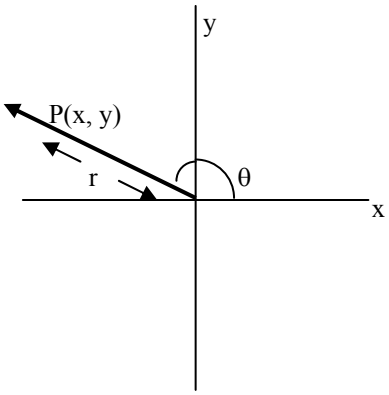


Figura 2 P(x, y) es un punto (distinto del origen) en el lado terminal y r es la distancia entre P y el origen.

DEFINICIÓN

Nombre de la función	*Abreviatura*	*Definición*
seno θ	*sen θ*	$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$
coseno θ	*cos θ*	$\cos\theta = \frac{x}{r}$
tangente θ	*tan θ*	$\tan\theta = \frac{y}{x}$

Al igual que en el caso de la función logarítmica, las funciones trigonométricas a menudo se escriben sin paréntesis alrededor del argumento de la función. En otras palabras, sen θ significa lo mismo que sen(θ)

[2] Arthur Goodman / Lewis Hirsch. ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. Primera Edición. Editorial Prentice Hall.

Se pueden hacer afirmaciones similares para todas las funciones trigonométricas. Del mismo modo como se describen funciones como $f(x) = x^2 - 3x + 5$, *podemos escribir ahora funciones como* $f(\theta) = sen\ \theta$ *y* $g(\theta) = \cos\ \theta$.

Veamos los casos de $sen\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{6}$ y $\tan\frac{\pi}{6}$.

Sabemos que $\frac{\pi}{6} = 30°$

El primer paso es poner el ángulo de 30° en una posición canónica, como se muestra en la figura 3.

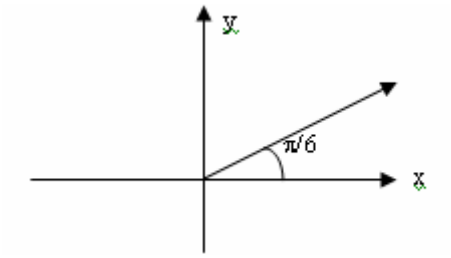


Figura 3 Angulo $\frac{\pi}{6}$ *=30° en posición canónica*

Después, tenemos que localizar un punto en el lado terminal deθ. Puesto que θ es de 30°, el lado terminal queda en el primer cuadrante. En general, no hay ningún método para determinar un punto en una línea si sólo se conoce al ángulo que forma con el eje x; sin embargo, como se trata de un ángulo de 30°, sí podemos encontrar tal punto. Si recordamos el triángulo rectángulo de 30°-60° de la sección anterior, podemos seleccionar un punto P en el lado terminal de θ que esté a 2 unidades del origen, y construimos una perpendicular desde este punto hasta el eje x. Véase la figura 4.

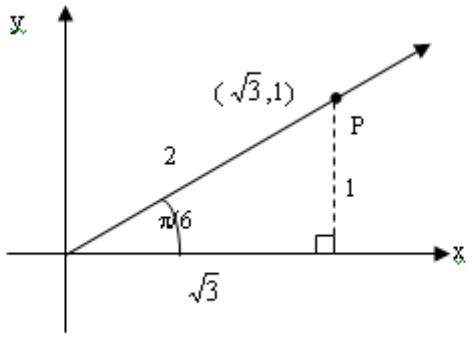


Figura 4 Diagrama para un ángulo de π/ 6 = 30° en posición canónica

A partir del triángulo que hemos formado, podemos identificar las coordenadas de P como $(\sqrt{3},1)$ *y r = 2. Por lo tanto, al calcular el seno, el coseno y la tangente de* $\frac{\pi}{6}$, *emplearemos x =* $\sqrt{3}$, *y = 1 y r = 2. En consecuencia, tenemos:*

$$sen\frac{\pi}{6} = \frac{y}{1} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Observe que el triángulo que formamos sólo fue una ayuda para encontrar las coordenadas de un punto en el lado terminal.

En este punto. Se podrá preguntar acerca de las definiciones de las funciones de seno, coseno y tangente. Supuestamente hemos definido el seno, coseno y tangente "de un ángulo θ"; sin embargo, nuestra definición parece depender del punto que hemos seleccionado en el lado terminal de θ. Si en realidad hemos definido una función de θ, entonces el valor de la función debe ser independiente del punto que seleccionamos en el lado terminal; de lo contrario, la definición es ambigua.

Así, en el caso anterior, supongamos que hubiésemos decidido que el punto P estuviera a 8 unidades del origen en lugar de 2. Entonces nuestro diagrama hubiera sido como se muestra en la figura 5. Obtendríamos $sen\frac{\pi}{6}=\frac{y}{r}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$*, que es la misma respuesta obtenida antes; sucede algo similar para el coseno y la tangente.*

De hecho, una breve reflexión nos convencerá de que para cualesquiera dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ *y* $P_2(x_2,y_2)$ *seleccionados en el lado terminal de* θ*, los triángulos formados serán semejantes, y por lo tanto, sus lados correspondientes serán proporcionales. Por lo tanto, aunque los valores de x, y y r puedan ser distintos, las razones; es decir, el seno, coseno y tangente, seguirán siendo los mismos.*

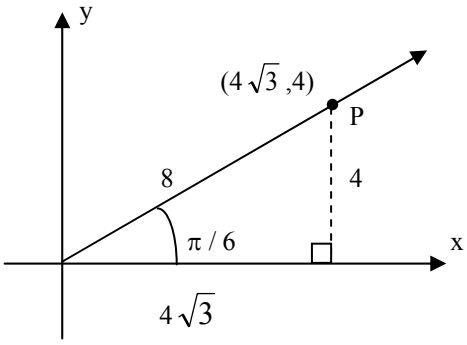


Figura 5 Un diagrama alternativo para $\frac{\pi}{6}$

Consideremos ahora la determinación de: $sen\frac{4\pi}{3},\cos\frac{4\pi}{3}$ *y* $\tan\frac{4\pi}{3}$.

Seguiremos el mismo procedimiento que en el caso anterior. Sabemos que:

$$\frac{4\pi}{3}=4\left(\frac{\pi}{4}\right)=4(60°)=240°$$

Colocamos un ángulo de $\frac{4\pi}{3}$ *en posición canónica, como se muestra en la figura 6. Después tenemos que localizar un punto en el lado terminal de* θ*. Observemos que como* θ *es de 240°, el lado terminal queda en el tercer cuadrante y el ángulo agudo formado por el lado terminal y el eje x negativo es de 240° - 180° = 60°. Este ángulo de 60° es el ángulo de referencia. Véase la figura 6.*

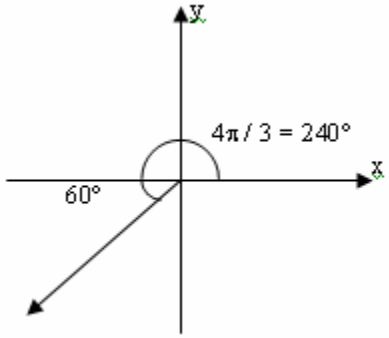


Figura 6 Un ángulo de 240° en posición canónica con un ángulo de referencia de 60°.

El hecho de que el ángulo de referencia sea de 60°, nos permite utilizar la información que hemos obtenido acerca del triángulo rectángulo de 30°- 60°, de la siguiente manera. Recordando el típico triángulo de 30°-60°, podemos seleccionar un punto P en el lado terminal de θ *que se encuentre a 2 unidades del origen, y*

construimos una perpendicular desde este punto hasta el eje x. Al triángulo formado de esta manera se le llama triángulo de referencia. Observe que este triángulo de referencia es un triángulo rectángulo 30° - 60° y por eso sabemos que los otros dos lados del triángulo son 1 y $\sqrt{3}$ *, como se indica en la figura 7. Podemos ver que las coordenadas de P son* $\left(-1,-\sqrt{3}\right)$*. Por lo tanto, para calcular el seno, el coseno y la tangente de* $\frac{4\pi}{3}$*, empleamos x =-1,* $y = -\sqrt{3}$ *y r=2. En consecuencia, tenemos que:*

$$sen\frac{4\pi}{3}=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{4\pi}{3}=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2} \qquad \tan\frac{4\pi}{3}=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$$

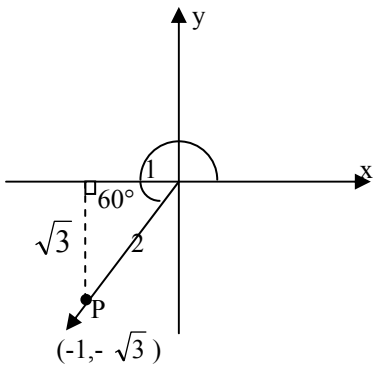


Figura 7 Un triángulo de referencia para un ángulo de 240°

No hay que perder de vista el hecho de que encontramos el seno, el coseno y la tangente de $\frac{4\pi}{3}$ *(o 240°). El ángulo de referencia de 60° simplemente fue una ayuda para identificar x, y, y r.*

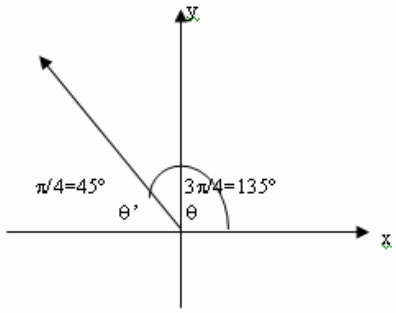
Antes de pasar a ver varios ejemplos más, daremos algunas definiciones precisas.

Sea θ *un ángulo en posición canónica cuyo lado terminal no quede sobre el eje x ni sobre el eje y. El ángulo de referencia (que denotamos por* θ*') es el ángulo agudo positivo formado por el lado terminal de* θ *y el eje x. Un triángulo de referencia es un triángulo que tiene a* θ*' y que se forma mediante la construcción de una perpendicular desde un punto (diferente del origen) en el lado terminal de* θ *hacia el eje x.*

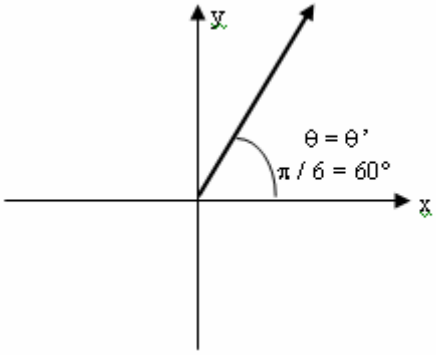
Ejemplo número 1:

Dados los siguientes ángulos, dibuje el ángulo en posición canónica e identifique el ángulo de referencia tanto en radianes como en grados.

a) $\frac{3\pi}{4}=3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *= 3(45°) = 135°. Trazamos el ángulo en posición canónica. Para encontrar el ángulo de referencia, calculamos* $\theta=\frac{3\pi}{4}=180°=135°$ *; por lo tanto, el ángulo de referencia es* $\theta'=\frac{\pi}{4}=45°$



b) $\frac{\pi}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$ *. Dibujamos el ángulo en posición canónica y podemos ver que el ángulo de referencia es igual al ángulo mismo, o bien* $\frac{\pi}{3} = 60°$ *.*



Ejemplo número 2:

Determine el seno, coseno y tangente de $\frac{9\pi}{4}$ *.*

Al convertir $\frac{9\pi}{4}$ *a grados, obtenemos 405°. Al poner un ángulo De 405° en posición canónica obtendremos la figura 8. Observe que, como se ha indicado, el ángulo de referencia es* $\frac{\pi}{4} = 45°$ *. Hemos elegido un punto en el lado terminal, que está a* $\sqrt{2}$ *unidades del origen y trazamos los lados del triángulo de referencia según el típico triángulo rectángulo de 45°. Por consiguiente, hemos nombrado al punto P como (1,1).*

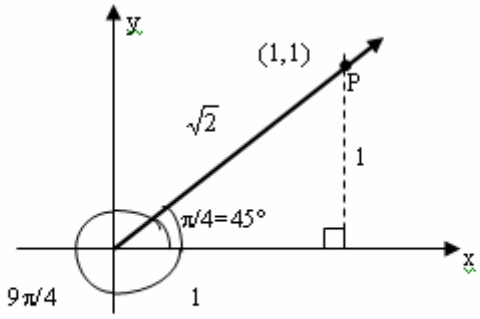


Figura 8 Un ángulo de $\frac{9\pi}{4} = 405°$ *en posición canónica*

Por lo tanto, tenemos que x = 1, y = 1, r = $\sqrt{2}$:

$$sen\frac{9\pi}{4}=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{9\pi}{4}=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\frac{9\pi}{4}=\frac{y}{x}=\frac{1}{1}=1$$

Observe que el lado terminal de $\frac{9\pi}{4}$ tiene exactamente la misma posición que el lado terminal de $\frac{\pi}{4}$. Los ángulos cuyos lados terminales tienen la misma posición se llaman coterminales. Puesto que la suma (ó resta) de 2π (ó 360°) a (ó de) cualquier ángulo nos regresa a la misma posición, la suma de cualquier múltiplo entero de 2π a un ángulo nos dará un ángulo coterminal. También es importante hacer notar que como los valores de las funciones trigonométricas se determinan por la posición del lado terminal del ángulo (ya que esto, a su vez, determina la razón), dos ángulos cualesquiera con el mismo lado terminal tendrán los mismos valores trigonométricos. Volveremos a esta idea en repetidas ocasiones en nuestro estudio de las funciones trigonométricas.

Se observará que la definición de un ángulo de referencia excluye a aquellos ángulos cuyos lados terminales se encuentran en el eje x o en el eje y. El siguiente ejemplo explicará por qué.

Ejemplo número 3:

Determine el seno, coseno y tangente de $\frac{\pi}{2}$.

Al igual que lo hicimos anteriormente, comenzamos poniendo un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ (ó 90°) en posición canónica, como se muestra en la figura 9. Nuestro siguiente paso es ubicar un punto en el lado terminal del ángulo. En los ejemplos anteriores necesitábamos el ángulo de referencia para identificar x, y, y r.

Sin embargo, en este ejemplo, como el lado terminal de $\frac{\pi}{2}$ se encuentra sobre el eje positivo de y, es muy sencillo tomar un punto P sobre el lado terminal e identificar x, y, y r. Por ejemplo, podemos ver que el punto (0,1) está en el lado terminal de $\frac{\pi}{2}$.

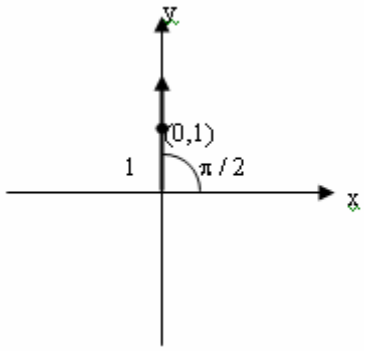


Figura 9 un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ =90° en posición canónica

Por lo tanto, tenemos x = 0 y y = 1; r, que es la distancia desde P al origen, también es 1, como se indica en la figura 9. Así, tenemos

$$sen\frac{\pi}{2}=\frac{y}{r}=\frac{1}{1}=1 \qquad \cos\frac{\pi}{2}=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0 \qquad \tan\frac{\pi}{2}=\frac{y}{x}=\frac{1}{0}\rightarrow indefinido$$

El hecho de que tan $\frac{\pi}{2}$ *sea indefinido es otra manera de decir que* $\frac{\pi}{2}$ *no se encuentra en el dominio de la función tangente.*

Observe que no tuvimos necesidad de un triángulo de referencia para identificar x, y, y r. De hecho, no había ningún ángulo de referencia. Si seguimos la definición de un triángulo de referencia, construimos una perpendicular desde P sobre el lado terminal de $\frac{\pi}{2}$ *hasta el eje x. Como esta perpendicular coincide con el lado terminal de* $\frac{\pi}{2}$*, no existe ningún ángulo de referencia (puesto que, de acuerdo a la definición, el ángulo de referencia debe ser agudo); Además, la perpendicular no formaría ningún triángulo de referencia. En consecuencia, vemos que un ángulo de referencia se define sólo para el ángulo cuyo lado terminal no queda sobre el eje x o el eje y. La siguiente definición nos será de gran utilidad.*

Un ángulo de cuadrante es aquel cuyo lado terminal queda sobre el eje x o el eje y. De manera alterna, podemos decir que un ángulo de cuadrantes es aquel que es un múltiplo de $\frac{\pi}{2}$ *(o 90°). Así pues,* $\frac{\pi}{2}$ *es un ángulo de cuadrante. Es importante que se familiarice mucho con el seno, el coseno y la tangente de todos los ángulos de cuadrante, así como con los múltiplos de* $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ *y* $\frac{\pi}{3}$.

9.2 LAS FUNCIONES RECÍPROCAS

Antes de continuar con varios ejemplos más, nos detendremos a definir las otras tres funciones trigonométricas, las llamadas funciones recíprocas, que se definen como sigue. (Incluimos las tres funciones trigonométricas originales para que el cuadro quede completo.)

Nombre de la función	*Abreviatura*	*Definición*	Funciones recíprocas		
			Nombre de la función	*Abreviatura*	*Definición*
seno θ	*sen* θ	$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$	*cosecante* θ	*csc* θ	$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \frac{r}{y}$
coseno θ	*cos* θ	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	*secante* θ	*sec* θ	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{x}$
tangente θ	*tan* θ	$\tan\theta = \frac{y}{x}$	*cotangente* θ	*cot* θ	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{x}{y}$

Ejemplo número 4:

Determine las seis funciones trigonométricas de cada ángulo. a) $\frac{7\pi}{4}$ *b) –180° c)* $-\frac{5\pi}{6}$

a) Un ángulo de $\frac{7\pi}{4}$**,** *que equivale a 315°, aparece en la figura 10. Hemos dibujado el triángulo de referencia, que contiene el ángulo de referencia de 45°. Si pensamos en el típico triángulo rectángulo de 45°, podemos seleccionar un punto en el lado terminal que esté a* $\sqrt{2}$ *unidades del origen. Esto nos permite llenar los lados del triángulo de referencia como aparecen en la figura 10. Así, para P tenemos x = 1 y y = -1; r =* $\sqrt{2}$.

Por lo tanto: $\text{sen}\frac{7\pi}{4} = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan\frac{7\pi}{4} = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$

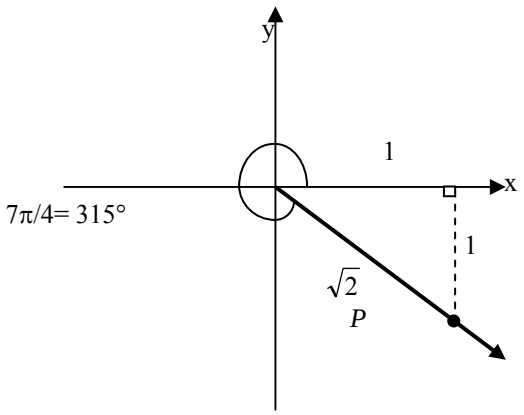


Figura 10 Un ángulo de $\frac{7\pi}{4}$ *en posición canónica*

Para obtener los valores de las funciones recíprocas, tomamos los recíprocos de los valores que acabamos de obtener.

$$\csc\frac{7\pi}{4} \text{ es el recíproco de } sen\frac{7\pi}{4}\text{, y así } \csc\frac{7\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

$$\sec\frac{7\pi}{4} \text{ es el recíproco de } \cos\frac{7\pi}{4}\text{, y así } \sec\frac{7\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\cot\frac{7\pi}{4} \text{ es el recíproco de } \tan\frac{7\pi}{4} \text{ y así } \cot\frac{7\pi}{4} = -1$$

9.3 ÁNGULOS ESPECIALES (30, 45, 60 Y 90 GRADOS)

Durante el análisis de la siguiente sección, necesitaremos información acerca de dos triángulos especiales. Ellos son el triángulo rectángulo isósceles y el triángulo rectángulo de 30° y 60°.

El triángulo rectángulo isósceles.

La figura 11 muestra un triángulo rectángulo isósceles. Observe que como los catetos son iguales, los ángulos de la base deben ser iguales, y puesto que los ángulos de la base tienen que sumar 90°, cada uno debe medir 45°. Hemos nombrado a los catetos s y la hipotenusa x. Despejamos x, aplicando el teorema de Pitágoras.

$$x^2 = s^2 + s^2 \Rightarrow x^2 = 2s^2 \Rightarrow x = \pm s\sqrt{2}$$

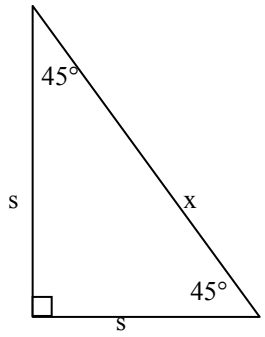
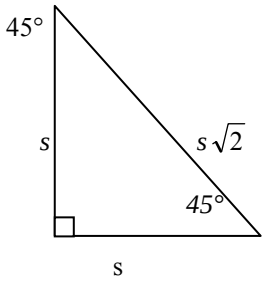


Figura 11 Un triángulo rectángulo isósceles

Como x es una longitud, rechazamos la solución negativa, y por lo tanto $x = s\sqrt{2}$.
Acabamos de deducir lo siguiente.
El triángulo rectángulo isósceles (45°)



En palabras, el diagrama dice que en un triángulo rectángulo de 45°, los catetos son iguales y la hipotenusa es $\sqrt{2}$ *veces la longitud del cateto.*

El triángulo rectángulo 30°- 60° La figura 11(a) muestra un triángulo rectángulo 30°- 60°. Hemos etiquetado la hipotenusa h. Si duplicamos el triángulo como lo indica la línea punteada de la figura 11(b), podemos ver que el ΔABD *es equilátero (ya que cada ángulo mide 60°), así que* $|AC|$ *debe ser* $\frac{h}{2}$.

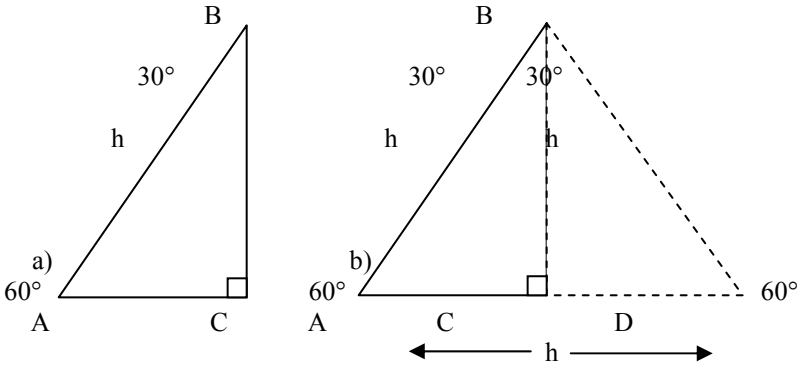
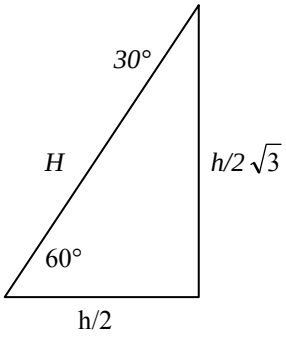


Figura 11

Hemos nombrado a la hipotenusa h, $|AC|$ *es* $\frac{h}{2}$*, y el lado desconocido* $|BC|$ *como x. Determinamos x utilizando el teorema de Pitágoras.* $x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3h^2}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{h}{2}\sqrt{3}$. *Como antes, rechazamos la solución negativa, de modo que* $x = \frac{h}{2}\sqrt{3}$ *. Por lo tanto, hemos deducido lo siguiente.*

El triángulo rectángulo de 30°- 60°



En palabras, el diagrama dice que en un triángulo rectángulo 30°- 60°, el lado opuesto al ángulo de 30° es la mitad de la hipotensa, y el lado opuesto al ángulo de 60° mide la mitad de la hipotenusa multiplicado por $\sqrt{3}$.

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1. En los ejercicios siguientes convierta el ángulo dado de radianes a grados.

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $-\frac{5\pi}{2}$ e) $-\frac{4\pi}{3}$ f) $-\frac{11\pi}{6}$

g) $\frac{3\pi}{2}$ h) $-\frac{2\pi}{5}$ i) 3 j) 5 k) -2 l) -2π

2. En los ejercicios siguientes convierta el ángulo dado de grados a radianes.

a) $150°$ b) $315°$ c) $-120°$

d) $-270°$ e) $18°$ f) $100°$

3. En los ejercicios siguientes, dibuje el ángulo dado en posición canónica y determine el ángulo de referencia. Si el ángulo es de cuadrante, indique en dónde queda el lado terminal; por ejemplo, en el eje x positivo, en el eje y negativo, etcétera.

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{4}$ c) $\frac{7\pi}{6}$ d) $\frac{4\pi}{3}$

e) $315°$ f) $150°$ g) $60°$ h) $45°$

i) $\frac{\pi}{2}$ j) π k) $-\frac{5\pi}{6}$ l) $-\frac{3\pi}{4}$

4. En los ejercicios, determine el valor indicado.

a) $sen\frac{5\pi}{6}$ b) $\cos\frac{3\pi}{4}$ c) $\tan\frac{4\pi}{3}$ d) $sen\frac{11\pi}{6}$

e) $sen\frac{3\pi}{2}$ f) $\cos\pi$ g) $\tan\frac{\pi}{2}$ h) $\cot 0$

i) $\sec 225°$ j) $\csc 300°$ k) $\cos 270°$ l) $sen\ 180°$

m) $\cot\frac{3\pi}{4}$ n) $\sec\frac{2\pi}{3}$ ñ) $sen\ 30°$ o) $\cos 60°$

p) $\sec(-225°)$ q) $\cos 60°$

5. En los ejercicios siguientes, utilice la información dada para determinar el valor solicitado.

a) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ *; determine sec* θ*.*

b) $sen\theta = -\frac{3}{7}$ *; determine csc* θ*.*

c) $\csc\theta = -3$ *; determine sen* θ*.*

d) $\cot\theta = -4$ *; determine tan* θ*.*

e) $sen\theta = \frac{3}{5}$*;* θ *está en el cuadrante II. Determine cos* θ*.*

f) $\cos\theta = -\frac{4}{5}$*;* θ *está en el cuadrante III. Determine sen* θ*.*

g) $\tan\theta = -\frac{1}{3}$*;* θ *está en el cuadrante IV. Determine cos* θ*.*

h) $\cot\theta = \frac{1}{5}$*;* θ *está en el cuadrante I. Determine sen* θ*.*

6. En los ejercicios siguientes, complete las tablas con los valores solicitados.

θ	sen θ	cos θ	tan θ
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{4}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
π			

θ	sen θ	cos θ	tan θ
$\frac{7\pi}{6}$			
$\frac{5\pi}{4}$			
$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{7\pi}{4}$			
$\frac{11\pi}{6}$			
2π			

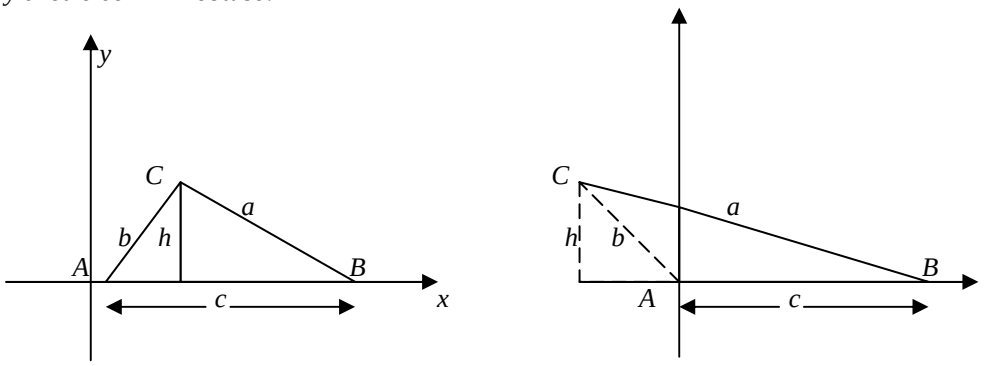
θ	sec θ	csc θ	cot θ
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{4}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
π			

CAPÍTULO 10
LEY DE SENOS Y COSENOS

10.1 LA LEY DE LOS SENOS

[3]*Continuaremos utilizando la convención de etiquetar los ángulos de un triángulo con A, B y C y los lados opuestos a estos ángulos como a, b y c, respectivamente.*

En la figura 1, hemos trazado dos triángulos ABC (con $\angle A$ en posición canónica), uno con $\angle A$ agudo y el otro con $\angle A$ obtuso.



ΔABC *con* $\angle A$ *agudo* ΔABC *con* $\angle A$ *agudo*

Figura 1

Si observamos ambas partes (a) y (b) de la figura 1, podemos ver que:

$senA = \frac{h}{b}$ *y* $senB = \frac{h}{a}$ *Y por lo tanto tenemos*

$bsenA = h$ *y* $asenB = h$ *lo que implica*

$bsenA = asenB$ *Si dividimos ambos lados entre ab, obtenemos:* $\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b}$

Si reorientamos estos ángulos de modo que $\angle C$ esté en posición canónica con (a) a lo largo del eje x positivo, tenemos

$$\frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$$

Al combinar estos resultados obtenemos la ley de los senos.

En el Δ ABC con los lados a, b y c, tenemos

$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$$

[3] Arthur Goodman / Lewis Hirsch. ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. Primera Edición. Editorial Prentice Hall.

Observe que la primera igualdad en la ley de los senos se puede escribir como: $\frac{a}{b} = \frac{senA}{senB}$

En palabras, la ley de los senos dice que en cualquier triángulo, la razón de dos lados cualesquiera es igual a la razón de los senos de los ángulos opuestos a tales lados.

También tenemos una forma alternativa de la ley de los senos, que se obtiene al invertir cada una de las razones. Utilizaremos la forma que parezca más adecuada.

En lo sucesivo, a menos que se especifique lo contrario, redondearemos todas las respuestas a décimos.

Ejemplo número 1:
En la figura 2, resuelva $A\Delta ABC: \angle A=48°, \angle B=39°, c=10.$

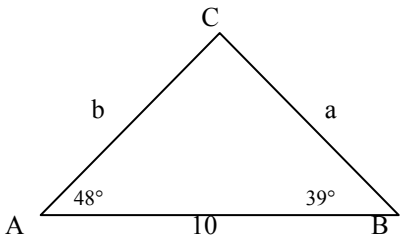


Figura 2

Recuerde que resolver el triángulo significa determinar todos los lados ó ángulos faltantes.
Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, vemos que $\angle C = 93°$.
Determine ***a*** *utilizando la ley de los senos, que implica:* $\frac{a}{sen48°} = \frac{10}{sen93°}$ *despejando* ***a***

$$a = \frac{10sen48°}{sen93°} = 7.4416468 \qquad a = 7.4$$

De manera análoga, para determinar ***b*** *tenemos:* $\frac{b}{sen39°} = \frac{10}{sen93°}$

$$b = \frac{10sen39°}{sen93°} = 6.3018404 \qquad b = 6.3 \text{ Redondeado a décimos}$$

Ejemplo número 2:
Determine la distancia entre los puntos A y B en las orillas opuestas de un lago, como se indica en la figura 3. Redondee la respuesta a metros.

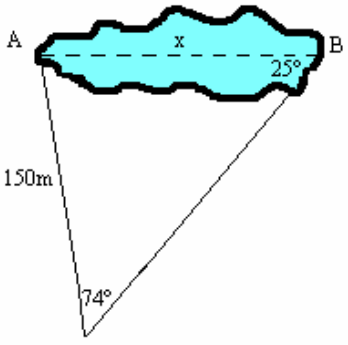


Figura 3

La información dada permite utilizar la ley de los senos, de manera que: $\frac{x}{sen74°} = \frac{150}{sen25°}$

$x = \frac{150 sen74°}{sen25°} = 341.18084$ *x = 341 metros* *Redondeado a metros*

Ejemplo número 3:
El caso ambiguo. Es decir, si se especifican dos lados de un triángulo y uno de los ángulos no incluido entre ellos, esto no determina por completo al triángulo, como se muestra a continuación.
En el Δ *ABC, determine la medida de* $\angle B$ *(figura 4).*

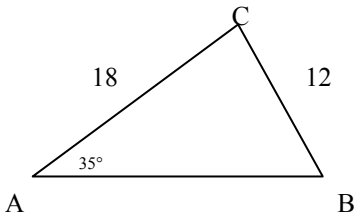


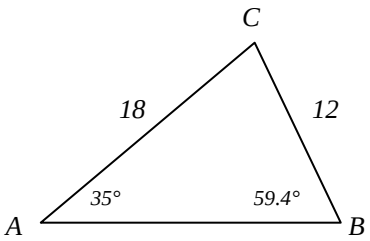
Figura 4

Si aplicamos la ley de los senos para determinar ∠ B, obtenemos: $\frac{senB}{18} = \frac{sen35°}{12}$

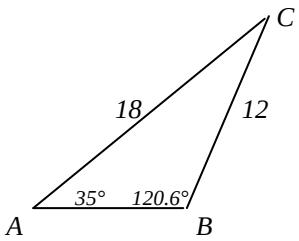
$$senB = \frac{18 sen35°}{12} = 0.8603647$$

Con 0.8603647 en la pantalla de la calculadora, podemos oprimir la tecla que indique seno inverso (sen^{-1}*) para obtener el ángulo B. Sin embargo, sólo obtenemos el ángulo agudo (primer cuadrante) cuyo seno es 0.860347, que es igual a B=59.4° (redondeado a décimos). Como la función seno también es positiva en el segundo cuadrante, nos sirve también un ángulo en el segundo cuadrante con un ángulo de referencia de 59.4°, y por lo tanto, B puede ser también 120.6°.*
Por lo tanto, la respuesta de este ejemplo es B = 59.4° ó 120.6° .

Esta respuesta significa que podemos trazar dos triángulos con la información dada. Los dos triángulos aparecen en la figura 5(a) y (b).



Δ *ABC con* $\angle B = 59.4°$
(a)



Δ *ABC con* $\angle B = 120.6°$
(b)

Figura 5

10.2 LA LEY DE LOS COSENOS

La ley de los cosenos, que deduciremos en un momento, trata las situaciones LAL (lado, ángulo, lado) y LLL (lado, lado, lado), no cubiertas por la ley de los senos.
Consideremos un triángulo general ABC y coloquémoslo en un sistema de coordenadas, de modo que $\angle C$ esté en posición canónica, como se indica en la figura 6.

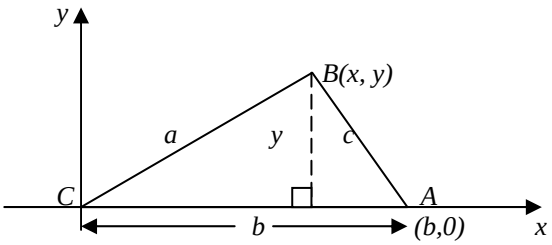


Figura 6 ΔABC, con $\angle C$ en posición canónica.

Observe que podemos trazar Δ ABC con $\angle C$ agudo.

*La altura del vértice B al lado $\overline{AC}$ ha sido etiquetada como **y**. De la figura 6, tenemos:*

$$\cos C = \frac{x}{a} \qquad sen C = \frac{y}{a}$$

$$x = a \cos C \qquad y = a \, sen \, C$$

*Ahora utilizaremos la fórmula de la distancia entre dos puntos para calcular la longitud de $\overline{AB}$, que designamos como **c**, utilizando las coordenadas que hemos determinado.*

$$c = \sqrt{(x-b)^2 + (y-0)^2}$$

$$c = \sqrt{(a\cos C - b)^2 + (asenC)^2}$$

$$c = \sqrt{a^2(\cos C)^2 - 2ab\cos C + b^2 + a^2(senC)^2}$$ *Agrupamos el primer y último términos y factorizamos a^2.*

$$c = \sqrt{a^2(sen^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C + b^2}$$ *Como $sen^2C + cos^2C = 1$, tenemos*

$$c = \sqrt{a^2 - 2ab\cos C + b^2}$$ *Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Esta última ecuación es la ley de los cosenos.

Observe que si $\angle C$ es un ángulo recto, entonces cos C = 0 y la ley de los cosenos se reduce al teorema de Pitágoras. De hecho, podemos ver a la ley de los cosenos como una generalización de este teorema.

Recuerde que podríamos haber comenzado con el ángulo A o el ángulo B en posición canónica, lo que nos daría otras dos formas de la ley de los cosenos.

La ley de los cosenos

En cualquier Δ ABC, el cuadrado de cualquier lado es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados, menos dos veces el producto de los otros dos lados por el coseno del ángulo entre ellos.

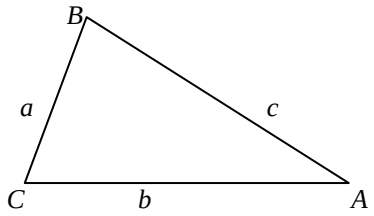


Figura 7

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1. *En los ejercicios siguientes, utilice la información dada para determinar las partes faltantes de ΔABC. Aproxime sus respuestas hasta décimos. Una calculadora científica le será útil para este conjunto de ejercicios.*

a) A = 80°, B = 35°, a = 12	*b) A = 80°, B = 35°, c = 12*	*c) A = 72°, a = 24, b = 15*
d) A = 72°, b = 24, c = 15	*e) a = 6, b = 9, c = 10*	*f) B = 53°,b = 7,c = 10*
g) B=110°,C = 25°,c = 16	*h) a = 15, b = 12, c = 5*	*I) A = 138°, b = 5, c = 11*

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Un globo meteorológico flota en el aire exactamente sobre la recta que une los puntos A y B que están a 4.6 km de distancia. Si el ángulo de elevación del globo desde los puntos A y B es de 28°50’ y 52°10’, respectivamente, determine la altura del globo.

b) Dos torres de observación A y B se localizan a 15 millas de distancia entre sí, en un parque nacional. Los dos observadores ven un incendio en el punto C, de modo que $\angle$ CAB = 73° y $\angle$ CBA = 59°. ¿A qué distancia está el incendio de la torre B?

c) Un poste telefónico se sostiene mediante dos cables sujetos a la parte superior del poste y en el suelo, en lados opuestos del poste, en los puntos A y B, que están a 80 pies de distancia entre sí. Si los ángulos de elevación en A y B son de 70° y 58°, respectivamente, determine las longitudes de ambos cables y la altura del poste.

CAPÍTULO 11
GEOMETRÍA, EL PLANO CARTESIANO

11.1 CONCEPTOS BÁSICOS

[1]*Así como podemos representar los números reales como puntos de la recta real, podemos asociar puntos del plano a los pares ordenados de números reales. Un par ordenado (x, y) de números reales tiene x como primer elemento e y como segundo. El modelo para su representación se llama sistema coordenado rectangular o plano cartesiano. Se construye mediante dos rectas perpendiculares.*

La recta horizontal se llama tradicionalmente eje x y la vertical y la vertical eje y. Su punto de intersección es el origen y esas rectas dividen al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes.

Identificamos cada punto de plano por un par ordenado (x, y) de números reales, llamados coordenadas del punto. El número x representa la distancia dirigida desde el eje y al punto, y el número y la distancia dirigida desde el eje x al punto. El primero se llama coordenada x ó abscisa, y el segundo coordenada y u ordenada. Así, la figura 3 muestra la situación de los puntos (4, 0), (5, 7) y (2, 1) en el plano.

NOTA: Usamos la notación (x, y) tanto para denotar un punto del plano cartesiano como un intervalo abierto de la recta real. Pero no habrá confusión porque en cada momento quedará claro de qué se trata.

11.2 FÓRMULAS DE LA DISTANCIA Y PUNTO MEDIO

Recordemos que, según el teorema de Pitágoras, para un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos ***a***, ***b*** *se tiene* $a^2 + b^2 = c^2$. *Recíprocamente, si* $a^2 + b^2 = c^2$, *entonces el triángulo es rectángulo (Figura 1).*

Supongamos que queremos hallar la distancia entre los puntos (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *del plano. Formando con ellos un triángulo rectángulo, como indica la figura 2, vemos que el lado vertical tiene longitud* $|y_2 - y_1|$. *Análogamente el horizontal tiene longitud* $|x_2 - x_1|$. *Por el teorema de Pitágoras,*

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

Sustituyendo $|x_2 - x_1|^2$ *e* $|y_2 - y_1|^2$ *por las expresiones equivalentes* $(x_2 - x_1)^2$ *e* $(y_2 - y_1)^2$, *podemos escribir:* $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

La fórmula anterior representa la distancia entre los puntos (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2). *Tomamos la raíz cuadrada positiva para* ***d*** *porque la distancia entre dos puntos no es una distancia dirigida.*

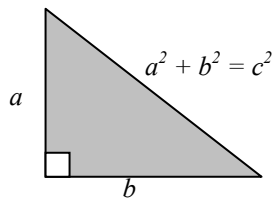


Figura 1 Teorema de Pitágoras

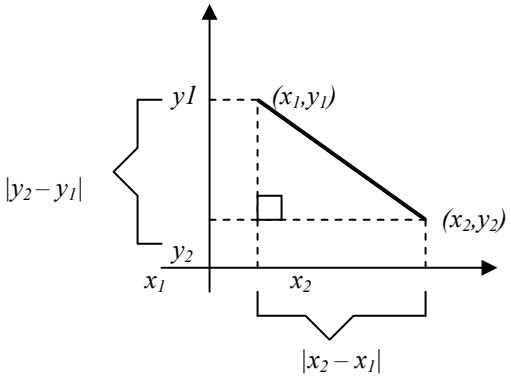


Figura 2 Distancia entre dos puntos

[1] Larson / Hostetler / Edwards. Cálculo. Quinta edición. Editorial Mc Graw Hill

Ejemplo número 1:
Distancia entre dos puntos.
Calcule la distancia entre los puntos (-2,1) y (3,4)
Aplicando el modelo tenemos que:

$$d = \sqrt{[3-(-2)]^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(5)^2 + (3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \approx 5.83$$

Ejemplo número 2:
Verificando que un triángulo es rectángulo
Se usa la fórmula de la distancia para probar que los puntos (2,1), (4,0) y (5,7) son vértices de un triángulo rectángulo.
Observe la figura 3, los tres lados tienen longitudes

$$d_1 = \sqrt{(5-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$
$$d_2 = \sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$d_3 = \sqrt{(5-4)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

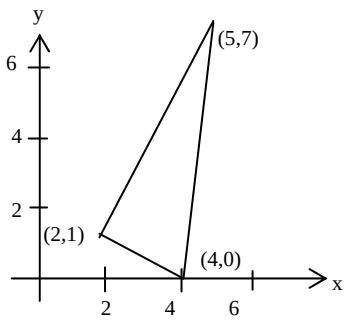


Figura 3

Como $d_1^2 + d_2^2 = 45 + 5 = 50 = d_3^2$, *podemos aplicar el teorema de Pitágoras para concluir que es un triángulo rectángulo.*

La fórmula del punto medio de un segmento de recta en el plano es similar a la de un segmento de la recta real.

El punto medio del segmento rectilíneo que une (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *es:*

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo número 3
Punto medio:
Calcule el punto medio (ver figura 4) de un segmento rectilíneo unido por los puntos: (-5,-3) y (9,3).
Por la fórmula del punto medio, tenemos que: $\left(\frac{-5+9}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) = (2,0)$

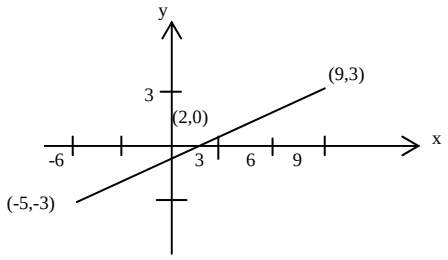


Figura 4

Ejemplo número 4:
Puntos situados a distancia prefijada de un punto dado
Calcule x de modo que la distancia entre (x, 3) y (2,-1) es 5.
Según la fórmula de la distancia,

$$d = 5 = \sqrt{(x-2)^2 + (3+1)^2}$$

$$25 = (x^2 - 4x + 4) + 16$$

$0 = x^2 - 4x - 5$ factorizando tenemos que: $0 = (x-5)(x+1)$

Por tanto, x = 5 o x = -1, y concluimos que ambos puntos (5, 3) y (-1, 3) distan 5 unidades del punto (2,-1), tal como muestra la figura 5.

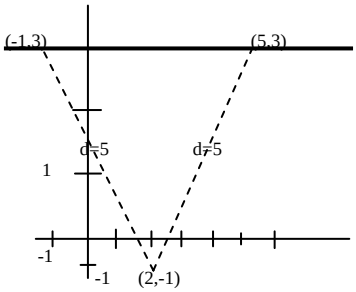


Figura 5

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1.Calcule la distancia entre los puntos que se indican. También determine el punto medio.
a) (2, 1), (4, 5) *b) (-3, 2), (3, -2)* *c) (½, 1), (-¾, -3)d) (¼, 2), (-1, 3)*

2.Verifique que los puntos que se dan corresponden a la figura que se indica.
a) (4, 0), (2, 1), (-1, -5) es triángulo rectángulo *b) (1, -3), (3, 2), (-2, 4) es triángulo isósceles*

3.Verifique si los puntos que se indican son colineales (están en la misma recta).
a) (0, -4), (2, 0), (3, 2) *b) (0, 4), (7, -6), (-5, 11)* *c) (-2, 1), (-1, 0), (2, -2)*

4.Encuentre x de manera que la distancia entre los puntos sea 5.
a) (0, 0), (x, 4) *b) (2, -1), (x, 2)*

5.Determine y de manera que la distancia entre los puntos sea 8.
a) (0, 0), (3, y) *b) (5, 1), (5, y)*

CAPÍTULO 12
LA LÍNEA RECTA

[2]El siguiente concepto es fundamental para el estudio de las líneas rectas. Todas las líneas rectas a las que nos referimos están en un plano coordenado fijo. Como es costumbre, usaremos frecuentemente el término recta en lugar de línea recta.

12.1 PENDIENTE DE UNA RECTA

Sean ***l*** *una línea recta no paralela al eje y, y* $P_1(x_1,y_1)$ *y* $P_2(x_2,y_2)$ *dos puntos diferentes sobre* ***l****. Entonces la pendiente* ***m*** *de* ***l*** *está dada por:*

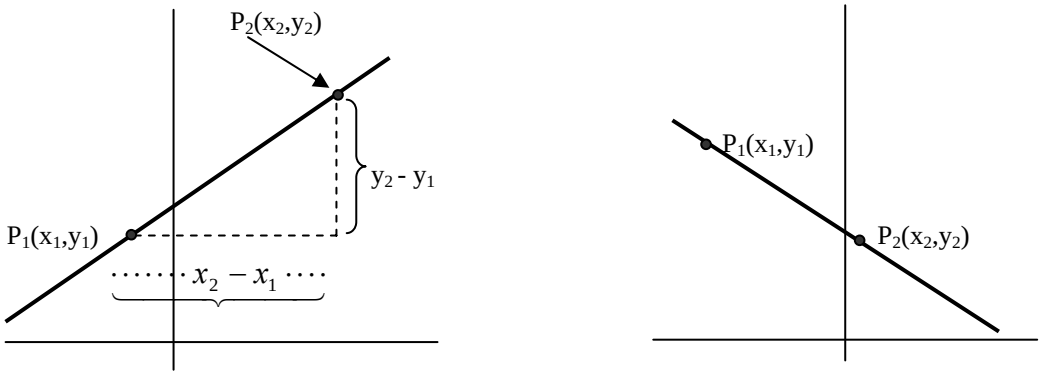
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si ***l*** *es paralela al eje y, entonces no está definida su pendiente.*

El numerador $y_2 - y_1$ *en la fórmula para* ***m****, mide el cambio en la dirección vertical al movernos de* P_1 *a* P_2 *y el denominador* $x_2 - x_1$ *mide el cambio horizontal al ir de* P_1 *a* P_2*. Para encontrar la pendiente de una recta no importa cuál de los puntos se llama* P_1 *y cuál* P_2 *ya que:*

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

En consecuencia podemos suponer que los puntos están numerados de manera tal que $x_1 < x_2$ *como en la figura 1. En este caso* $x_2 - x_1 > 0$ *y por lo tanto la pendiente es positiva, negativa o cero si* $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$ *ó* $y_2 = y_1$ *respectivamente. La pendiente de la recta que se muestra en (a) de la figura 1 es positiva mientras que la pendiente de la recta en (b) de la figura 1 es negativa. La pendiente es cero si y sólo si la recta es horizontal. Si la pendiente es positiva, entonces a medida que crecen las abscisas de los puntos, también crecen las ordenadas y decimos que la recta sube. Si la pendiente es negativa, entonces a medida que las abscisas crecen, las ordenadas correspondientes decrecen y decimos que la recta baja.*



(a) Pendiente positiva *(b) Pendiente negativa*

Figura 1

Es importante notar que la definición de pendiente no depende de los dos puntos que se eligen sobre ***l****, ya que si se usan otros puntos* $P'_1(x'_1, y'_1)$ *y* $P'_2(x'_2, y'_2)$*, entonces como se ve en la figura 2, el triángulo con vértices* P'_1, P'_2 *y* $P'_3(x'_2, y'_1)$ *es semejante al triángulo con vértices* P_1, P_2 *y* $P_3(x_2, y_1)$*. Como las razones de lados correspondientes son iguales concluimos que:*

[2] Earl W. Swokowski. Cálculo con geometría analítica. Grupo Editorial Iberoamérica

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

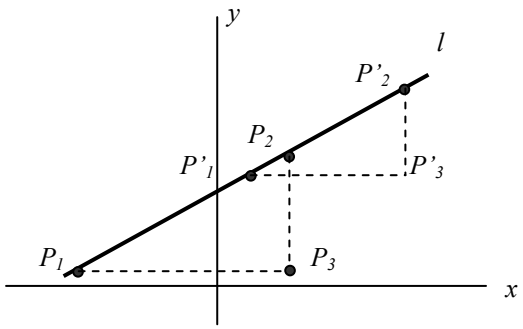


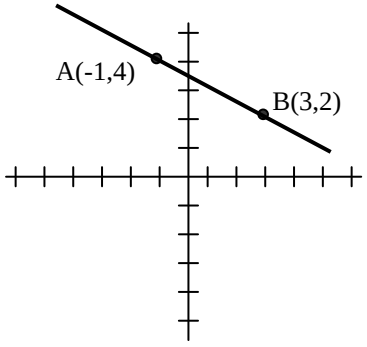
Figura 2

Ejemplo número 1:
Dibuje las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos y halle sus pendientes.
a) A(-1,4) y B(3,2) *b) A(2,5) y B(-2,-1)* *c) A(4,3) y B(-2,3)* *d) A(4,-1) y B(4,4)*

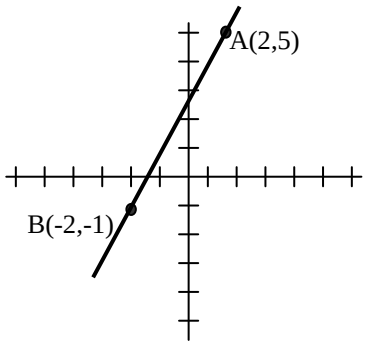
Las rectas están dibujadas en la figura 3. Usando el modelo para calcular la pendiente obtenemos para los incisos a), b) y c).

a) $m = \frac{2-4}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ *b)* $m = \frac{5-(-1)}{2-(-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ *c)* $m = \frac{3-3}{-2-4} = \frac{0}{-6} = 0$

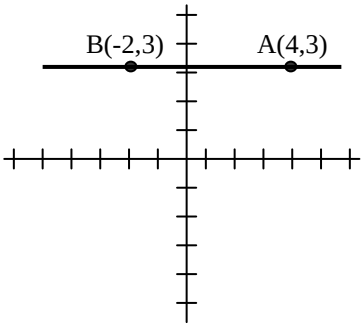
d) La pendiente no está definida ya que la recta es vertical. Esto también se ve al intentar usar el modelo, ya que el denominador $x_2 - x_1$ es cero.



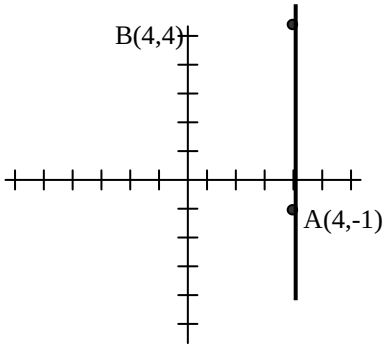
a) m = -1/2



b) m = 3/2



c) m = 0



d) m no está definida

Figura 3

Sea ***l*** una recta no paralela al *eje x* y ***P*** el punto de intersección de ***l*** con el *eje x*. Entonces la inclinación de ***l*** es el ángulo α más pequeño tal que al girar el *eje x* alrededor de ***P*** en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj éste coincida con ***l***. Si ***l*** es paralela al *eje x*, entonces $\alpha = 0°$.

*Si **l** no es horizontal, entonces $0° < \alpha < 180°$. La recta mostrada en (a) de la figura 4 ilustra el caso en el que $0° < \alpha < 90°$ y la recta en (b) ilustra el caso en el que $90° < \alpha < 180°$. Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma inclinación.*

El siguiente teorema muestra la conexión entre la pendiente y la inclinación de una recta. En la demostración usaremos la definición de la tangente de un ángulo.

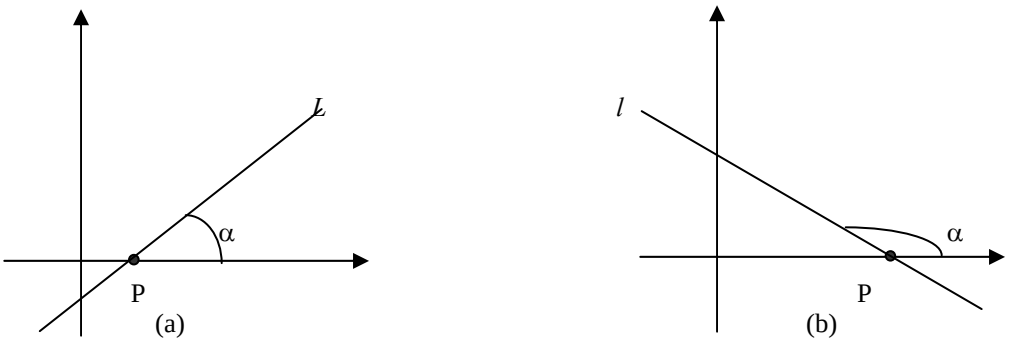


Figura 4 Inclinación α de una recta

*Teorema: Si una recta tiene pendiente **m** e inclinación α, entonces **m = tan α**. La demostración al enunciado anterior se da a continuación:*

*En la figura 5 está dibujada una recta típica cuya inclinación es un ángulo agudo. Como se ilustra en la figura, sea **l**' una recta que pasa por el origen paralela a **l**. Elija cualquier punto (x, y) sobre **l**' con $y > 0$. Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos distintos sobre **l** con $y_2 > y_1$, entonces usando la semejanza de los triángulos y la definición de tangente de un ángulo obtenemos:*

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

$$\therefore \tan\alpha = m$$

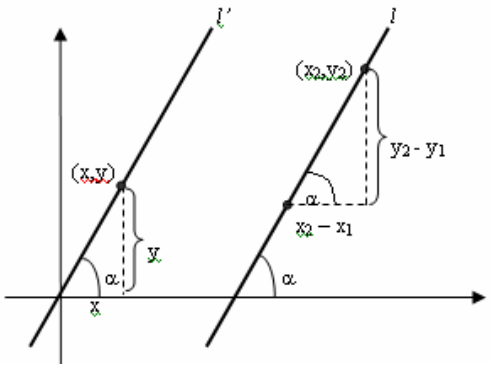


Figura 5

COROLARIO

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 Son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$

Demostración. Si las rectas tienen inclinaciones α_1 y α_2 entonces son paralelas si y sólo si $\alpha_1 = \alpha_2$ ó equivalentemente si y sólo si $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$. El corolario se deduce del teorema anterior.

TEOREMA

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son Perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

Demostración. Si α_1 y α_2 denotan las inclinaciones de las rectas, entonces por el teorema que dice: Si una recta tiene pendiente ***m*** *e inclinación* ***α****, entonces* ***m = tan α****.*

$$m_1 = \tan \alpha_1 \qquad y \qquad m_2 = \tan \alpha_2.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_2 > \alpha_1$ como se muestra en la figura 6. Si ***θ*** *es el ángulo indicado en la figura, entonces:*

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta, \qquad \text{ó} \qquad \theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

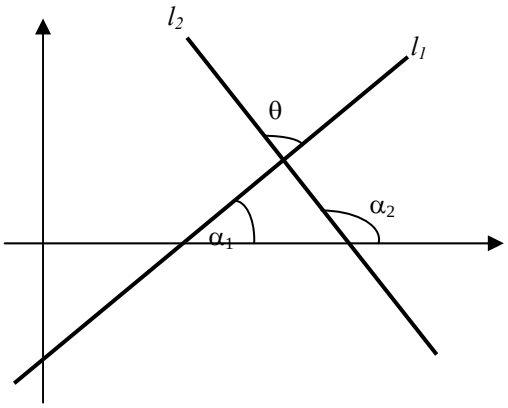


Figura 6

Usando una identidad trigonométrica:

$$\tan \theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} \qquad \text{ó} \qquad \tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Por definición las rectas son perpendiculares si y sólo si $\theta = 90°$ ó, equivalentemente, si y sólo si tan θ no está definida. Sin embargo, por la fórmula anterior, tan θ no está definida si y sólo si $1 + m_1m_2 = 0$ ó $m_1m_2 = -1$, que es lo que queríamos demostrar. Aunque hablamos de la figura 6, se puede usar un argumento semejante independientemente de las magnitudes de α_1 y α_2, o del punto donde se intersecan las rectas.

Ejemplo número 2:
Demuestre que el triángulo con vértices A(-1,-3), B(6,1) y C(2,-5) es un triángulo rectángulo.

Si m_1 es la pendiente de la recta que pasa por B y C y m_2 es la pendiente de la recta que pasa por A y C, entonces utilizando el modelo para cálculo de pendiente tenemos que:

$$m_1 = \frac{1-(-5)}{6-2} = \frac{3}{2}; \quad m_2 = \frac{-3-(-5)}{-1-2} = -\frac{2}{3}$$

Como $m_1m_2 = -1$, el ángulo en C es recto.
La ecuación $y = b$ donde b es un número real puede considerarse igual a la ecuación $0 \cdot x + y = b$ en dos variables x y y. Las soluciones son todas las parejas ordenadas de la forma (x, b) donde x tiene cualquier valor y b es fijo. Concluimos que la gráfica de $y = b$ es una línea recta paralela al eje x cuya ordenada al origen es b. Análogamente la gráfica de la ecuación $x = a$ es una recta paralela al eje y cuya abscisa al origen es a. Las gráficas están dibujadas en la figura 7.

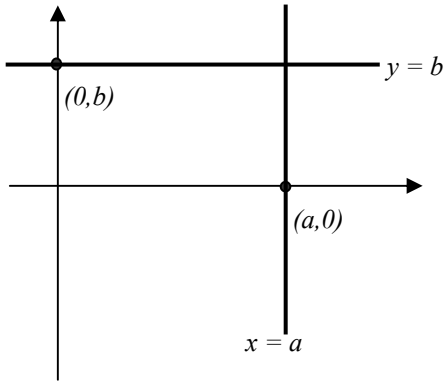


Figura 7

12.2 ECUACIÓN DE LA RECTA

Hallemos ahora una ecuación de la recta **l** *con pendiente* **m** *que pasa por el punto* $P_1(x_1, y_1)$ *(únicamente existe una recta tal). Si P(x, y) es cualquier punto con* $x \neq x_1$, *entonces* **P** *está sobre* **l** *si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por* P_1 *y P es* **m**, *es decir:* $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Esta ecuación se puede escribir en la forma: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Note que (x_1, y_1) *también es una solución de la ecuación anterior y por lo tanto los puntos sobre* **l** *son precisamente aquellos que corresponden a las soluciones.*

La ecuación de la recta conocido un punto $P_1(x_1, y_1)$ *y su pendiente m es:* $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ejemplo número 3:
Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1, 7) y B(-3, 2)

Calculando la pendiente m de la recta obtenemos: $m = \dfrac{7-2}{1-(-3)} = \dfrac{5}{4}$

Sustituyendo las coordenadas de A en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ *obtenemos:* $y - 7 = \dfrac{5}{4}(x - 1)$

que es equivalente a: $4y - 28 = 5x - 5$ *o bien* $5x - 4y + 23 = 0$

Habríamos obtenido la misma ecuación si hubiéramos utilizado el punto B en vez del punto A.

La ecuación de la recta conocido la pendiente y la ordenada al origen:

> *La gráfica de la ecuación* $y = mx + b$ *es una recta con pendiente m y ordenada al origen b.*

Una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ *tal que a y b no son cero simultáneamente, se llama una ecuación lineal. Se sigue de la discusión en esta sección que toda línea recta es la gráfica de una ecuación lineal e, inversamente, la gráfica de una ecuación lineal es una línea recta. Por simplicidad usaremos el término la recta* $ax + by + c = 0$, *en lugar de la expresión más precisa la recta con ecuación* $ax + by + c = 0$.

Ejemplo número 4:
Dibuje la gráfica de la ecuación 2x – 5y = 8.
Como la gráfica es una línea recta, es suficiente hallar dos puntos sobre la gráfica. Sustituyendo $y = 0$ *en la ecuación obtenemos la abscisa al origen 4, y sustituyendo x = 0 obtenemos la ordenada al origen –8/5. Esto nos lleva a la gráfica dibujada en la figura 8.*

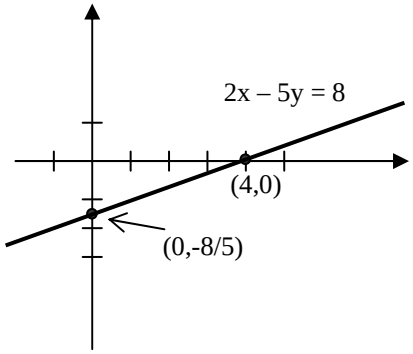


Figura 8

Otra manera para obtener la solución consiste en expresar la ecuación dada en la forma $y = ax + b$ *. Para hacerlo primero despejamos el término que contiene a y de un lado de la ecuación obteniendo:* $5y = 2x - 8$

En seguida dividimos ambos lados por 5 y obtenemos: $y = \frac{2}{5}x + \left(\frac{-8}{5}\right)$

Comparando con $y = mx + b$ *vemos que la pendiente es* $m = \frac{2}{5}$ *y que la ordenada al origen es* $b = -\frac{8}{5}$

Luego podemos trazar la recta que pasa por $\left(0, -\frac{8}{5}\right)$ *con pendiente* $\frac{2}{5}$.

12.3 GRAFICACIÓN POR PARÁMETROS

[3]*La gráfica de la ecuación* $y = x$ *está dada en la Figura 9,* y *representa una recta que pasa por el origen (0, 0), con un ángulo de inclinación* $\theta = \frac{\pi}{4}$ *(45 grados) respecto al eje de las abscisas.*

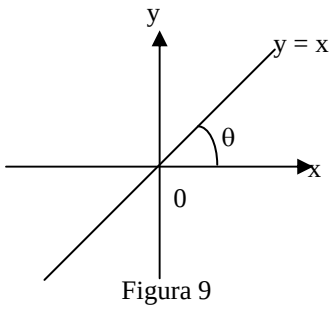


Figura 9

Si a esta ecuación le agregamos una constante <u>a</u> como factor $y = ax$ *, analicemos que sucede con la función identidad gráficamente. El parámetro <u>a</u> deja en libertad a la función identidad para que gire sobre (0,0), dependiendo del valor que tome <u>a</u>. Y si consideramos que <u>a</u> es cualquier número real, entonces la ecuación* $y = ax$ *, representa gráficamente la familia de todas las rectas que pasan por (0,0) y el caso a = 1 es la llamada función identidad.*

[3] Moreno M. A / Núñez J. / Miembros del Programa Nacional de Formalización y Actualización de Profesores de Matemáticas. Nodo Regional sonora; Sonora (UNISON).Graficación de funciones.

En la Figura 10 se representan los casos correspondientes a los valores que toma el parámetro a.

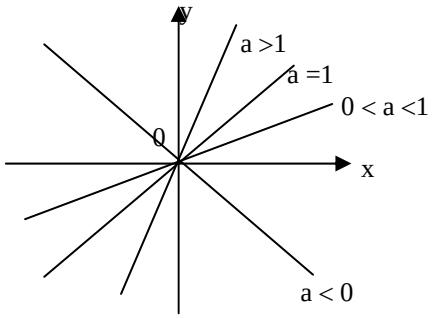


Figura 10

Si $0 < a < 1$, la recta varía su inclinación en el intervalo $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$; $a > 1$, la recta varía su inclinación en el intervalo $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$; si $a < 0$, la recta varía su inclinación en el intervalo $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Así, todas las rectas que pasan por el origen tienen la forma $y = ax$, dependiendo su inclinación del parámetro a.

Si la ecuación $y = ax$ le sumamos una constante b, $y = ax + b$, vemos que ahora el parámetro b deja en libertad a la función para que se desplace verticalmente, sobre el eje de las ordenadas, dependiendo del valor que tome b.

Si b toma valores positivos, la función se desplaza hacia arriba, si b toma valores negativos, la función se desplaza hacia abajo, de tal manera que si b = 0, estamos en el caso $y = ax$. Ver Figura 11 y figura 12.

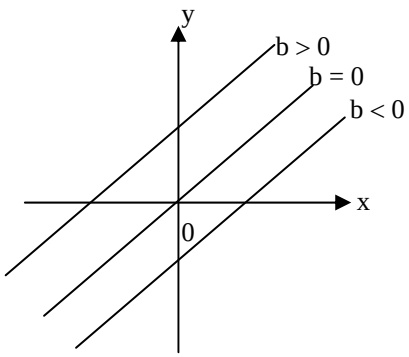


Figura 11
y = ax+b, a > 0

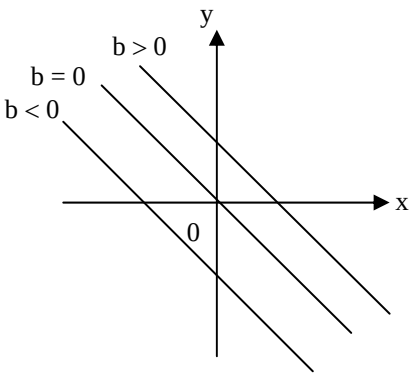


Figura 12
y = ax + b, a < 0

Si consideramos que b, al igual que a, es cualquier número real, la ecuación $y = ax + b$, gráficamente representa, todas las rectas contenidas en el plano, y es la forma general de la función lineal.

Conociendo los parámetros a y b, podemos determinar la inclinación y un punto de la recta, respectivamente; el punto conocido es (0, b), donde la recta interseca al eje de las ordenadas y, así, obtener una gráfica aproximada de la función.

Una estrategia amparada con lo anteriormente expuesto, radica en expresar la ecuación de la línea recta en la forma $y = mx + b$, de tal suerte que podamos identificar claramente la ordenada al origen, es pues el valor de

b, ubicando dicho punto en el sistema de coordenadas. Consideremos el caso $y = 3x + 1$, para ejemplificar lo que estamos describiendo. Una vez ubicado el punto $(0, b)$ (vea figura 13) proseguimos a analizar el valor correspondiente a la pendiente, si m = 3 significa un aumento en la distancia horizontal de 1 contra un aumento vertical de 3, partiendo de la ordenada al origen. Se ubica entonces el punto (1, 4) y luego se traza la recta (figura 14) tocando ambos puntos.

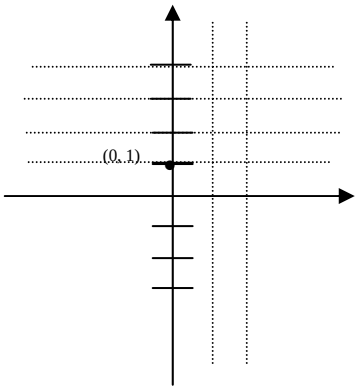


Figura 13

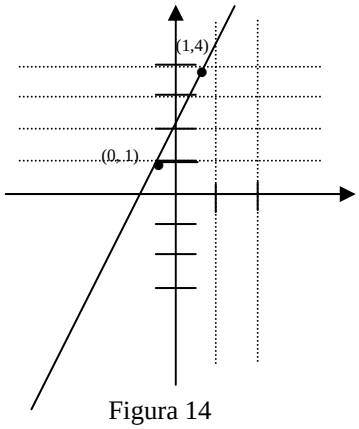
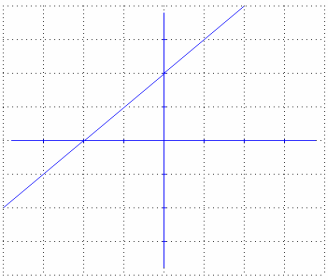


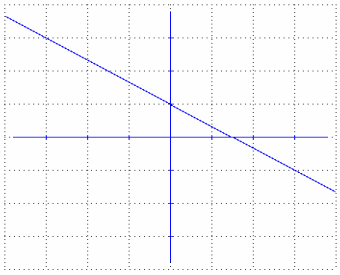
Figura 14

De hecho con esta estrategia —manipulando el concepto de pendiente y ordenada al origen— es factible transitar de un contexto gráfico a uno algebraico con mayor facilidad. Veamos la siguiente gráfica.



Ubiquemos primeramente la ordenada al origen, puede verse que es (0, 2) partiendo de ese punto tenemos que avanzar 1 unidad horizontalmente y 1 unidad verticalmente para llegar al punto (1, 3), con esto sabemos que la pendiente es m = 1, y la ecuación de la recta es: $y = x + 2$

Para afianzar este tránsito consideremos la siguiente gráfica.



Ubiquemos de primera instancia la ordenada al origen, puede verse que es (0, 1) partiendo de ese punto tenemos que avanzar 3 unidades horizontalmente y descender verticalmente 2 unidades para llegar al punto (3, -1), con esto sabemos que la pendiente es m = $-\frac{2}{3}$, (el signo menos se genera por el descenso) y la ecuación de la recta es:

$$y = -\frac{2}{3}x + 1$$

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1.Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q
a) P(1, 5), Q(4, 11) b) P(1, 6), Q(4, 3) c) P(3, 3), Q(1, 6)

2.Diga (con su respectivo argumento) cuáles de las siguientes parejas de rectas son paralelas o perpendiculares.

a) $y-1=5x$ $\quad y=-\frac{1}{5}x+1$

b) $y-3x-2=0$ $\quad y=3x+1$

c) $y=5x+1$ $\quad y=-\frac{1}{5}x+\frac{31}{5}$

d) $y=2x+5$ $\quad 2y+x=4$

3.Encuentre la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas en cada uno de los ejercicios.
a) Pasa por (2, -3), pendiente 6 b) Pasa por (-1, 4), pendiente –3 c) Pasa por (4, 5) paralela al eje x
d) Pasa por (1, -6) paralela a la recta $2x+3y+4=0$ e) Pasa por (-1, -2), perpendicular a la recta $4x-8y=1$

4.Elabore las gráficas de las siguientes expresiones.

a) $y=x$ b) $y=2x$ c) $y=4x$ d) $y=\frac{1}{2}x$ e) $y=\frac{1}{4}x$

f) $y=-x$ g) $y=-2x$ h) $y=-4x$ i) $y=-\frac{1}{2}x$ j) $y=-\frac{1}{3}x$

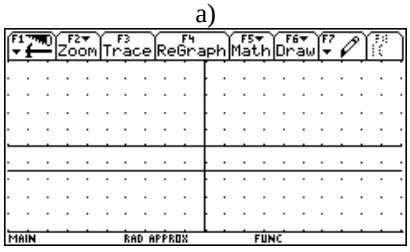
5.Elabore las gráficas de las siguientes expresiones.

a) $y=x+1$ b) $y=x+3$ c) $y=3x+2$ d) $y=-2x+1$ e) $y=-3x-2$

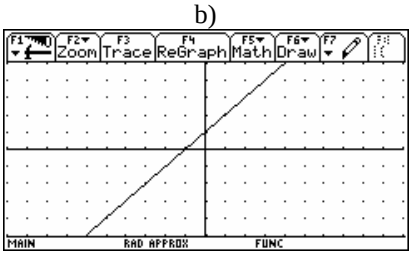
f) $y=\frac{1}{2}x+3$ g) $y=\frac{-2}{3}x+1$ h) $y=\frac{2}{5}x-1$ i) $y=-\frac{1}{2}x-3$

6.Basándose en la gráfica que se presenta, establezca la expresión algebraica correspondiente.

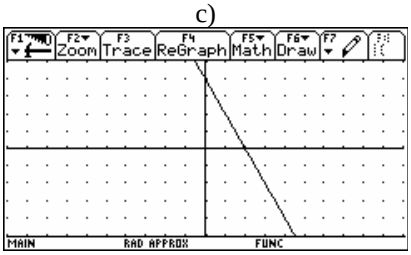
a)



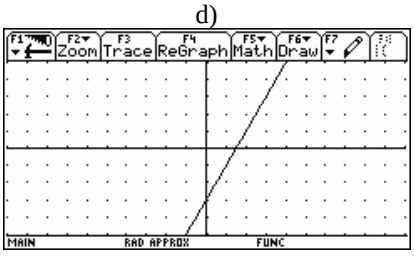
b)



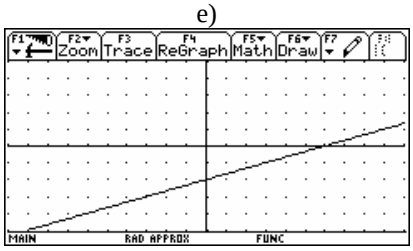
c)



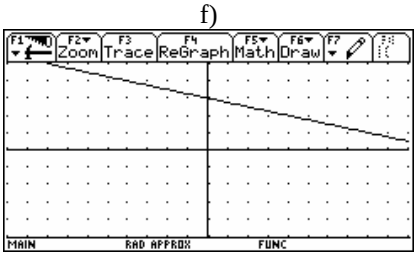
d)



e)



f)



CAPÍTULO 13
CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

13.1 CÍRCULOS

[4]*Una aplicación directa de la fórmula de la distancia permite definir los círculos en el plano.*
La definición de un círculo en el plano puede hacerse de la siguiente manera:
Sea (h, k) un punto en el plano y sea r > 0. El conjunto de los puntos (x, y) cuya distancia al punto (h, k) es r se llama círculo de centro (h, k) y radio r. Vea figura 1.

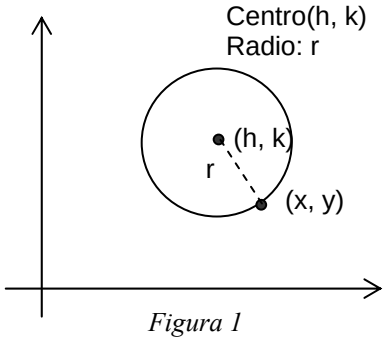


Figura 1

Podemos utilizar la fórmula de la distancia para escribir la ecuación de dicho círculo como:

$$\text{[distancia entre (h, k) y (x, y)]} = r \text{ luego: } \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

Elevando al cuadrado ambos lados de esta igualdad, se obtiene la ecuación canónica del círculo.

Teorema: Ecuación canónica del círculo
El punto (x, y) está en el círculo de radio r y centro (h, k) si y sólo si: $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$
De acuerdo al teorema anterior, un círculo centrado al origen tiene por ecuación canónica:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si r = 1, la gráfica de esa ecuación se llama círculo unidad.

Ejemplo número 1:
Hallando la ecuación de un círculo
El punto (3,4) está en un círculo de centro (-1,2), como se ve en la figura 2. Halle la ecuación de ese círculo.

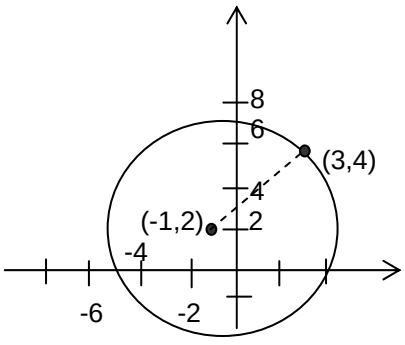


Figura 2
$(x+1)^2+(y-2)^2 = 20$

[4] Larson / Hostetler / Edwards. Cálculo. Quinta edición. Editorial Mc Graw Hill

Su radio es la distancia entre (-1,2) y (3,4), sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$r = \sqrt{[3-(-1)]^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Por tanto, la ecuación canónica resultante de ese círculo es:

$$[x-(-1)]^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$$

Efectuando los cuadrados y simplificando, la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ *se convierte en la forma general de la ecuación de un círculo:* $Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + F = 0$, $A \neq 0$

Para convertir esta ecuación a la forma canónica $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ *usamos un proceso que consiste en completar el cuadrado.*

Ejemplo número 2:
Completando el cuadrado
Dibuje el círculo cuya ecuación en forma general es: $4x^2 + 4y^2 + 20x - 16y + 37 = 0$

Para completar el cuadrado, dividimos primero por 4 de modo que los coeficientes de x^2 *y* y^2 *sean 1.*

$4x^2 + 4y^2 + 20x - 16y + 37 = 0$	*Forma general*
$x^2 + y^2 + 5x - 4y + \frac{37}{4} = 0$	*Dividiendo por 4*
$\left(x^2 + 5x + _\right) + \left(y^2 - 4y + _\right) = -\frac{37}{4}$	*Agrupando términos*
$\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + \left(y^2 - 4y + 4\right) = -\frac{37}{4} + \frac{25}{4} + 4$	*Completando el cuadrado*
$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 1$	*Forma estándar*

Nótese que completamos el cuadrado añadiendo el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos lados de la ecuación. En consecuencia, el círculo está centrado en (-5/2, 2) y su radio es 1, como puede verse en la figura 3.

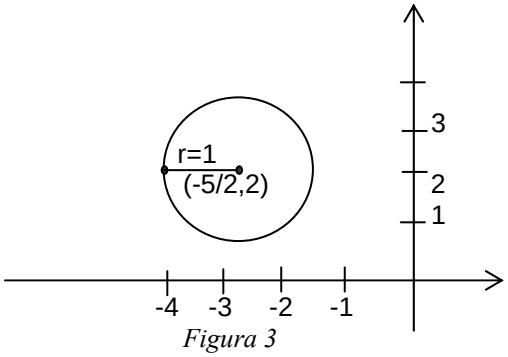


Figura 3

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-2)^2=1$$

En los tiempos en que nació la geometría analítica de la mano de Pierre de Fermat (1601-1655) y René Descartes (1596-1650), las dos grandes ramas de la matemática, álgebra y geometría, eran independientes entre sí. Los círculos pertenecían a la geometría, las ecuaciones al álgebra. La identificación de ambas es ya obra de lo que hoy llamamos geometría analítica. Es importante que el lector desarrolle su capacidad de manejar la geometría analítica para ir y venir entre álgebra y geometría. Así, en el Ejemplo número 1 nos da una descripción geométrica de un círculo y se solicita que halle su ecuación algebraica. Estamos moviéndonos, pues, de la geometría al álgebra. El ejemplo número 2 hacia la transición inversa.

1.Dada una gráfica, halle su ecuación.

Geometría → *Álgebra*

2.Dada una ecuación, halle su gráfica.

Álgebra → *Geometría*

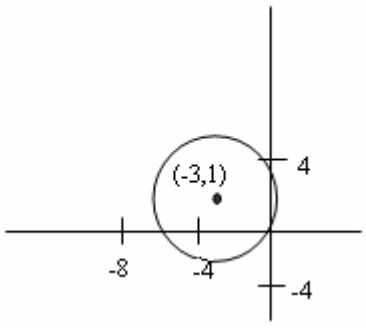
ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

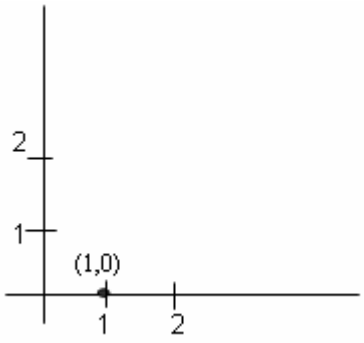
1.En los ejercicios siguientes complete el cuadrado.

a) x^2+5x b) x^2+8x+7 c) $4x^2-4x-39$ d) $5x^2+x$

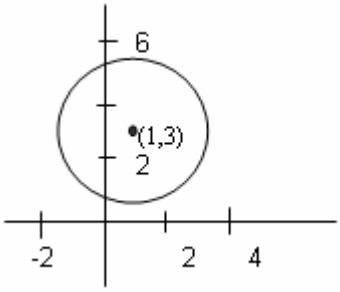
2.En los siguientes ejercicios, empareje cada ecuación con su gráfica:

a) $x^2+y^2=1$ b) $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

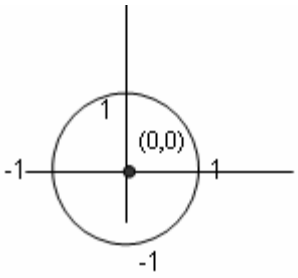




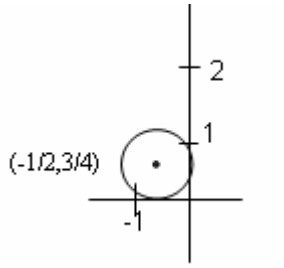
c) $(x-1)^2+y^2=0$



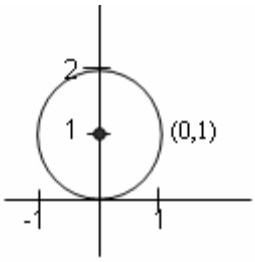
d) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{4}$



e) $(x+3)^2+(y-1)^2=16$



f) $x^2+(y-1)^2=1$



3.En los ejercicios siguientes, escriba la ecuación del círculo en forma general.

a) Centro: (0,0); radio: 3
b) Centro: (0,0); radio: 5
c) Centro: (2,-1); radio: 4
d) Centro: (-4,3); radio 5/8
e) Centro: (-1,2); punto del círculo: (0,0)
f) Centro: (3,-2); punto del círculo: (-1,1)
g) Puntos terminales del diámetro: (2,5), (4,-1)
h) Extremos del diámetro: (1,1),(-1,-1)
i) Puntos del círculo: (0,0), (0,8), (6,0)
j) Puntos del círculo: (1,-1), (2,-2), (0,-2)

4.En los Ejercicios siguientes, escriba cada ecuación en forma canónica y esboce la gráfica.

a) $x^2+y^2-2x+6y+6=0$
b) $x^2+y^2+8x-4y+17=0$
c) $x^2+y^2-2x+6y+10=0$
d) $3x^2+3y^2-6y-1=0$
e) $2x^2+2y^2-2x-2y-3=0$
f) $4x^2+4y^2-4x+2y-1=0$
g) $16x^2+16y^2+16x+40y-7=0$
h) $x^2+y^2-4x+2y+3=0$

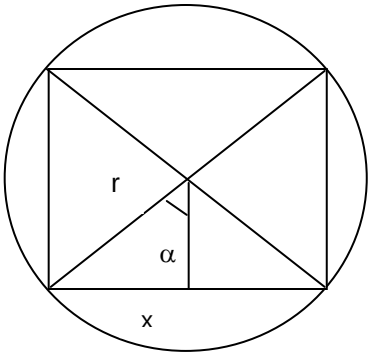
13.2 CIRCUNFERENCIA

En el apartado anterior el tratamiento hecho se dirigió a la superficie plana (círculo), en particular su ecuación general y canónica, su gráfica y la estrategia para transitar de un contexto geométrico al algebraico y viceversa.

En ocasiones se presentan confusiones debido al uso indistinto de los términos circunferencia y círculo, aquí aprovechamos la ocasión para distinguirlos, mientras que el círculo es la superficie plana, la línea curva cerrada que limita o acota a la superficie citada es la circunferencia.

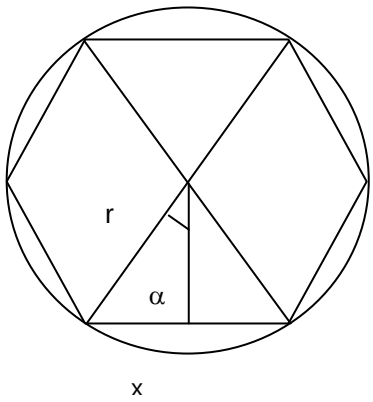
La medida de la longitud de la curva, conocido como perímetro del círculo es singularmente importante, por la parte geométrica y por involucrar un número real irracional llamado pi y denotado por π. Intentemos establecer la medida de la circunferencia de un círculo de radio r.

Inscribamos un polígono regular de cuatro lados en un círculo y calculemos su perímetro.



Sea $\alpha = 360 \text{ grados} / [(2)(4)]$ donde 4 es el número de lados del polígono.
Sea $x = r \operatorname{sen} \alpha$. Sustituyendo el valor de α, obtenemos:
$x = r \operatorname{sen} (180 / 4)$ donde 4 es el número de lados del polígono.
Ahora el perímetro P del polígono estará dado por:
$P = 4 (2x)$ nuevamente 4 corresponde al número de lados. Sustituyendo el valor de x, tenemos que:
$P = 2r\ 4 \operatorname{sen} (180 / 4)$, finalmente obtenemos:
$P = (2r)(2.828427124746)$

Si inscribimos un nuevo polígono regular de 6 lados, la figura quedaría de la siguiente manera.



Sea α = 360 grados / [(2)(6)] donde 6 es el número de lados del polígono.
Sea $x = r \operatorname{sen} \alpha$. Sustituyendo el valor de α, obtenemos:
$x = r \operatorname{sen} (180 / 6)$ donde 6 es el número de lados del polígono.
Ahora el perímetro P del polígono estará dado por:
$P = 6 (2x)$ nuevamente 6 corresponde al número de lados. Sustituyendo el valor de x, tenemos que:
$P = (2r)[6 \operatorname{sen} (180 / 6)]$
$P = (2r)(3)$

Para observar lo que sucede nos apoyaremos de las siguientes preguntas:
¿Qué perímetro es mayor, el de la circunferencia o el del polígono regular de 4 lados?
¿Qué perímetro es mayor, el de la circunferencia o el del polígono regular de 6 lados?
¿Qué perímetro es mayor, el del polígono regular de 6 lados o el del polígono regular de 4 lados?
Las respuestas a estas preguntas sugerirán que si inscribimos polígonos regulares con mayor número de lados, el perímetro de estos será cada vez más cercano al perímetro de la circunferencia. En este sentido, consideremos un polígono regular de n lados (n > 3), de tal manera que el perímetro respectivo es:

$$P = 2r \cdot n \cdot sen\left(\frac{180}{n}\right)$$

Es decir que el perímetro del círculo es $P \approx 2r \cdot n \cdot sen\left(\frac{180}{n}\right)$ para valores de n considerablemente grande.

Ejemplifiquemos con un círculo de radio r = 1 *para determinar su perímetro. Utilicemos varios polígonos regulares incrementando el número de sus lados. La tabla siguiente resume la consideración correspondiente.*

Lados (n)	*Perímetro (P)*
4	(2) 2.828427124746
16	(2) 3.121445152258
64	(2) 3.140331156955
256	(2) 3.141513801144
1024	(2) 3.141587725277
4096	(2) 3.14159234557

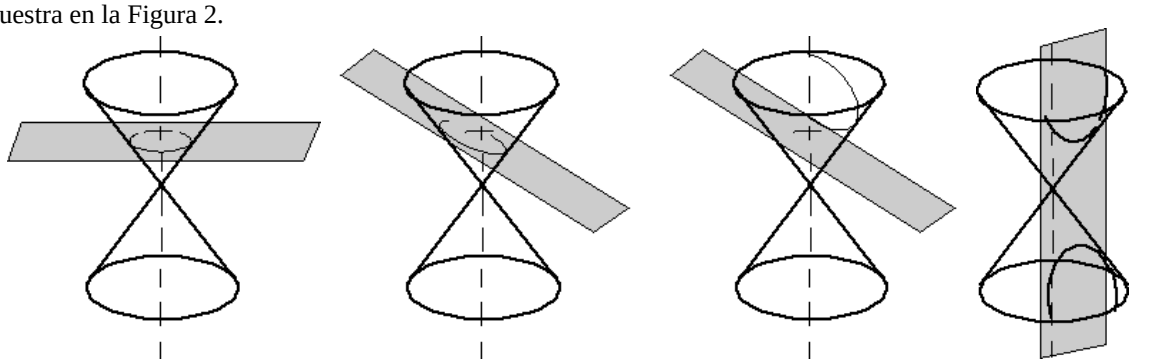
Por lo que podemos decir que el perímetro del círculo es aproximadamente 6.28318469114
Aunado al hecho de que el modelo para calcular el perímetro de un círculo es $P = 2\pi r$, y dado que consideramos que el radio $r = 1$ entonces $\pi \approx \frac{P}{2}$ concluyendo $\pi \approx 3.14159234557$

En un sentido estricto el valor de π es construido a través del concepto matemático de límite, el cual es tratado en el curso de Cálculo Diferencial.

13.3 SECCIONES CÓNICAS

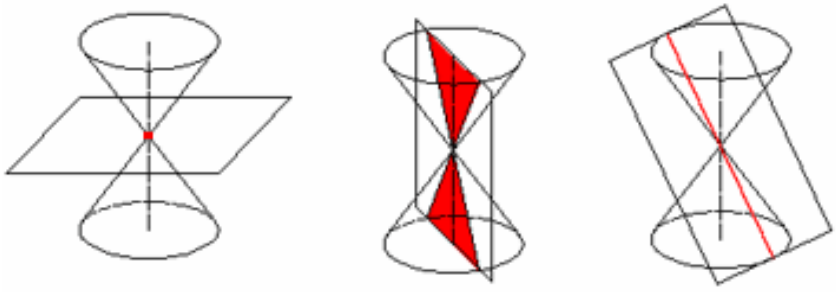
13.3.1 INTRODUCCIÓN

Toda sección cónica (o simplemente cónica) puede ser descrita como la intersección de un plano y un cono de dos hojas. En la Figura 1 se observa que las cuatro cónicas básicas el plano de intersección no pasa por el vértice del cono. Cuando el plano pasa por el vértice, la figura que resulta es una cónica degenerada, como se muestra en la Figura 2.



a) Circunferencia b) Elipse c) Parábola d) Hipérbola

Figura 4: Secciones Canónicas



a) Punto b) Dos Rectas c) Recta

Figura 5: Cónicas Degeneradas

En el capitulo anterior se vio ya la Circunferencia, en éste capítulo el estudio se centrará en la Elipse, la Parábola y la Hipérbola.

13.3.2 ECUACIONES GENERALES DE LAS CÓNICAS.

La ecuación general de segundo con dos variables en la forma: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$ corresponde a una cónica.

- Si carece del término Bxy y $A \equiv C$, representa una circunferencia y adopta la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$

- Si carece del término Bxy y tiene uno solo de los cuadráticos, representa una parábola vertical u horizontal y la ecuación adopta las formas:
  $y^2+Dx+Ey+F = 0$ parábola horizontal
  $x^2+Dx+Ey+F = 0$ parábola vertical

- Si carece del término Bxy y A y C tienen signos iguales, representa una elipse y la ecuación adopta la forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$

- Si carece del término Bxy y A y C tienen signos diferentes, representa una hipérbola y la ecuación adopta la forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$

Dada la ecuación general de las cónicas, se puede identificar a que sección cónica pertenece usando el discriminante o también llamado indicador, que es:

Si $B^2 - 4AC < 0$ es una elipse.
Si $B^2 - 4AC = 0$ es una parábola.
Si $B^2 - 4AC > 0$ es una hipérbola.

Ejemplo número 3: identificar la cónica descrita para la ecuación $x^2 + 10y^2 – 4x – 20y + 4 = 0$

Primero se identifican los valores para A, B y C:

$A = 1$, $B = 0$ y $C = 10$

Luego se realiza la operación:

$(0)^2 – 4(1)(10) = - 40$

Y se concluye:

Dado que el resultado es negativo, la ecuación representa una elipse.

Ejemplo número 4: identificar la cónica descrita para la ecuación $16x^2$ v $9y^2 – 144 = 0$

Identificando los valores para A, B y C:

$A = 16$, $B = 0$ y $C = - 9$

Se realiza la operación:

$(0)^2 – 4(16)(-9) = 576$

Conclusión:

Dado que el resultado es positivo, la ecuación representa una hipérbola.

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

5. Identificar la cónica descrita para la ecuación dada.

a) $y^2 – 12x + 4y – 44 = 0$
b) $x^2 – 12x – 10y + 36 = 0$
c) $9x^2 – 4y^2 + 36x – 16y – 16 = 0$

13.3.3 LA ELIPSE

TEOREMA 1: ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA ELIPSE

La forma estándar o canónica de la ecuación de una elipse con centro (h, k) y longitudes de los ejes mayor y menor $2a$ y $2b$, respectivamente, donde $a > b$, es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ El eje mayor es horizontal

ó

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$ El eje mayor es vertical

Los focos se encuentran en el eje mayor a c unidades del centro, con $c^2 = a^2 - b^2$.

El lado recto de la elipse es una línea perpendicular al eje focal que pasa por el foco. Su ecuación es:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

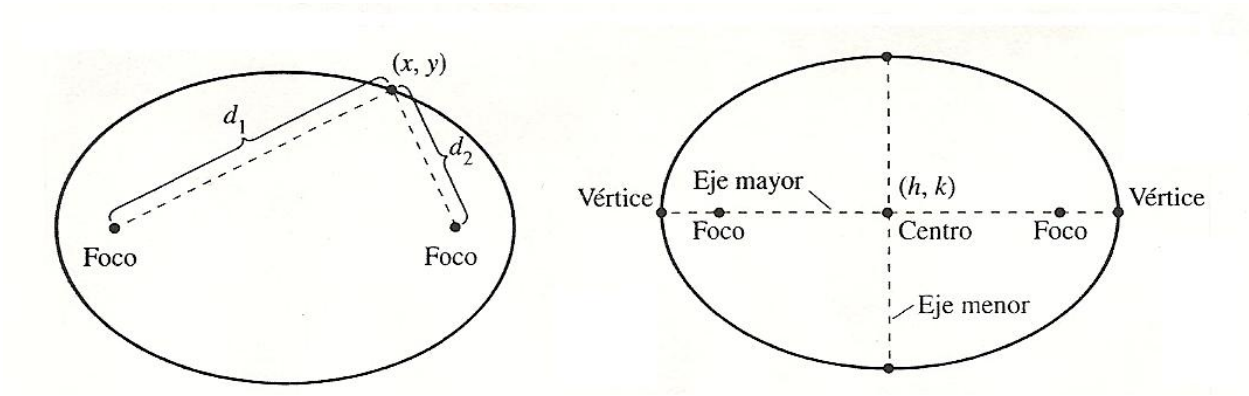


Figura 6: Elementos de una Elipse

Ejemplo número 5:

Determinar la ecuación general de la elipse con centro en el punto (2, -3), uno de sus focos es el punto (-1,-3) y su semieje menor es igual a 4

.

a) Determinar si el eje mayor es horizontal o vertical y ubicar los valores para h y k:

Dado que el centro y uno de los focos comparten la misma coordenada y (-3), entonces el eje mayor es vertical. Los valores para h y k son: h = 2 y k = -3.

b) Obtener los valores para a y b:

De acuerdo con el enunciado del problema, el semieje menor es 4, entonces b = 4.

Para obtener a es necesario primero saber cuántas unidades hay entre el centro y el foco (valor de c): c = 2 – (-1) = 3

Del Teorema 1 sabemos que: $a = \sqrt{c^2 + b^2}$, por lo tanto $a = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$

c) Sustituir en la ecuación canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y+3)^2}{5^2} = 1$$

d) Obtener la ecuación general:

Desarrollando los binomios al cuadrado y realizando la suma de fracciones se llega a:

$$25x^2 - 16y^2 - 100x + 96y - 156 = 0$$

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

6. Resolver los siguientes problemas:

a) Dada la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ calcular las longitudes del eje mayor y eje menor; las coordenadas de los focos y la longitud del lado recto. Graficar el resultado.

b) Determinar y graficar la ecuación de la elipse cuyo centro se encuentra en el origen, uno de sus focos es el punto (0,3) y su semieje mayor es igual a 5.

c) Empleando la ecuación general, obtener los elementos para la elipse representada por la siguiente ecuación: $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$. Graficar el resultado.

13.3.4 LA PARÁBOLA

TEOREMA 2: ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA PARÁBOLA

La forma estándar o canónica de una parábola con vértice (h, k) y directriz $y = k - p$ es:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \qquad \text{(Eje vertical)}$$

Para la directriz $x = h - p$, la ecuación es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \qquad \text{(Eje horizontal)}$$

El foco se encuentra en el eje a p unidades (distancia dirigida) del vértice. Las coordenadas del foco son las siguientes:

$(h, k+p)$ (Eje vertical)
$(h+p, k)$ (Eje horizontal)

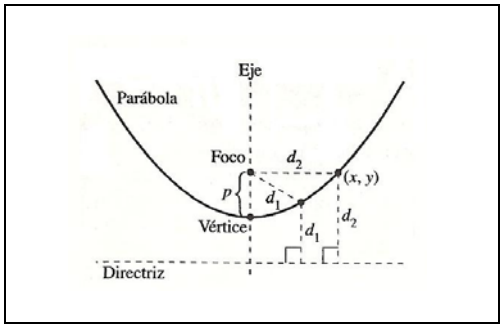


Figura 7: Elementos de la Parábola

Ejemplo número 6:
Encontrar la ecuación general para una parábola cuyo vértice esta en el origen, su eje focal coincide con el eje y, y contiene al punto (4, -2).

a) Determinar si el eje es vertical u horizontal y ubicar los valores de h y k:

Como el eje focal coincide con el eje y, entonces la parábola tiene eje vertical. Dado que el vértice esta en el origen, las coordenadas de h y k son: h = 0, k = 0.

b) Encontrar el valor de p utilizando las coordenadas del vértice y las del punto dado (4,-2):

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
$(4 - 0)^2 = 4p(-2 - 0)$
$(4)^2 = 4p(-2)$
$16 = -8p$
$p = -2$

c) Sustituir en la ecuación canónica las coordenadas de vértice y el valor de p para encontrar la ecuación general:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
$(x - 0)^2 = 4(-2)(y - 0)$
$x^2 = -8y$
$x^2 + 8y = 0$

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

7. Resolver los siguientes problemas:
   a) Determinar la ecuación de la parábola con vértice en (3,4) y foco (3,2) y representarla gráficamente.

   b) Representar gráficamente la siguiente ecuación: $y = ¼\ x^2 - x + 1\ ¼$

   c) Expresar la siguiente ecuación en forma canónica, determinar las coordenadas de foco y el vértice, y construir la grafica: $y^2 + 12x - 6y + 45 = 0$

13.3.5 LA HIPÉRBOLA

TEOREMA 3: ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA HIPÉRBOLA
La forma estándar o canónica de una hipérbola con centro (h, k) es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ El eje transversal es horizontal

ó

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$ El eje transversal es vertical

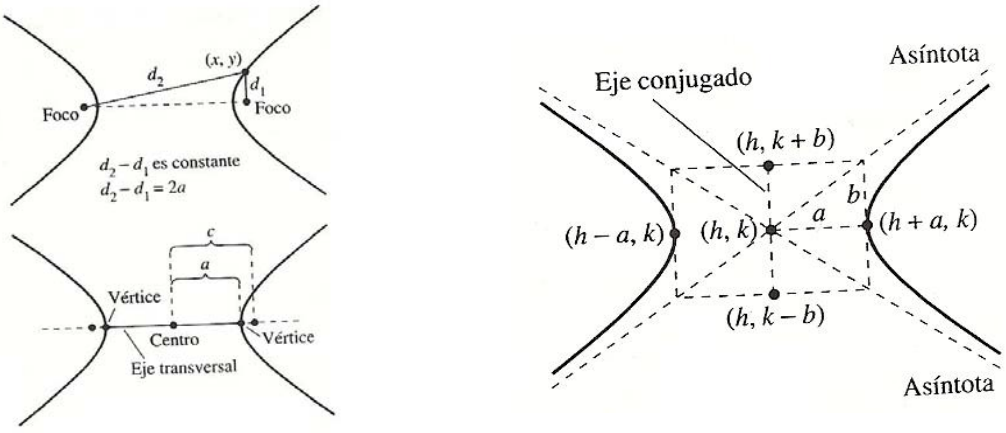


Figura 8: Elementos de la Hipérbola

Los focos se encuentran en el eje mayor a c unidades del centro, con $c^2 = a^2 + b^2$.

TEOREMA 4: ASÍNTOTAS DE UNA HIPÉRBOLA

Si el eje transversal es horizontal, las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = k + \frac{b}{a}(x-h) \qquad \text{y} \qquad y = k - \frac{b}{a}(x-h)$$

Si el eje transversal es vertical, las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = k + \frac{a}{b}(x-h) \qquad \text{y} \qquad y = k - \frac{a}{b}(x-h)$$

Ejemplo número 7:

La ecuación general de una hipérbola es $7y^2 - 9x^2 = 63$. Determinar las coordenadas de los focos, de los vértices y las ecuaciones de las asíntotas.

a) Buscar la forma canónica dividiendo los elementos de ambos lados de la ecuación entre 63:

$$\frac{7y^2}{63} - \frac{9x^2}{63} = \frac{63}{63}$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$$

b) Por el Teorema 3, se puede observar que el eje transversal es vertical, por lo que el eje focal coincide con el eje y. Los valores de a = 3 y b = $\sqrt{7}$, por lo que $c = \sqrt{9+7} = 4$. Con estos datos se tienen las coordenadas de los focos: F (0, 4) y F' (0, -4) y de los vértices: V (0,3) y V' (0,-3).

c) Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \frac{3}{\sqrt{7}}x \quad e \quad y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x$$

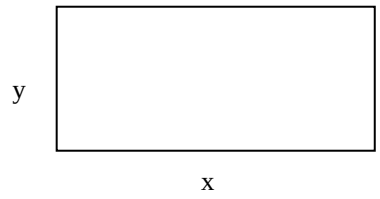
ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

8. Resolver los siguientes problemas:
   a) Determinar la ecuación y la grafica de la hipérbola con centro en el origen, eje focal en el eje y, y que contiene los puntos A (4,6) y B (1,-3).
   b) Determinar la ecuación y la grafica de la hipérbola con centro en C (-4,1) un vértice en V (2,1) y semieje conjugado igual a 4,
   c) Determinar la ecuación de la hipérbola en su forma canónica si la ecuación general es:
   $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$.

CAPÍTULO 14
PERÍMETRO, ÁREA Y VOLUMEN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

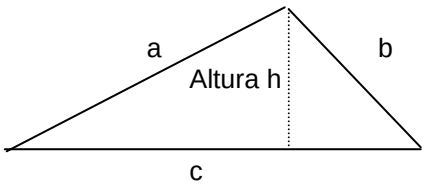
En ésta unidad nos abocaremos particularmente a recapitular los modelos matemáticos de figuras geométricas elementales, en cuanto a su perímetro, área y/o volumen.

1.El rectángulo



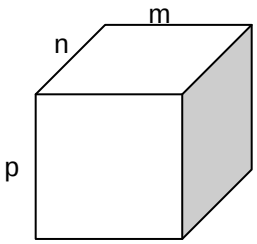
Perímetro $P = 2x + 2y$ Área: $A = xy$ (recuerde: base por altura)

2.El triángulo



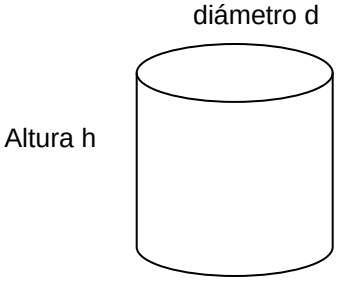
Perímetro $P = a + b + c$ Área: $A = \frac{1}{2}ch$ (base por altura perpendicular a la base por ½)

3.El paralelepípedo



Superficie $S = 2mn + 2pn + 2mp$ Volumen $V = mnp$

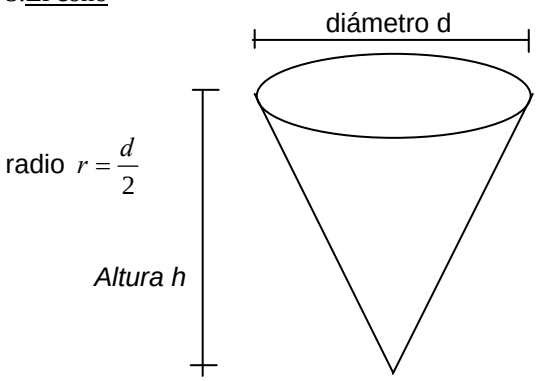
4.El cilindro



$r = \frac{d}{2}$

Superficie $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ Volumen $V = \pi r^2 h$

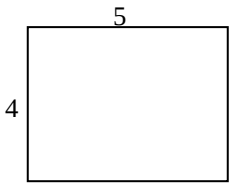
5.El cono



Superficie $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ *Volumen* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

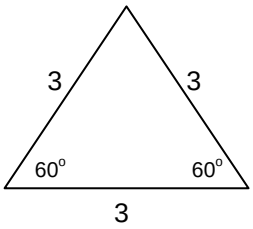
ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1.Determine el perímetro y el área de un rectángulo que tiene por lados x = 5 y y = 4 (vea figura anexa).



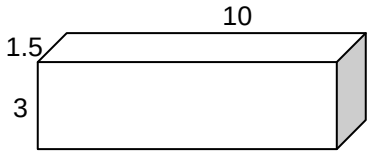
Nota: las acotaciones están en metros.

2.Determine el perímetro y el área de un triángulo cuyas medidas se muestran en la siguiente figura.

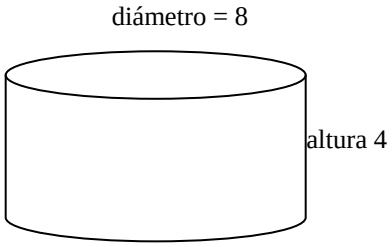


60°

3.Determine el área y volumen del siguiente paralelepípedo.



4.Determine la superficie y volumen del cilindro siguiente.



5.Determine la superficie y el volumen de un cono cuyo diámetro es 2 y altura 4.

APÉNDICE A
Valores a Utilizar para Funciones Trigonométricas

θ			Sen θ	Cos θ	Tan θ
Grados	**Radianes**				
0	0	0	0	1	0
30	0.523599	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45	0.785398	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60	1.047198	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90	1.570796	$\pi/2$	1	0	No existe
120	2.094395	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
135	2.356194	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150	2.617994	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$
180	3.141593	π	0	-1	0
210	3.665191	$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
225	3.926991	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
240	4.188790	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$
270	4.712389	$3\pi/2$	-1	0	No existe
300	5.235988	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$
315	5.497787	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
330	5.759587	$11\pi/6$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$
360	6.283185	2π	0	1	0
	En decimal	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$	$\sqrt{3} = 1.7321$

θ			Cot θ	Sec θ	Csc θ
Grados	**Radianes**				
0	0	0	No existe	1	No existe
30	0.523599	$\pi/6$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2
45	0.785398	$\pi/4$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60	1.047198	$\pi/3$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$
90	1.570796	$\pi/2$	0	No existe	1
120	2.094395	$2\pi/3$	$-1/\sqrt{3}$	-2	$2/\sqrt{3}$
135	2.356194	$3\pi/4$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150	2.617994	$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	2
180	3.141593	π	No existe	-1	No existe
210	3.665191	$7\pi/6$	$\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	-2
225	3.926991	$5\pi/4$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240	4.188790	$4\pi/3$	$1/\sqrt{3}$	-2	$-2/\sqrt{3}$
270	4.712389	$3\pi/2$	0	No existe	-1
300	5.235988	$5\pi/3$	$-1/\sqrt{3}$	2	$-2/\sqrt{3}$
315	5.497787	$7\pi/4$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330	5.759587	$11\pi/6$	$-\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	-2
360	6.283185	2π	No existe	1	No existe
	En decimal	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.5774$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.1547$	$\sqrt{2} = 1.4142$

BIBLIOGRAFÍA

Larson / Hostetler / Edwards, Cálculo. Volumen 1, Quinta edición. Editorial Mc Graw Hill. 1995.

Dennis G. Zill / Jacqueline M. Dewar. Álgebra y Trigonometría. Segunda Edición. Editorial Mc Graw Hill. 1993.

García Velázquez Á. / Amado Moreno G. Curso propedéutico de matemáticas. Tópicos de álgebra. Mexicali, Baja California. Julio de 1997.

Earl W. Swokowski. Cálculo con geometría analítica. Grupo Editorial Iberoamérica. 1982.

Moreno M. A / Núñez J. / Miembros del Programa Nacional de Formalización y Actualización de Profesores de Matemáticas. Nodo Regional sonora; Sonora (UNISON).Graficación de funciones.

Arthur Goodman / Lewis Hirsch. ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. Primera Edición. Editorial Prentice Hall.

De Las Fuentes Lara Maximiliano. Tesis, Una propuesta para la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta – objeto y el juego de marcos. El caso de las funciones lineales y cuadráticas.

Paul K. Rees / Fred W. Sparks. Álgebra. Editorial Reverté. México 1968.

Universidad Autónoma de Baja California

“Curso de Inducción a los Alumnos de Nuevo Ingreso”

Cuadernillo de Ejercicios

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Dr. Felipe Cuamea Velázquez
RECTOR

Mtro. Ricardo Dagnino Moreno
SECRETARIO GENERAL

Dr. Óscar Roberto López Bonilla
VICERRECTOR CAMPUS ENSENADA

M.C. Miguel Ángel Martínez Romero
VICERRECTOR CAMPUS MEXICALI

Dr. José David Ledezma Torres
VICERRECTOR CAMPUS TIJUANA

Mtra. Anabel Magaña Rosas
COORDINADORA DE FORMACIÓN BÁSICA

2012 © D. R. Universidad Autónoma de Baja California.
Av. Álvaro Obregón y Julián Carrillo s/n, colonia Nueva, 21100, Mexicali, Baja California, México.

ELABORARON Y COMPILARON ESTE DOCUMENTO: Mtra. Anabel Magaña Rosas, Lic. Inés Pérez Rodríguez,Dr. Aureliano Armenta Ramírez, Lic. Blanca Daniela Camacho Macías, Lic. María del Socorro Herrera Delgado, M.C. Isaías Bautista Soto, Lic. Sua Madai Rosique Ramírez, Lic. Cinthya Lorena Torres Hernández, Lic. Carmen Guadalupe Meza Martínez y M.C. Humberto Cervantes De Ávila. EDICIÓN Y FORMACIÓN: M.C. Humberto Cervantes De Ávila.

Contenido

¡BIENVENIDOS A BORDO! 3
SELECCIÓN DE AUTÓGRAFOS 4
CUESTIONARIO DE MIS EXPECTATIVAS 5
CARTA COMPROMISO 8
DILIGENCIAS EN MI VIDA UNIVERSITARIA 10
“CONCORDAR Y DISCORDAR” 12
Lectura: Orientación Educativa y Psicopedagógica. 15
Lectura: Becas 17
Lectura: Seguro Facultativo y Póliza de Gastos Médicos 22
Lectura: Correo Electrónico UABC 25
EVALUACIÓN DEL CURSO DE INDUCCIÓN A LA UABC 29
Bibliografía 31

¡BIENVENIDOS A BORDO!

F-03-A

¿Hasta dónde nos llevará este viaje? La travesía es larga y difícil pero fascinante; visitaremos ciudades de todo tipo; seremos guiados por diversas brújulas y mapas.

Hay que bajarse en cada ciudad, aunque sea un momento. Desde el principio ábrete a la comunicación con los compañeros de viaje. El cielo es tan grande que nadie puede preciarse de conocerlo a fondo. Intégrate a los compañeros de expedición. Si están en el mismo avión es porque hay algo en común. A lo mejor buscan lo mismo que tú. Muchas veces, más que los paisajes nuevos, son los compañeros el mejor recuerdo del viaje.

Verás pasar a otros aviones, abre bien los ojos y observa por la ventanilla. Paséate por cabina. Toma el control de la nave de vez en cuando… Participa. Imagínate que eres el capitán y que todo corre bajo tu responsabilidad. ¡Es tu avión! Ir siempre en la misma dirección es monótono; un cambio de ruta de vez en cuando permite descubrir la maravillosa experiencia de volar en un mundo de bellos paisajes.

No te extrañe si alguien se cansa. No cualquiera tiene la capacidad para realizar un viaje tan largo. Tal vez te topes con algún compañero maleta. Tú nunca pierdas de vista el horizonte, recuerda que viajamos no sólo para llegar, sino para vivir durante el viaje. Nuestra búsqueda es algo así como la hipnosis, sólo funciona para quien cree en ella y sigue las reglas del juego.

Quien da poco, le cuesta mucho, quien da mucho, le cuesta poco. Quien da todo, no le cuesta nada.

Nadie tiene tan poco que no pueda aportar algo, y nadie posee tanto que no salga enriquecido

Despegaremos, pues, a nuestra aventura. No sabemos qué tan cambiados bajaremos. Nadie regresa como subió. Hay quien sube teniendo aún actitudes infantiles ante la vida y desciende hecho un adulto. Hay quien sube con un equipaje ajeno y pesado, tanto que ni él mismo sabe lo que trae, y baja con uno nuevo y liviano. Con una confianza firme y una actitud comprometida.

¡ADELANTE MUCHACHOS!

Es la búsqueda de nuevos conocimientos, lo que guía nuestra ruta…

SELECCIÓN DE AUTÓGRAFOS

F-05-A

Entrevista a tus compañeros y pídeles su nombre y autógrafo para ponerlo en el espacio que consideres más adecuado.

	Nombre	Autógrafo
1. Es reservado		
2. Es creativo		
3. Le gusta ayudar a estudiar a los demás		
4. Podemos ser buenos amigos		
5. Es una persona interesante		
6. Me inspira confianza		
7. Me recuerda a alguien		
8. Me genera ternura		
9. Puede ser un buen líder		
10. Va mucho al cine		
11. Parece amiguero(a)		
12. Nació el mismo mes que yo		
13. Prefiere trabajar solo (a)		
14. Le gusta leer poesía		
15. Vive solo(a)		
16. Se ve que es responsable		
17. Viene de otra ciudad		
18. Parece ser amigable		
19. Tiene facilidad de palabra		
20. Toca un instrumento musical		
21. Trabaja los fines de semana		
22. Disfruta la competencia		
23. Maneja su propio auto		

Mi nombre: _____ Grupo_____ Fecha _____

F-08-A

CUESTIONARIO DE MIS EXPECTATIVAS

Mi nombre: _____ Grupo_____ Fecha _____

1. ¿Por qué estoy aquí?

_____

_____

_____

_____

2. ¿Qué me gustaría aprender?

_____

_____

_____

_____

3. ¿Qué pienso aportar?

_____

_____

_____

_____

4. ¿Qué me gustaría que no ocurriera durante mi preparación profesional?

_____

_____

_____

_____

Mi proyecto de vida universitaria

F-09-A1

Instrucciones:

Elabora tu proyecto de vida universitaria a realizar en los próximos años, teniendo en cuenta que un proyecto debiera cumplir por lo menos un periodo de vida y recuerda que nuestro proyecto puede ser corregido con el fin de mejorar o eliminar aquellos aspectos que no han logrado proporcionarnos la satisfacción que deseamos.

Ten presente que el establecer metas claras se relacionan con las acciones necesarias a realizar. Toma en cuenta también los aspectos personales y contextuales de tu vida, así como obstáculos que hayas detectado y reflexiona sobre lo que necesitarías para vencerlos.

Organiza tus pensamientos, deseos y aspiraciones personales y responde las siguientes preguntas en el formato:

¿Qué quiero lograr?..... ¿Para qué lo quiero lograr?..... ¿Cómo lo lograré?

F -09-A2

Mi proyecto de Vida Universitaria

Mi nombre: _____ Grupo_____ Fecha _____

¿Qué quiero lograr? ¿Para qué lo quiero lograr? ¿Cómo lo lograré?	**METAS A CORTO PLAZO** (Primer período escolar)	**METAS A MEDIANO PLAZO** (Mitad del programa educativo)	**METAS A LARGO PLAZO** (Egreso programa educativo)
PERSONAL			
PROFESIONAL			

F-10-A

CARTA COMPROMISO

Nombre_____ fecha_____

Por medio de la presente me permito expresar mi deseo de servir como miembro de la Universidad Autónoma de Baja California.

Deseo manifestar mi compromiso de:

- ✓ Asistir con formalidad en fechas y horarios estipulados.
- ✓ Participar activamente, cumpliendo las tareas que me sean asignadas.
- ✓ Realizar mis actividades con entusiasmo y entrega.
- ✓ Alcanzar un promedio de ___ al finalizar mi periodo inicial.

Para ello he analizado objetivamente el tiempo y los recursos que puedo brindar para cumplir con ellos y estoy consciente del grado de compromiso que se requiere de mi parte. Estoy de acuerdo, que lo que yo realice es importante para que se cumpla mi misión en esta institución.

Al firmar este contrato, me comprometo a cumplir con los términos señalados y a guiarme por el reglamento interno y por los principios morales, valores éticos y profesionales en los que se basa mi universidad.

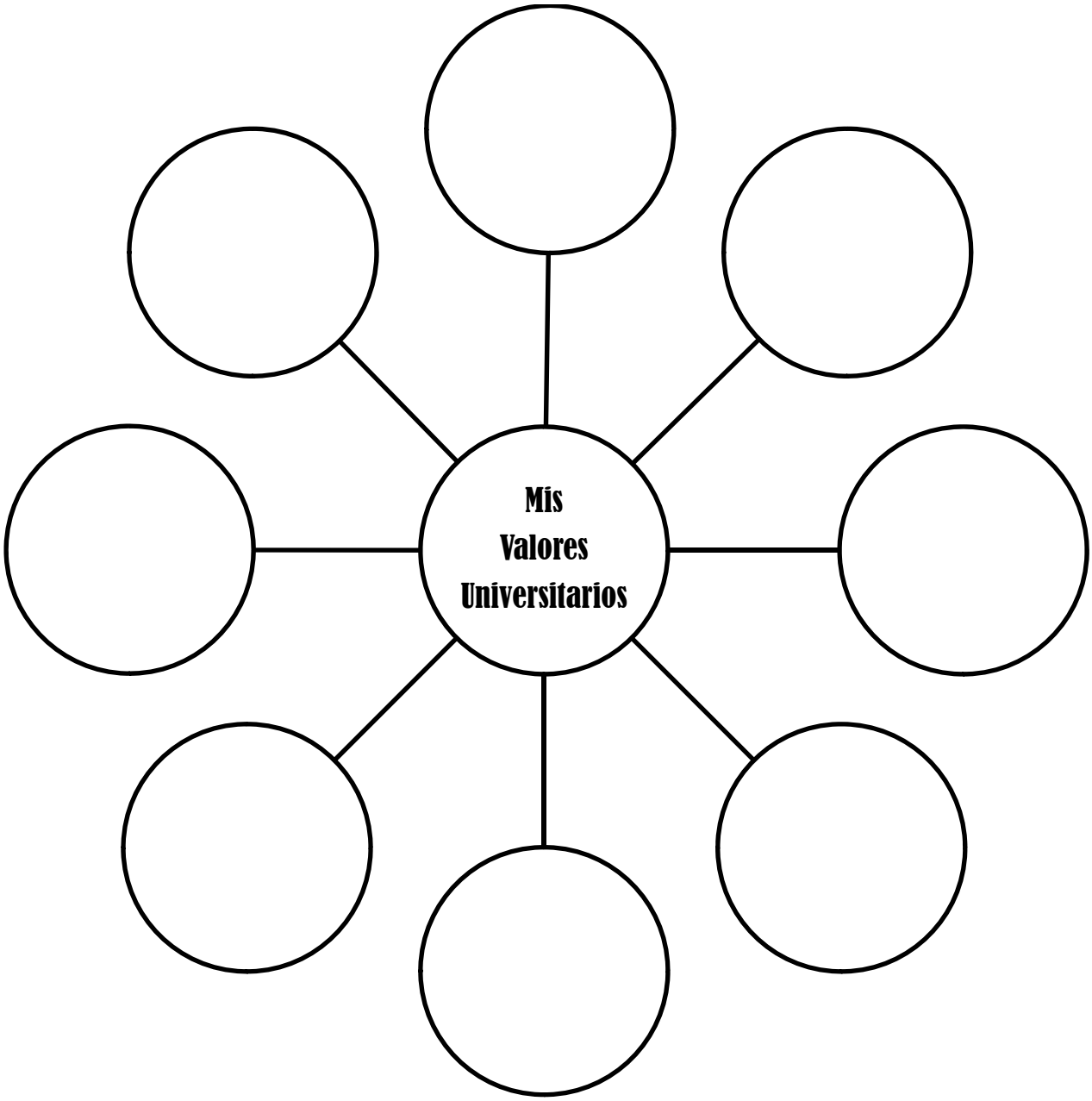
_____

Firma

Diagrama del Cimarrón con Valores

F-11-A

Mi nombre: _____ Grupo_____ Fecha _____



DILIGENCIAS EN MI VIDA UNIVERSITARIA (instrucciones)

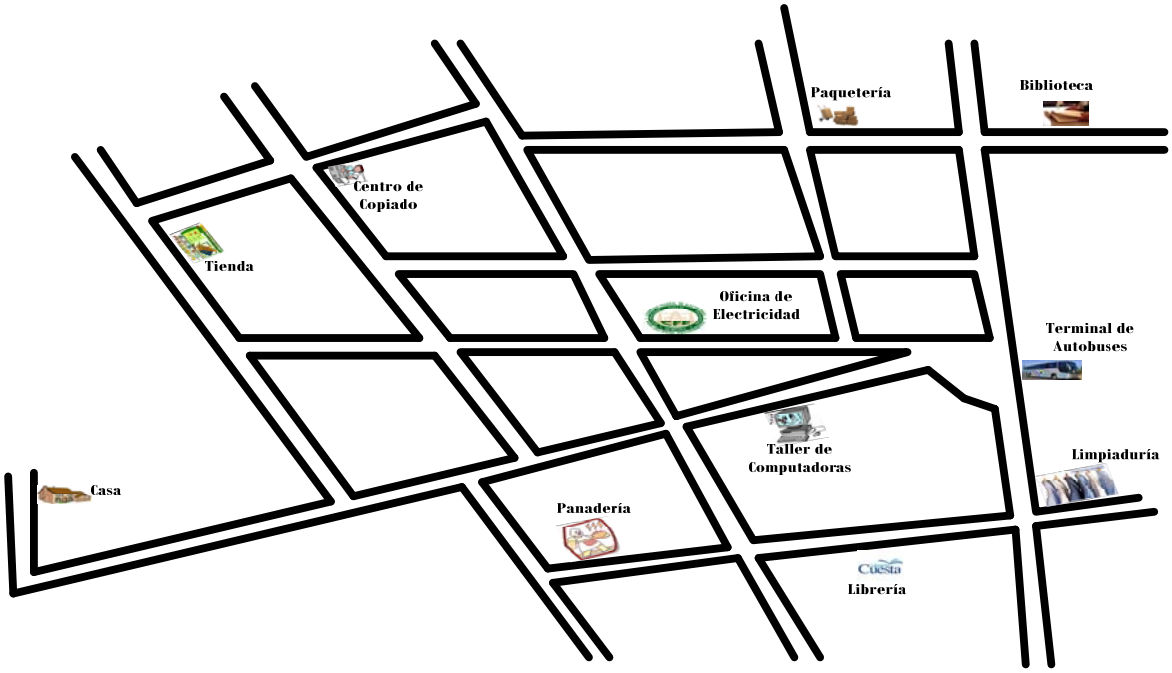
F-14-A1

Debes **salir** de tú casa a las **9:15 hrs.,** hacer una serie de diligencias y **estar de regreso** en tu casa a las **13:00 hrs.**

Para recorrer el camino de tú **casa** a la **terminal de autobuses**, se requieren **30 minutos**. **La oficina** donde debes pagar la luz **cierra a las 10:00 hrs**. El servicio de paquetería, el centro de copiado, la tienda, la biblioteca, el taller de computadoras, la limpiaduría y la librería cierran a las 12:00 hrs. y la panadería abre después de las 11:00 hrs.

El recorrido debe hacerse a pie. Las diligencias son las siguientes:

1) Devolver un libro a la biblioteca
2) Recoger una laptop del taller
3) Llevar un saco a la limpiaduría
4) Enviar un paquete de 10 kg por paquetería
5) Pagar en la oficina el recibo de la luz
6) Comprar $20.00 de pan
7) Sacar fotocopias de unos apuntes
8) Esperar a unos amigos que llegan en el autobús de las 12:30 h
9) Comprar un libro
10) Comprar un galón de leche en la tienda



Este plano te indica la ubicación de los lugares donde tienes que hacer las diligencias. En las líneas numeradas de la siguiente hoja, escribe al lado del número 1, el lugar adonde te conviene ir primero; en el 2, el segundo lugar al cual llegarías y así sucesivamente hasta terminar todas las diligencias; teniendo cuidado de planear bien el recorrido, para que a las 13:00 h estés de regreso en tú casa.

HOJA DE RESPUESTAS DE DILIGENCIAS

F-14-A2

Mi nombre: _____ Grupo_____ Fecha _____

1._____

2._____

3._____

4._____

5._____

6._____

7._____

8._____

9._____

10._____

"CONCORDAR Y DISCORDAR"

F-15-A

Mi nombre: _____ Grupo_____ Fecha _____

	De acuerdo	En desacuerdo
1. Como estudiante no puedo lograr por mi mismo (a) el aprendizaje		
2. El mejor criterio para reconocer mi aprendizaje siempre será un examen		
3. Lo único que verdaderamente aprendo como alumno (a), es lo que el maestro me enseña en clase		
4. Reprobar materias es inicio de mi bajo rendimiento académico		
5. Si repruebo significa que no cuento con hábitos y técnicas de estudio		
6. Mi buen desempeño académico será sinónimo de mi futuro éxito profesional		
7. Es responsabilidad del maestro mi aprendizaje		
8. Es responsabilidad del maestro que yo como alumno (a) no pierda la motivación		

F-22-A

Cuestionario Conociendo mi unidad académica

Mi nombre: _____ Grupo_____ Fecha _____

1. ¿Cuál es el nombre completo del director de mí unidad académica?
   _____
2. ¿Cuál es el nombre de mí unidad académica?
   _____
3. ¿Cuáles son las siglas de mí unidad académica?
   _____
4. ¿Cuál es el nombre del o de la psicóloga de mí unidad académica?
   _____
5. ¿Cuántas carreras oferta mi unidad académica
   _____
6. Menciona los dos tipos de unidades de aprendizaje (asignaturas) del plan de estudios.
   _____
7. ¿Cuál es la duración de mí carrera?
   _____
8. ¿Cuál es el apellido paterno de mí coordinador (a) de carrera?
   _____
9. En este sector puedo obtener un empleo cuando egrese
   _____
10. Acreditar esta modalidad de aprendizaje durante mi carrera es un requisito de titulación y además me puede brindar créditos optativos
    _____
11. ¿En cuántas etapas de formación se divide el plan de estudios?
    _____
12. Menciona el nombre de la primera etapa de formación de la carrera
    _____
13. En esta área puedo recibir asesoría sobre técnicas de estudio
    _____
14. ¿De cuántos créditos educativos se conforma mi plan de estudios?
    _____
15. Esta modalidad de aprendizaje me permite obtener créditos educativos brindado ayuda a la comunidad
    _____
16. Esta modalidad de aprendizaje consiste en cursar algún semestre en otra universidad del país o del extranjero
    _____

Lectura: Orientación Educativa y Psicopedagógica. **F-23-A**

La orientación educativa y psicopedagógica que ofrece la UABC, se brinda a través de psicólogos expertos responsables, en cada una de las unidades académicas de cada campus. Este servicio te ofrece la orientación y el apoyo necesario para tu adaptación a los estudios universitarios, tu proyecto de vida y la superación de obstáculos que se te pudieran presentar y con ello disminuir su incidencia y mejorar tu desempeño escolar. La atención se da según se requiera, la cual es a través de los cuatro programas institucionales:

Atención Aspirantes:

A través de este programa se brinda información actualizada sobre las carreras que ofrece la Universidad, a los interesados en ingresar a la UABC, la aplicación del Examen de Habilidades PRODIP, el llenado de la Encuesta de Nuevo Ingreso, además de la Encuesta Socioeconómica como requisitos de ingreso, con la finalidad de elaborar un expediente del estudiante, el cual permitirá brindarle una mejor orientación durante su formación profesional

Atención Alumnos de Nuevo Ingreso:

A través de este programa se brinda un curso de inducción, esto con el propósito de que el alumno de nuevo ingreso identifique la formación que la Universidad le ofrece, así como los servicios con los que cuenta, para que logre una formación integral y un sólido desarrollo en su potencial valoral

Atención Estudiantes Universitarios:

A través de este programa se brinda una orientación que favorezca el aprendizaje en el alumno, a través de la estimulación de las habilidades del pensamiento y la enseñanza de técnicas y hábitos de estudio. Además de una orientación vocacional, la atención a problemas personales, tanto familiares, como de salud, mismos que en un

F-23-A

momento dado interfieran en el proceso de aprendizaje del alumno, también se otorga información a través de diferentes medios, ya sea en páginas electrónicas de la unidades académicas, pantallas electrónicas, periódicos murales, folletos, conferencias, cursos, talleres o asesoría individualizada sobre

- Educación Sexual (Prevención de enfermedades de transmisión sexual, VIH y embarazo durante los estudios).
- Desarrollo de habilidades del pensamiento, técnicas y hábitos de estudio.
- Técnicas de manejo del estrés.
- Prevención del uso y abuso de drogas legales e ilegales.
- Orientación sobre depresión, suicidio, abuso sexual, bulimia, anorexia, ansiedad, agresión y violencia.
- Fomento de valores éticos y morales.

Atención Docentes:

A través de este programa se brinda atención al personal docente de las diferentes unidades académicas que busquen mejorar su labor a través de los conocimientos, principios y técnicas que se derivan de la Psicología, como puede ser

1. Estimulación de Habilidades del Pensamiento en el Aula.
2. Estrategias Didácticas Creativas
3. Técnicas y Dinámicas que favorezcan el aprendizaje.
4. Formación de Valores en el Aula

Lectura: Becas

F-23-A

BECAS DE LA UABC

La Universidad, consciente de las dificultades económicas que enfrentan algunas familias y de la necesidad de otorgar incentivos al buen desempeño de sus estudiantes, a través del Patronato Universitario, creó un fideicomiso para la administración de un fondo de becas, que de acuerdo a las posibilidades previstas serán otorgadas a los alumnos de la Universidad mediante las siguientes modalidades:

Becas Reembolsables
- Becas Prórroga
- Beca Crédito
- Beca Patrocinio

Becas No-Reembolsables
- Beca por Promedio
- Mérito Escolar
- Beca Investigación
- Beca Deportiva
- Beca Artística
- Beca Compensación
- Beca Vinculación
- Beca Alimenticia
- Beca fomento a las ciencias naturales y exactas

Las becas son apoyos extraordinarios que ofrece la UABC a los alumnos para la realización de sus estudios dentro de la Institución con base en su situación socioeconómica y académica.

Requisitos Generales.

Son sujetos al beneficio de las becas, los alumnos que cumplan con los siguientes requisitos:

- Estar inscritos en alguno de los programas académicos formales que ofrece la Universidad.
- Contar con un promedio de calificaciones igual o superior a ochenta, al menos en el período escolar anterior.

- Acreditar que cursó en el período escolar anterior, al menos la carga académica promedio en créditos.
- Reunir las condiciones socioeconómicas conforme a los criterios de elegibilidad establecidos por las autoridades universitarias, en el caso de que el tipo de beca lo requiera.
- Cumplir los requisitos específicos de cada tipo de beca.

Tipos de Beca. (UABC, 2012)

La universidad ofrece dos modalidades de becas, a saber: Reembolsables y no Reembolsables.

Becas Reembolsables.

Se distinguen porque el beneficiario se compromete a reintegrar a la Universidad el monto recibido (en el mismo semestre o al concluir sus estudios con un período de gracia reglamentario, según sea el caso para cada tipo de beca).

Beca Prórroga: Consiste en la autorización para diferir el pago de cuotas de inscripción o reinscripción, para que estos pagos se efectúen dentro del mismo periodo escolar semestral.

Beca Crédito: Consiste en el financiamiento que se otorga a los alumnos para la realización de sus estudios en la Universidad, quedando obligado el becario a restituir al Fondo el monto de las aportaciones de que dispuso, en los términos establecidos en el convenio respectivo. Estas becas se otorgarán considerando las condiciones socioeconómicas de elegibilidad del alumno y su desempeño académico.

F-23-A

Las Becas crédito comprenden los siguientes niveles:

- *Nivel uno:* Destinado al pago de cuotas de inscripción o reinscripción.
- *Nivel dos:* Comprende el pago de cuotas de reinscripción, más mensualidades para apoyar el pago de gastos escolares.
- *Nivel tres:* Comprende el pago de cuotas de reinscripción e incluye mensualidades para apoyar el pago de gastos de sustento básico del becario.

Beca Patrocinio: Las becas patrocinio son aquéllas que se constituyen por donaciones o legados que se transfieren al Fondo, para que la Universidad las administre, observando en su caso, los criterios que para su otorgamiento hayan establecido los aportantes. Los beneficiarios de las becas patrocinio, quedarán obligados a restituir al Fondo al menos el cincuenta por ciento del monto de las aportaciones recibidas. Serán aplicables a este tipo de becas, las reglas relativas a la forma, plazos y modos de pago de las becas crédito.

Becas No Reembolsables.

Beca por Promedio. Se otorga para distinguir a los alumnos de licenciatura que hayan alcanzado los mejores promedios generales de calificaciones en el período anterior y por carrera, siempre que el promedio sea igual o superior a noventa. Comprende una aportación para el pago de cuotas de reinscripción, colegiatura y cuotas específicas. El Comité determinará los porcentajes de dicha aportación, en función de la disponibilidad de los recursos del Fondo.

Beca Mérito Escolar. Son las que se otorgan a los alumnos de licenciatura o de posgrado que se hicieron merecedores del Diploma al Mérito Escolar, de acuerdo al Reglamento del Mérito Universitario y a los criterios establecidos por el Comité de Becas. La beca comprende la exención del pago total de cuotas de inscripción o reinscripción, colegiaturas y cuotas específicas, para la realización de estudios de posgrado y/o acreditación de idioma extranjero, que ofrece la Universidad

Beca Investigación. Se otorga a los alumnos que participan como tesistas o auxiliares en proyectos de investigación, autorizados por la Coordinación de Posgrado e Investigación de la Universidad. Este tipo de beca comprende aportaciones periódicas que serán determinadas en el convenio de proyecto de investigación

Beca Deportiva. Se otorga a los alumnos que tengan una participación relevante como integrantes de equipos deportivos, que representen a la Universidad en eventos locales, estatales, regionales, nacionales o internacionales. Comprende la aportación económica para el pago de las cuotas. El Comité determinará los porcentajes de las aportaciones, en función de la disponibilidad de los recursos del Fondo.

Beca Artística. Es la que se otorga a los alumnos por su destacada participación en actividades artísticas, representando a la Universidad en eventos locales, estatales, regionales, nacionales o internacionales. Comprende la aportación económica para el pago de cuotas. El Comité determinará los porcentajes de las aportaciones, en función de la disponibilidad de los recursos del Fondo.

Beca Compensación. Se otorga a alumnos que colaboran en las unidades académicas, bibliotecas, laboratorios, talleres y demás instalaciones universitarias, auxiliando en actividades académicas o administrativas. La beca comprende, aportaciones económicas mensuales de acuerdo a los recursos asignados al programa. Esta beca no podrá extenderse por más de dos periodos escolares semestrales. Para el otorgamiento de la beca compensación se requiere que el alumno reúna el perfil adecuado para la actividad que realizará, y la aceptación expresa de la unidad académica o administrativa. El académico o administrativo a cargo del programa en el que colabore el becario, será responsable directo del desempeño, seguimiento y evaluación de las actividades del alumno.

Beca Vinculación. Esta beca consiste en aportaciones económicas que se podrán otorgar a los alumnos, para movilidad o intercambio académico o para la realización de prácticas profesionales o prestación de servicio en programas de vinculación que desarrolla la Universidad, a través de convenios específicos con otras instituciones. El monto y la periodicidad de las aportaciones económicas se determinarán en los convenios de vinculación respectivos

Beca Alimenticia. Se otorga a los alumnos que cumplan con los requisitos establecidos para este tipo de beca de acuerdo al número de espacios disponibles para cada cafetería. La beca brinda un alimento diario en días hábiles, siendo este efectivo en la cafetería de su unidad académica.

Beca Fomento a las Ciencias Naturales y Exactas. Se otorga a los aspirantes a ingresar a la UABC por su destacada participación en concursos de las ciencias naturales y exactas, en el ámbito estatal y/o nacional. Comprende la aportación económica, para cubrir los gastos de inscripción al primer semestre de alguna de las siguientes carreras: Lic. En Matemáticas Aplicadas, Biólogo y Físico.

Lectura: Seguro Facultativo y Póliza de Gastos Médicos

F-23-A

Seguridad Social que proporciona la UABC a sus alumnos

A partir del 1987, la comunidad estudiantil dispone del Seguro Facultativo y el Seguro de Accidentes Escolares. El primero es el servicio que proporciona el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) a aquellos alumnos que no cuentan con protección por cualquier otra institución de seguridad social; ya sea por parte de algún familiar o empresa, mientras que el segundo es un seguro colectivo que contrata la Institución. Este aseguramiento es exclusivo para nivel licenciatura.

Seguro Facultativo

El seguro facultativo que otorga el (IMSS) proporciona atención médica, quirúrgica y hospitalaria, brindando:

- Atención en urgencias las 24 horas del día.
- Servicio de farmacia y laboratorio.
- Curaciones, inyecciones y tratamientos.
- Maternidad.

En caso de maternidad, se otorgará a la alumna las prestaciones de asistencia obstétrica durante el embarazo, el alumbramiento y el puerperio, además de, ayuda en especie por seis meses de lactancia.

En caso de que los padres cuentan con servicios vigentes por parte de IMSS, ISSSTECALI o ISSSTE, basta con solicitar una constancia de estudios en el departamento de Servicios Estudiantiles y Gestión Escolar y acudir a la institución que brinda el servicio con la hoja de afiliación de los padres para activar los servicios. En este caso, cada semestre se deberá efectuar la renovación del servicio comprobando la condición de alumno vigente. Cabe mencionar que se pierde el derecho al servicio médico a través de los padres al cumplir los 25 años y en caso de la mujer alumna al estar embarazada.

F-23-A

Seguro de Accidentes Escolares

Se entiende por accidente escolar a toda lesión corporal que sufre el alumno por la acción súbita fortuita y violenta de una fuerza externa mientras:

- Realice actividades escolares dentro y fuera de las instalaciones de la UABC.
- Asista a cualquier evento organizado y supervisado por las autoridades de la UABC.
- Viaje en grupo directamente hacia o desde el lugar donde se realicen tales eventos, dentro de la República Mexicana y se encuentre bajo la supervisión de la UABC.
- De su domicilio o centro de trabajo a la UABC o viceversa.

Para mayor información acudir al Departamento de Servicios Estudiantiles y Gestión Escolar de tu campus.

Cobertura del reembolso de gastos médicos

El seguro paga reembolsos de gastos médicos de hasta $50.000.00 pesos como consecuencia de un accidente y dentro de los 10 días siguientes a la fecha del mismo, en el cual se viera precisado a someterse a tratamientos y el servicio de ambulancia.

Cobertura del reembolso de gastos funerarios

Si el estudiante fallece en un accidente o a consecuencia del mismo, el seguro cubre una póliza por $100.000.00 MN. También si a consecuencia de un accidente, el asegurado sufre una pérdida orgánica.

F-23-A

Documentación requerida para tramitar el reembolso de gastos médicos

Acudir al Departamento de Servicios Estudiantes y Gestión Escolar para solicitar los formatos referentes al trámite. En caso de un accidente escolar se debe acudir al Hospital indicado (en Mexicali: HispanoAmericano, Tijuana: Excel Ensenada: Velmar) los cuales se encuentra en red con la aseguradora, se deberá presentar credencial de estudiante o una constancia de estudios.

Trámites para la inscripción al Seguro facultativo y de Gastos Médicos

La inscripción de los alumnos NO ES AUTOMATICA, para afiliarse el alumno debe hacerlo, ya sea, durante el proceso de inscripción de nuevo ingreso, al contestar la encuesta de seguimiento en el proceso de reinscripción o a través de la liga:

http://ciadsi.rec.uabc.mx/segurofacultativo.

Posteriormente deberá acudir al Departamento de Servicios Estudiantiles y Gestión Escolar a entregar la póliza de beneficiarios del seguro de accidentes escolares y a recoger la hoja de afiliación, la cual deberá presentar en la unidad médica correspondiente para obtener la tarjeta de citas.

Este beneficio cubre al alumno durante todo el semestre; siempre y cuando, mantenga la condición de alumno. Cabe mencionar que están protegidos durante la prestación del servicio social y prácticas profesionales aun habiendo egresado.

Lectura: Correo Electrónico UABC

F-23-A

La UABC, a partir de 2010, puso a disposición de los alumnos y empleados un nuevo servicio de correo electrónico bajo la plataforma Google Apps, que, además de **GMail** (correo electrónico), brinda otras aplicaciones para mensajería y colaboración, como: **Google Docs** (acceder a documentos hojas de cálculo, dibujos y presentaciones en la Web, lo que permiten a los usuarios modificar archivos simultáneamente y disponer siempre de la versión más reciente desde cualquier lugar en cualquier tiempo), **Google Calendar** (aplicación basada en la Web que permite colaboración de un modo eficaz para concertar reuniones), **Google Groups** (posibilita listas de distribución, para compartir fácilmente calendarios, documentos, sitios y vídeos con compañero), **Google Sites** (es un modo sencillo de crear páginas web seguras para integrantes y proyectos en equipo que no requiere saber programación ni HTML.) y **Google Talk** (aplicación de chat).

El correo UABC, el cual está inscrito en el dominio @uabc.edu.mx; es una herramienta de suma importancia para toda la comunidad universitaria, en el caso de los nuevos cimarrones, es la llave para realizar algunas actividades académico-administrativas de la vida estudiantil en la universidad.

La cuenta de correo institucional permite al estudiante, entre otras cosas lo siguiente:

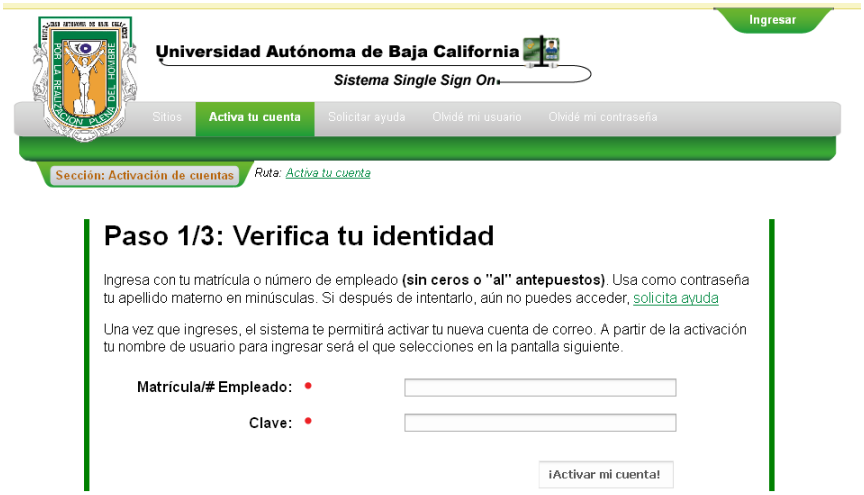
- Consultar el historial académico y la boleta de calificaciones al finalizar el semestre.
- Darse de alta como prestador de servicio social primera y segunda etapa.
- Darse de alta en el Sistema Institucional de Tutorías (SIT) para recibir la tutoría y evaluar al tutor.
- Participar en el Sistema de Evaluación Docente (SED), con el fin de evaluar el desempeño de los maestros, tanto en la clase teórica como en la práctica.
- Inscribirse y tomar en cursos en línea en la plataforma Blackboard utilizada por la UABC.
- Tener acceso a la red Inalámbrica dentro del campus.

- Tener acceso a la consulta de base de datos electrónicas en diversas aéreas del conocimiento.
- Contestar las encuestas institucionales.
- Comunicarse de manera permanente con maestros y compañeros.
- Estar enterado de las oportunidades académicas como convocatoria de becas, cursos, conferencias, talleres, congresos, etc.
- Utilizar herramientas de una cuenta de email de Google como son: espacio (más de 25 MB), DOCS, Calendario, Sites, Chat, etc.

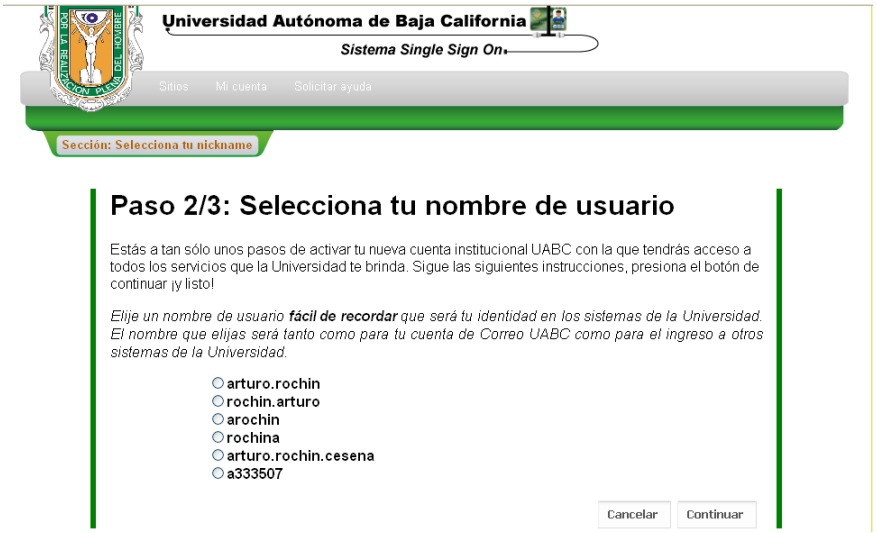
Para darse de alta al servicio de correo institucional, el alumno debe tener a la mano su matrícula. A continuación se muestran las pantallas e instrucciones que se presentarán durante el proceso de activación de la cuenta de correo.

Lo primero que se debe de hacer es entrar a la dirección **correo.uabc.edu.mx**, para lo cual se debe de introducir esta dirección en el campo de la dirección del navegador, una vez hecho esto se desplegará la siguiente página:

Se da clic en *"¡actívala ahora!",* se siguen los pasos indicados en las pantallas siguientes:



Se selecciona uno de los usuarios que se proponen, el cual no se podrá cambiar, por lo que se deberá de estar seguro del que se elije.



F-23-A

Por último se completar los datos de un correo alternativo, y la pregunta y respuesta secreta. Se debe de tener cuidado de contestar correctamente ya que será la única forma de recuperar la contraseña en caso de olvido.