UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

LIBRO DE EJERCICIOS PARA EL CURSO PREUNIVERSITARIO DE NIVELACIÓN ACADÉMICA PARA ALUMNOS DE NUEVO INGRESO

(ÁLGEBRA, TRIGONOMETRÍA Y FÍSICA)

Nombre del Estudiante:

Grupo:

Turno:

Mexicali, Baja California

Octubre de 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

LIBRO DE EJERCICIOS PARA EL CURSO PREUNIVERSITARIO DE NIVELACIÓN ACADÉMICA PARA ALUMNOS DE NUEVO INGRESO

(ÁLGEBRA, TRIGONOMETRÍA Y FÍSICA)

Nombre del Estudiante:

Grupo:

Turno:

Mexicali, Baja California

Octubre de 2013

Autores:

M.C. Ernesto Victor González Solis (Coordinador)
M.C. Jesús Rigoberto Herrera García
M.C. María Inés Leglew Cruz
M.C. José Luis Arce Valdez

Colaboradores:

Rubén Alaniz (Dibujos e Imágenes)
Jesús Zavala (Programación de Software)
Ramón Pérez (Dibujos).

Agradecimientos:

Al Dr. David I. Rosas Almeida, Director de la Facultad de Ingeniería y a la Coordinadora de Formación Básica, M.C. Gloria E. Chávez Valenzuela, por su valioso apoyo en la elaboración de este material.

A los integrantes del Laboratorio de Semicondutores, Microelectrónica y Nanotecnología (LSMN) del Instituto de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California por sus valiosas aportaciones.

Índice de Contenido

Prólogo

La matemática ha sido parte de la humanidad desde tiempos remotos, pues es una herramienta indispensable para entender múltiples fenómenos que son parte de nuestra naturaleza. Lamentablemente en la actualidad existe una apatía hacia esta ciencia por parte de los estudiantes, lo que a su vez, refleja la falta de conocimiento de su aplicación en la resolución de problemas, además de su contribución en la formación de valores trascendentes de la personalidad; porque efectivamente, la matemática no solo sirve para resolver problemas de los libros de texto, sino tambien para desarrollar una forma de pensamiento que permita enfrentar los problemas que se suscitan en cualquier contexto en la vida diaria. Así pués, el empleo de la matemática permite adquirir valores que determinan sus actitudes y su conducta que sirven como patrones para guiar su vida, además de un estilo lógico y coherente de enfrentar la realidad; además de una búsqueda de exactitud en los resultados; comprensión y expresión clara a través de la utilización de símbolos; poder de abstracción, razonamiento y generalización; representación gráfica de fenómenos de la vida real; y la creatividad.

Cada vez surgen nuevas teorías y métodos en diversas ramas para la resolución de problemas, de la mano evoluciona tambien el surgimiento de nuevas tecnologías, y no se concibe el entendimiento y el desarrollo de éstas sin el empleo de la matemática, especialmente si se habla de las áreas de la Ingeniería, donde los estudiantes conviven con la matemática todos los días. Por ello es importante dejar de lado, la idea de apatía respecto de esta ciencia.

Bajo este concepto, la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California se ocupa de la generación y actualización del material didáctico que coadyuve al estudio de esta ciencia. De este modo se presenta esta nueva edición de este libro de Álgebra, el cual está estructurado por unidades con sus respectivos subtemas, donde los ejercicios de cada subtema se ha estructurado en tres partes; los ejercicios de ejemplo, los cuales se aconseja se resuelvan en clase bajo la guía del profesor, los ejercicios de taller, los cuales se recomienda sean resueltos en clase en grupos de estudio bajo la supervisión e intervención mínima del profesor, y finalmente los ejercicios de tarea, diseñados para que el alumno realice un repaso extraclase de los tópicos tratados en el aula.

Además, se han desarrollado algunos videotutoriales que van de la mano con este libro, los cuales se recomienda sean consultados como una herramienta más de este libro, ya que en estos videos los ejemplos y los ejercicios de taller son explicados nuevamente para reforzar lo visto en clase o con la finalidad de utilizarlos como apoyo para resolver los ejercicios de tarea. El canal donde se pueden consultar los videos se llama "**Curso propedéutico UABC**", en la plataforma de YouTube. La Universidad cuenta con diferente infraestructura, donde se tiene acceso a máquinas de cómputo e internet inhalámbrico, para poder hacer consulta de este material.

En una segunda parte se presenta el contenido de Física, los conceptos se definen en un lenguaje sencillo sin perder el rigor del contenido. El manual cuenta con herramientas y suplementos para que el aprendizaje sea significativo. El objetivo principal es identificar las Leyes básicas de la Física y adquirir conocimiento en la aplicación del método científico en la solución de problemas.

Los problemas incluidos en este documento están estructurados en tres secciones importantes: Ejemplos, Ejercicios de Taller y Ejercicios de Tarea. La estructura es sólo recomendada y el profesor tiene la libertad de aprovechar los ejercicios como considere adecuado.

Es de hacer notar que los tópicos que aquí se presentan, son de elemental importancia al momento de cursar diferentes unidades de aprendizaje de los primeros semestres, de ahí la importancia de hacer este repaso, antes de iniciar las clases formales en la Facultad de Ingeniería.

Se recomienda que los **Ejemplos** sean resueltos en clase por el profesor. Los **Ejercicios de Taller** son para que el alumno los resuelva en clase con la intervención mínima del profesor y los **Ejercicios de Tarea** son para solucionarlos en casa y así repasar lo que se estudia en el aula.

Adicionalmente, hay algunas secciones de **"Preguntas para analizar y discutir"**que tienen como objetivo crear un ambiente de lluvia de ideas que permitan al alumno aportar su conocimiento y entender el punto de vista de los demás. Hay una sección denominada **"Para investigar"** que tiene la finalidad de acercar al estudiante a las fuentes de información (Internet, libros, artículos) para comprender algunos fenómenos y Leyes básicas.

Para el curso es necesario que el estudiante adquiera material, un juego de geometría y algunas hojas milimétricas, especialmente para el capítulo de vectores.

Como una herramienta adicional para la comprensión de los conceptos, parámetros y Leyes, se diseñó un programa llamado NEWTON-1. Algunos ejercicios requieren la aplicación de este software, cuando sea el caso se verá el siguiente ícono:

Este material ha sido elaborado, por académicos de la Facultad de Ingeniería, con la única intención de lograr el éxito de los estudiantes en su aprovechamiento en las unidadez de aprendizaje de sus primeros semestres, de ahí la exhortación a que empleen este material en beneficio propio.

Capítulo 1

Operaciones aritméticas fundamentales

1.1. Conversión de una fracción impropia a mixta

Se divide el numerador entre el denominador. Si el cociente es exacto, éste representa los enteros; si no es exacto, se añade al entero una fracción que tenga por numerador el residuo y por denominador el divisor.

Ejemplo 1.1 Convertir $\frac{15}{2}$ en fracción mixta.

Se realiza la división, dando como cociente 7 enteros con un residuo de 1, por lo tanto se representa en forma mixta como $7\frac{1}{2}$.

1.2. Conversión de una fracción impropia a mixta

Se multiplica el denominador por la parte entera y se suma al numerador, el resultado se coloca en el numerador y se coloca el mismo denominador.

Ejemplo 1.2 *Convertir* $5\frac{2}{3}$ *a fracción impropia.*

Se multiplica el denominador 3 por la parte entera 5, dando como resultado del producto 15, al cual se debe sumar el numeraodor 2, dando como resultado 17. Finalmente se coloca este 17 como numerador y se coloca el mismo denominador 3 de la fracción mixta, es decir $\frac{17}{3}$

1.3. Suma y resta de fracciones con igual denominador

Se suman los numeradores y esta suma se divide entre el denominador común.

Ejemplo 1.3 Sumar $\frac{7}{9} + \frac{10}{9} - \frac{4}{9}$

$\frac{7}{9} + \frac{10}{9} - \frac{4}{9} = \frac{7 + 10 - 4}{9} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$

1.4. Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Se simplifican las fracciones si es posible. Después de ser irreducibles se reducen al común denominador y se procede como el caso anterior.

Ejemplo 1.4 Sumar $\frac{12}{48}+\frac{21}{49}-\frac{23}{60}$

simplificando las fracciones se tiene $\frac{1}{4}+\frac{3}{7}-\frac{23}{60}$ en este caso el común denominador puede ser 420, ya que se puede dividir con resultado entero entre todos los denominadores. También el 1680 puede ser un común denominador pero para que no salga muy grande la fracción se utilizará el 420 como común denominador. Cabe señalar que cualquiera de estos comunes denominadores puede emplearse, los resultados en ambos casos serán fracciones equivalentes.

$\frac{1}{4}+\frac{3}{7}-\frac{23}{60}=\frac{105+180-161}{420}=\frac{124}{420}$ simplificando se tiene $\frac{124}{420}=\frac{31}{105}$

1.5. Multiplicación de fracciones

Para multiplicar dos o más fracciones se multiplican los numeradores y este producto se divide entre el producto de los denominadores.

Ejemplo 1.5 Multiplicar $\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{17}{8}\right)$

$\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{17}{8}\right)=\frac{(5)\,(3)\,(17)}{(7)\,(4)\,(8)}=\frac{255}{224}=1\frac{31}{244}$

1.6. División de fracciones

Para dividir dos fracciones se multiplica el dividendo por el divisor invertido.

Ejemplo 1.6 Dividir $\frac{14}{55}\div\frac{8}{35}=\left(\frac{14}{55}\right)\left(\frac{35}{8}\right)=\frac{(14)(35)}{(55)(8)}=\frac{49}{44}=1\frac{5}{44}$

Ejercicios de Taller

1. Realice las siguientes operaciones.

a) $\frac{7}{8}-\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=$

b) $\frac{2}{6}-\frac{1}{9}+\frac{6}{4}=$

c) $8\frac{1}{4}+\frac{24}{3}-2\frac{1}{3}=$

d) $5\frac{3}{5}-2\frac{3}{9}+\frac{2}{5}=$

e) $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{7}{2}\right)=$

f) $\left(\frac{4}{9}\right) \div \left(\frac{3}{7}\right) =$

Ejercicios de Tarea

1. Realice las siguientes operaciones.

a) $\frac{5}{3} - \frac{7}{3} + \frac{4}{3} =$

b) $\frac{6}{9} - \frac{5}{4} + \frac{2}{5} =$

c) $3\frac{3}{7} + \frac{3}{8} - 1\frac{1}{7} =$

d) $3\frac{7}{2} - 5\frac{9}{4} + \frac{3}{5} =$

e) $\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{7}{9}\right) =$

f) $\left(\frac{2}{12}\right) \div \left(\frac{7}{14}\right) =$

Capítulo 2

Propiedades del sistema de los números reales

Se le llama sistema de números reales al conjunto de números reales y a las operaciones de adición $(+)$, sustracción $(-)$, división $(/)$ y multiplicación $(*)$ que se efectúan entre dichos números. Existen leyes y propiedades fundamentales para este sistema que nos permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para encontrar soluciones a problemas matemáticos.

En esta sección se abordarán las propiedades básicas del sistema de los números reales para las operaciones matemáticas.

2.1. Propiedades para la Adición y Multiplicación

Estas propiedades se muestran en la tabla 2.1, donde a, b y c representan números reales.

Propiedades	*Adición*	*Multiplicación*
1. Ley Clausurativa	$a+b$ es un número real	$a \cdot b$ es un número real
2. Ley asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\,(b \cdot c)=(a \cdot b)\,c$
3. Ley Conmutativa	$a+b=b+a$	$a \cdot b=b \cdot a$
4. Propiedad Identidad	El número real 0 es llamado identidad aditiva, ya que para todo número real a: $a+0=a=0+a$	El número real 1 es llamado identidad multiplicativa, ya que para todo número real a: $a \cdot 1=a=1 \cdot a$
5.Propiedad del Inverso Aditivo y del Recíproco	Para todo número real a existe un único número real llamado negativo o inverso aditivo de a representado por $-a$ de tal manera que: $a+(-a)=0=(-a)+a$	Para todo número real diferente de cero existe un único número real llamado recíproco o inverso multiplicativo de "a" representado por $\frac{1}{a}$ de tal forma que: $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)=1=\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a$
6.Propiedad Distributiva	a) $a\,(b+c)=ab+ac$ b) $(a+b)\,c=ac+bc$	
7.Ley cancelativa o Anulativa	a) Si $a+c=b+c$ b) Si $ac=bc$ y $c \neq 0$	entonces $a=b$. entonces $a=b$.
8.Ley de la multiplicación por cero	a) Si $a \cdot 0=0=0 \cdot a$ b) Si $a \cdot b=0$	 entonces $a=0$ *ó* $b=0$; o ambas.

Tabla 2.1. Propiedades para la adición y la multiplicación.

2.2. Propiedades para la Sustracción

La tabla 2.2 muestra las propiedades más importantes de la sustracción, relacionadas con los números negativos y fracciones.

2.3. Propiedades para las Fracciones

En la tabla 2.3 se listan las propiedades elementales para las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$,donde los denominadores son diferentes de 0, ($b \neq 0$ y $d \neq 0$).

Propiedades de la sustracción-	*Ejemplo*
a) $-(-a) = a$	$-(-2) = 2$
b) $-(ab) = -ab = a(-b)$	$-(2 \cdot 4) = -2 \cdot 4 = 2(-4)$
c) $-a = (-1)(a)$	$-5 = (-1)(5)$
d) $(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-3) = (2 \cdot 3)$

Tabla 2.2. Propiedades para la sustracción.

Ejercicios de Taller

1. Realice las siguientes operaciones.

a) $(-x)\,(-y) =$

b) $-z \cdot \frac{0}{5} =$

c) $\frac{m}{2-(5-3)} =$

2. Aplique en cada caso la propiedad entre paréntesis.

a) $(3+5)+2 =$ (Propiedad asociativa de la adición)

b) $(6+8)\,y =$ (Propiedad conmutativa de la multiplicación)

c) $(x+3)\,y+2 =$ (Propiedad distributiva)

d) $x\,(2+3) =$ (Propiedad distributiva)

e) $[(1)\,(2)]\,(3) =$ (Propiedad asociativa de la multiplicación)

3. Calcule los resultados de las siguientes operaciones

a) $-\,(-a)\,(2-3) =$

b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{7} =$

c) $\frac{2}{5} - \frac{1}{8} + \frac{3}{4} =$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} =$

Propiedades para las fracciones	*Ejemplo*
1. Fracciones Equivalentes	
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$ Comprobamos que: $2 \cdot 21 = 42 = 3 \cdot 14$
2. Regla de Signos	
$-\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{-a}{b}\right) = \frac{a}{-b}$	$-\left(\frac{4}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}\right) = \frac{4}{-2}$
3. Regla Cancelativa	
$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}; si\ c \neq 0$	$\frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4}$ Comprobamos que: $\frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12} = 0{,}5 = \frac{2}{4}$
4. Adición y sustracción con común denominador	
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$	$\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = \frac{-1}{4}$ ó $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$
5. Adición y sustracción con distinto denominador	
$\frac{a}{d} \pm \frac{c}{b} = \frac{ab \pm dc}{db}$	$\frac{2}{4} - \frac{3}{5} = \frac{(5 \cdot 2) - (4 \cdot 3)}{(4 \cdot 5)} = \frac{(10) - (12)}{20} = \frac{-2}{20}$ ó $\frac{2}{4} + \frac{3}{5} = \frac{(5 \cdot 2) + (4 \cdot 3)}{(4 \cdot 5)} = \frac{(10) + (12)}{20} = \frac{22}{20}$
6.Multiplicación	
$\frac{a}{d} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{db}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{(2 \cdot 4)}{(3 \cdot 5)} = \frac{8}{15}$
7.División	
$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}; c \neq 0, b \neq 0$	$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{(2 \cdot 5)}{(3 \cdot 4)} = \frac{10}{12};\ \ c \neq 0, b \neq 0$
8.División de cero y por Cero	
$0 \div b = \frac{0}{b} = 0; b \neq 0$ $0 \div 0$; está indeterminado $a \div 0 = \frac{a}{0}$; está indefinido	$0 \div 2 = \frac{0}{2} = 0;\ \ 2 \neq 0$ $3 \div 0 = \frac{3}{0}$

Tabla 2.3. Propiedades para las fracciones.

e) $\dfrac{25}{45} - \dfrac{2}{9} =$

f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

2.4. Propiedades para la eliminación de los símbolos de agrupación (llaves, paréntesis y corchetes)

En el proceso de simplificación de expresiones algebraicas se requiere de la eliminación de símbolos de agrupación, empleando las propiedades que se enlistan a continuación:

Propiedad 1. Si el símbolo de agrupamiento está precedido por el signo (+) dicho símbolo puede ser eliminado sin modificar los términos que contiene.

Ejemplo 2.1 *Realice la siguiente operación.*
$(1+2)+(3+4) = 1+2+3+4 = 10$

Ejemplo 2.2 *Realice la siguiente operación.*
$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right)-(\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{8} = \dfrac{12+16-18-12}{24} = \dfrac{-2}{24} = \dfrac{-1}{12}$

Propiedad 2. Si el símbolo de agrupamiento está precedido por el signo (-) dicho símbolo puede ser eliminado cambiando el signo de cada uno de los términos que contiene.

Ejemplo 2.3 *Realice la siguiente operación.*
$(1+2)-(3+4) = 1+2-3-4 = -4$

Ejemplo 2.4 *Realice la siguiente operación.*
$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right)+(\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8} = \dfrac{12+16+18+12}{24} = \dfrac{28+30}{24} = \dfrac{58}{24} = \dfrac{29}{12}$

Propiedad 3. Cuando en una expresión algebraica se tienen uno o más pares de símbolos de agrupación encerrados en otro par, se eliminan primero los signos de agrupación más internos.

Ejemplo 2.5 *Realice la siguiente operación.*
$1-[(1+2)-(3-4)] =$
Pasos:
$1-[(1+2)-(3-4)] =$ *Se aplica la propiedad 3, por tanto resolvemos primero* $(1+2)-(3-4) = 1+2-3+4 = +4$
$= 1-[+4]$ *Se aplica la propiedad 2*
$= 1-4 = -3$

Ejemplos 2.6 *Realice la siguiente operación.*
$2-\{3a+a-[5+7+(a+2a)]\} =$
Pasos:

$2-\{3a+a-[5+7+(a+2a)]\}$ *Se aplica la propiedad 3.*
$=2-\{3a+a-[5+7+3a]\}$ *Se aplica la propiedad 2.*
$=2-\{3a+a-5-7-3a\}$
$=2-\{a-12\}$ *Se aplica la propiedad 2.*
$=2-a+12$
$=14-a$

Propiedad 4. Cuando una expresión algebraica contiene símbolos de agrupación que indican multiplicación, suma y resta al mismo nivel. La jerarquía en el desarrollo de las operaciones prioriza a las multiplicaciones y a las divisiones sobre las sumas y restas. Por consiguiente la primera operación que debe efectuarse en el Ejemplo 2.7 es la multiplicación.

Ejemplo 2.7 *Realice la siguiente operación.*
$(1+2)-(3\cdot 5)=$
Pasos:
$(1+2)-(3\cdot 5)$ *Se aplica la propiedad 4.*
$=(1+2)-(15)$ *Se aplica la propiedad 2.*
$=1+2-15$
$=3-15$
$=-12$

Ejemplo 2.8
$1+4-4\,[3+2\,(5-2)+(3)(5)]=$
Pasos:
De acuerdo a la propiedad 3, resolvemos primero lo siguiente
$1+4-4\,[3+2\,(5-2)+(3)(5)]=$ *Se aplica la propiedad 4.*
$=5-4\,[3+2\,(5-2)+15]$ *Se aplica la propiedad 1 y 2.*
$=5-4\,[3+2(3)+15]$ *Resolvemos*
$=5-4\,[3+6+15]$ *Se aplica la propiedad 2.*
$=5-4(24)$
$=5-96=-91$

Ejercicios de Taller

1. Resuelva las operaciones indicadas
a) $7+(-2)+(-3)=$
b) $4-(-1)+(-2)=$
c) $(4r-3u-6t)+(3r+5u+2t)=$
d) $(2s+3i-4m)+(3s-2i+3m)+(-4s-5i)=$
e) $5c+2\,(4a-2b)-3\,(2a-2b-c)=$
f) $4s-[2s-(3s-t)+2]=$
g) $-3\{4-[2(-3-5)-4(-3+5)]-8\}$

h) $-8 + 16/4 =$
i) $4 \cdot 5 + 6/2 - 8 \cdot 5 =$
j) $4 \cdot (5 + 6)/(2 - 8) \cdot 5 =$

Ejercicios de Tarea

1. Aplique las propiedades a las siguientes expresiones para simplificarlas
a) $-\dfrac{(-x)}{-y} =$
b) $\dfrac{2\,(u+v)}{2v} =$
c) $(2x - y + 3z) + (4x - 3y + 2z) =$
d) $(5w + 3t - 8u) + (2w + t - 6u) =$

2. Resuelva las operaciones indicadas
a) $3 + 5 - 2 =$
b) $13 - 14 + 2 - 8 =$
c) $9a - 2a - 3a =$
d) $7p + 8q - p + q =$
e) $1 + 6 * 3 =$
f) $13 - 2 - (1 - 3) =$
g) $12x + 2x - 7x =$
h) $5 - 2/(-1) =$
i) $2 - 3 - 12 + 1 =$
j) $2x - 5x - 8x =$
k) $7 - 2 * 2 - 3 =$
l) $5a + 2b - 7a - b =$
m) $11 * 6/33 * (2 + 1) =$
n) $12y + 3a - 5y - a =$
o) $5s - [2t + (3s - 4t) - s] =$
p) $3x - \{2x + [3x - 2y - 3\,(5x - 4y) - 2x] - 5y\} =$
q) $4b - (3a - 2c) - 2\,(2b - 3c) =$
r) $2a - [y - (2a + 3y) - y] =$
s) $2b - [5a - 5\,(2a - 3b) - a] =$
t) $4x - 2\,\{3y + [4x - 4\,(3y - 4x) - 3y] - 4x\} - 3y =$
u) $y + \{3y - 2\,[5x - y - (3x - 2y) - y] - 2x\} =$

3. Indique en cada una de las expresiones la propiedad que se aplica (x,y,z representan números reales).
a) $(x + y)\,1 = x + y$
b) $(x + 2) + [-\,(x + 2)] = 0$

c) $(y+z)\left[\dfrac{1}{(y+z)}\right]=1$
g) $x\,(x+1)=0$ entonces $x=0$ ó $x+1=0$

4. Señale la propiedad del sistema de los números reales que justifica las siguientes igualdades:
a) $\left[(-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]z=-2\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)(z)\right]$
b) $(f+g)+3=(g+f)+3$
c) $(1+2)(-3)=1(-3)+2(-3)$

5. Calcule los resultados de las siguientes operaciones:
a) $\dfrac{7}{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}=$
b) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{9}=$
c) $\dfrac{1}{7}-\dfrac{3}{4}=$
d) $\dfrac{5}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3}=$
e) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{3}{4}=$
f) $\dfrac{4\,(3+c)}{4c}=$
g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3}=$
h) $\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=$
i) $\dfrac{1}{7}+3-\dfrac{2}{b}=$
j) $\left[(4)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right](-z)+z=$
k) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{7}-3=$
l) $5-\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}=$
m) $1-\dfrac{6}{7}+\dfrac{2c}{3}=$

Capítulo 3

Expresiones exponenciales

Una notación exponencial x^n representa el producto de un número real x multiplicado n veces por si mismo. La expresión x^n, se lee: "x a la enésima potencia", ó simplemente "x a la n". En la expresión n se le denomina **exponente** o **potencia** y a x se le denomina **base**.

Ejemplo 3.1 *Represente en notación exponencial, y luego resuelva:*
a) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$
b) $\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right)^4 = \mathbf{\frac{1}{625}}$
c) $\left(m^2\right)\left(m^2\right)\left(m^2\right) = (m^2)^3$
d) $(-3)\cdot(3)\cdot(-3)\cdot(3)\cdot(-3)\cdot(-3) = (-3)^4(3)^2 = (81)(9) = 729$
e) $-2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = -(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) = -(2)^4 = -2^4 = -16$
f) $-2\cdot -2\cdot -2\cdot -2 = (-2)^4 = 16$
g) $-3\cdot -3\cdot -3 + 2\cdot 2 - (-5\cdot -5\cdot -5\cdot -5\cdot -5) = (-3)^3 + 2^2 - (-5)^5 = -27 + 4 - (-3125) = 3102$

Ejemplo 3.2 *Desarrolle las siguientes potencias:*
a) $5(-2)^3 = 5\,(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 5\,(-8) = -40$
b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \mathbf{\frac{16}{81}}$
c) $-(4)^3 = -(4\cdot 4\cdot 4) = -64$
d) $-3(-8)^3 = -3(-8)(-8)(-8) = -3(-512) = 1536$
e) $-6^2 + (-2)^3 - (4)^3 = -36 - 8 - 64 = -108$

3.1. Leyes de los exponentes

Se han establecido varias reglas para combinar potencias, llamadas **leyes de los exponentes,** las cuales se resumen en la tabla 3.1. Además son útiles para simplificar expresiones algebraicas.

Ley	Descripción	Ejemplos
$x^m x^n = x^{m+n}$	El producto de potencias con la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$ $x^5 \cdot x^3 \cdot x^{-2} = x^{5+3-2} = x^6$ $x^{1/2} \cdot x^{3/4} = x^{1/2+3/4} = x^{5/4}$ $\left(4ab^2c\right)\left(-2a^3b^5\right) = -8a^4b^7c$
$\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	El cociente de dos potencias con la misma base es igual a la base elevada a la resta del exponente del numerador menos el exponente del denominador.	$\dfrac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$ $\dfrac{y^{-8}}{y^{-3}} = y^{-8-(-3)} = y^{-8+3} = y^{-5}$ $\dfrac{z^{2/7}}{z^{1/4}} = z^{2/7-1/4} = z^{1/28}$ $\dfrac{-6xy^2z^4}{4xyz^5} = \dfrac{-3}{2}x^0y^1z^{-1}$
$(x^m)^n = x^{mn}$	Una base a una potencia elevada a otra potencia es igual a la base elevada al producto de las potencias.	$\left(3^2\right)^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6 = 729$ $\left(x^{-2}\right)^4 = x^{-2\cdot 4} = x^{-8}$ $3\left(z^{-2}\right)^{-4} = 3z^{-2(-4)} = 3z^8$ $\left(x^{1/4}\right)^2 = x^{1/4\cdot 2} = x^{1/2}$
$(xy)^n = x^n y^n$	El producto de dos bases diferentes elevadas a una potencia es igual al producto de cada base elevada a la potencia.	$(4\cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$ $(xyz)^{-3} = x^{-3}y^{-3}z^{-3}$ $\left(2x^2y^3\right)^2 = 2^2\left(x^2\right)^2\left(y^3\right)^2 = 4x^4y^6$ $\left(x^{1/2}y^{2/3}\right)^6 = \left(x^{1/2}\right)^6\left(y^{2/3}\right)^6 = x^3y^4$
$\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$	Un cociente elevado a una potencia es igual al nuemrador elevado al a potencia entre el denominador elevado a la misma potencia.	$\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{8}{125}$ $\left(\dfrac{x}{y^5}\right)^{-2} = \dfrac{x^{-2}}{\left(y^5\right)^{-2}} = \dfrac{x^{-2}}{y^{-10}}$ $\left(\dfrac{u^{1/5}}{v^2}\right)^3 = \dfrac{u^{3/5}}{v^6}$ $\left(\dfrac{2x^{-3}y}{3z^2}\right)^4 = \dfrac{\left(2x^{-3}y\right)^4}{\left(3z^2\right)^4} = \dfrac{16x^{-12}y^4}{81z^8}$

Tabla 3.1. Leyes de los exponentes.

Ejemplo 3.3 *Utilice las leyes de los exponentes para simplificar las siguientes expresiones algebráicas:*

a) $\dfrac{\left(3x^3y^4\right)\left(4xy^5\right)}{\left(-2xy^2\right)^3} = \dfrac{(3)\,(4)\,x^3xy^4y^5}{(-2)^3\,x^3\left(y^2\right)^3} = \dfrac{12x^4y^9}{-8x^3y^6} = -\dfrac{3}{2}xy^3$

b) $\dfrac{\left(2a^2b^3c\right)^4}{4b^2c} = \dfrac{2^4\left(a^2\right)^4\left(b^3\right)^4c^4}{4b^2c} = \dfrac{16a^8b^{12}c^4}{4b^2c} = 4a^8b^{10}c^3$

c) $\left(\dfrac{2r^3}{s}\right)^4\left(\dfrac{s^2}{r^3}\right)^3 = \dfrac{\left(2r^3\right)^4}{s4}\cdot\dfrac{\left(s^2\right)^3}{\left(r^3\right)^3} = \dfrac{2^4\left(r^3\right)^4}{s^4}\cdot\dfrac{s^6}{\left(r^3\right)^3} = \left(\dfrac{16r^{12}}{s^4}\right)\left(\dfrac{s^6}{r^9}\right) = \dfrac{16s^6r^{12}}{s^4r^9} = 16s^2r^3$

d) $\left(u^{-2}v^{-3}\right)^{-3} = \left(u^{-2}\right)^{-3}\left(v^{-3}\right)^{-3} = u^6v^9$

e)$\left(-2x^{1/2}y^{1/3}\right)^6\left(3x^{1/2}y\right)^4 = (-2)^6\left(x^{1/2}\right)^6\left(y^{1/3}\right)^6\cdot 3^4\left(x^{1/2}\right)^4y^4 = 64x^3y^2\cdot 81x^2y^4 = 5184x^5y^6$

Ejercicios de Taller

1.-Aplique las leyes de los exponentes para simplificar las expresiones:

a) $x^6\cdot x^{-5}\cdot x^{-7} =$

b) $y^2\cdot y^{2/4}\cdot y^{3/8} =$

c) $(6^4)^7 =$

d) $(9^{-5})^{-2} =$

e) $\left(x^{2/3}\right)^2 =$

f) $(6tre)^4 =$

g) $(zw)^{5/6} =$

h) $\left(\dfrac{8}{3}\right)^6 =$

i) $\left(\dfrac{t}{2}\right)^{-2} =$

j) $\left(\dfrac{8^9}{8^3}\right) =$

k) $\left(\dfrac{7^{-5}}{7^{-3}}\right) =$

l) $\left(\dfrac{z^{7/3}}{z^{7/3}}\right) =$

2.- Simplifique las siguientes expresiones:

a) $(5z^2y^3)(6zy^4) =$

b) $(7x^2y^{-4})(-3x^2y^3)^2 =$

c) $(-3a^4b^2c)^5 =$

d) $\left(\dfrac{3x^4}{y}\right)^4\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^3 =$

e) $\left(z^{-4}w^{2}\right)^{-5} =$

f) $\dfrac{\left(-6x^{2}y^{-4}\right)^{2}(-2xy)^{3}}{4\left(xy^{2}\right)^{2}} =$

g) $\dfrac{\left(2x^{1/4}y^{1/3}\right)\left(3x^{2}y^{3}\right)^{2}}{\left(-2x^{1/2}y\right)^{4}} =$

3.1.1. Teorema sobre exponente negativo y cero

Estos teoremas se resumen en la tabla 3.2.

Teorema	*Descripción*	*Ejemplos*
$x^{0}=1$	Toda expresión elevada a la potencia cero es igual a uno.	$2^{0}=1$ $-5000^{0}=-1$
$x^{-n}=\dfrac{1}{x^{n}}$	Toda expresión exponencial con exponente negativo en el numerador puede representarse con exponente positivo en el denominador, o viceversa.	$2^{-3}=\dfrac{1}{2^{3}}=\dfrac{1}{8}$ $\dfrac{1}{(-4)^{-2}}=\dfrac{1}{\frac{1}{(-4)^{2}}}=(-4)^{2}=16$ $(xyz)^{-4}=\dfrac{1}{(xyz)^{4}}$ $\dfrac{a^{-2}}{b^{-2}}=\dfrac{b^{2}}{a^{2}}$

Tabla 3.2. Teoremas de exponente negativo y cero.

Ejemplo 3.4 *Simplifique evitando exponentes negativos en la expresión final.*

a) $\left(-2x^{3}y^{-2}\right)^{3}=(-2)^{3}\left(x^{3}\right)^{3}\left(y^{-2}\right)^{3}=-8x^{9}y^{-6}=\dfrac{-8x^{9}}{y^{6}}$

b) $\left(\dfrac{2}{3}a^{2}bc\right)^{-3}=\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}a^{2}bc\right)^{3}}=\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(a^{2}\right)^{3}b^{3}c^{3}}=\dfrac{1}{8/27a^{6}b^{3}c^{3}}=\dfrac{27}{8a^{6}b^{3}c^{3}}$

c) $\dfrac{-\left(2xyz^{2}\right)^{-4}(x^{2}y)^{2}}{\left(-xz^{3}\right)^{3}}=\dfrac{-(2)^{-4}x^{-4}y^{-4}z^{-8}x^{4}y^{2}}{(-1)^{3}x^{3}z^{9}}=\dfrac{-(2)^{-4}x^{0}y^{-4}z^{-8}}{-1x^{2}z^{9}}=\dfrac{-(1)y^{-4}z^{-8}}{-1\,(2)^{4}x^{2}z^{9}}=\dfrac{y^{-4}z^{-8}}{16x^{2}z^{9}}=$
$\dfrac{y^{-4}z^{-17}}{16x^{2}}=\dfrac{1}{16x^{2}y^{4}z^{17}}$

d) $\left(-3r^{-2}s^{-4}t\right)^{3}=(-3)^{3}r^{-6}s^{-12}t^{3}=\dfrac{-27t^{3}}{r^{6}s^{12}}$

e) $\left(x^{1/3}y^{2/3}\right)^{2}=x^{2(1/3)}y^{2(2/3)}=x^{2/3}y^{4/3}$

f) $(a^{-2}bc^{3})^{\frac{1}{2}} = a^{-1}b^{1/2}c^{3/2} = \dfrac{b^{1/2}c^{3/2}}{a^{1}} = \dfrac{b^{1/2}c^{3/2}}{a}$

Ejercicios de Taller

Simplifique evitando exponentes negativos en la expresión final.

a) $\dfrac{3a^4b^2c}{2a^6bc^8} =$

b) $\left(-2x^{1/2}y^{-2}z^{1/3}\right)^2 =$

c) $\dfrac{2xy^2z^{1/2}}{4xy^4z^{1/3}} =$

d) $\dfrac{\left(x^{1/3}y^{3/2}\right)\left(x^{5/3}y^{9/2}\right)}{x^{2/3}y} =$

e) $\left(-3p^4q^{-1/4}\right)^3 =$

Ejercicios de Tarea

1. Escriba la expresión con exponentes positivos. Suponga que en todos los ejercicios las variables son diferentes de cero.

a) $\dfrac{1}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3} =$

b) $7 \cdot 7 \cdot 7 =$

c) $4x \cdot 4x \cdot 4x \cdot 2y \cdot 2y =$

d) $\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{1}{y} =$

2. Encuentre los números indicados.

a) $3^4 =$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 =$

c) $3^{-4} =$

d) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3} =$

e) $-3^{-4} =$

f) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} =$

g) $(-7)^2 =$

h) $-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5 =$

i) $-(7)^{-2} =$

j) $(-5)^0 =$
k) $(-1)^{-1} =$

3. Evalúe las siguientes expresiones:
a) $2 - 2^1 =$
b) $\dfrac{2^{-1} - 3^{-1}}{2^{-1} + 3^{-1}} =$
c) $\dfrac{(-1)^5 - 2^6}{(-1)^{-1}} =$

4. Encuentre el valor de la expresión considerando que $a = 2$, $b = -3$ y $c = -1$
a) $-2ab + c^2 =$
b) $ab^2 - c^3 =$
c) $ab^2 + bc^2 + ca^2 =$
d) $a^{-1}b^{-1}c^{-1} =$
e) $ab^{-1} + ca^{-1} =$
f) $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} =$

5. Simplifique y elimine cualquier exponente negativo:
a) $x^6x^2 =$
b) $2^{10}2^{12} =$
c) $\left(7x^4\right)\left(-3x^2\right) =$
d) $\left(-5x^2y^3\right)\left(3xy^{-2}\right) =$
e) $\dfrac{2^8}{2^3} =$
f) $\dfrac{3^4}{3^{-2}} =$
g) $\dfrac{10^{-7}}{10^4} =$
h) $\dfrac{35x^5y^8}{-21x^9y^{-1}} =$
i) $(5x)^2 =$
j) $(-4x)^3 =$
k) $\left(x^4\right)^{-5} =$
l) $\left(4x^2y^{-1}\right)^3 =$
m) $\left(3x^2y^4\right)^{-2} =$
n) $x^2x^3x^{-4} =$

6. Simplifique evitando exponentes negativos en la expresión final.
a) $\dfrac{-x^5\left(y^2\right)^3}{(xy)^2} =$

b) $\left(-3xy^5\right)^2\left(x^3y\right)^{-1} =$

c) $\dfrac{\left(7a^2b^3\right)^2}{a^3b^5} =$

d) $\left(\dfrac{a^4b^{-5}}{b^2}\right)^{-1} =$

e) $\left(\dfrac{a^{3/4}b^3}{b^{-2}}\right)^2 =$

f) $\dfrac{\left(-xy^2z^3\right)\left(y^4z^5\right)}{\left(xy^2z^3\right)^{-1}} =$

g) $\dfrac{(3abc)^3}{(2a^{-1}b^{-2}c)^2} =$

h) $\left(-2x^{-2}y^{1/3}z^{1/5}\right)^3 =$

i)$\left(\dfrac{6xyz^2}{5xy^2}\right)^{-3} =$

j)$\dfrac{4x^{-3}y^{4/5}z}{6xyz} =$

3.2. Radicales

En algunos problemas matemáticos se llega a planteamientos tales como $5^2 = 25$, $x^3 = 64$. Los valores para x se llaman raíces. En particular, si $s^2 = 25$, entonces a s, se llama la raíz cuadrada de 25; para $x^3 = 64$, decimos que x es la raíz cúbica de 64.

En general, las raíz r de un número x se definen por el enunciado $\sqrt[n]{x}$ si y solo si $r^n = x$, donde x y r son números reales no negativos y n es un entero positivo, o x y r son números reales negativos y n es un entero positivo impar. Al número r, se le denomina la raíz enésima principal de x.

La expresión se llama radical, el número n es el **índice del radical** y x se llama **radicando**. El símbolo se llama signo radical.

Si n es impar, se puede demostrar que para cualquier valor x hay exactamente una raíz enésima real de x.

Ejemplo 3.5 *Realizar las siguientes operaciones:*

a) $\sqrt{4} = 2$

b) $-\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} = -\dfrac{1}{3}$

c) $\sqrt[3]{64} = 4$

d) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$

e) $\sqrt{-4}$ es un número imaginario, no tiene solución real.

f) $\sqrt[4]{-13}$ es un número imaginario, no tiene solución real.

g) $\sqrt[3]{-8} = -2$

h) $\sqrt[7]{-2187} = -3$

Si "n" es par y "x" es negativo no hay raíz enésima real de "x" (la raíz sería un número imaginario).

En los incisos e y f no hay solución en los números reales; a estos números se les conoce como números imaginarios. En los incisos g y h, se puede notar que también se tiene un número negativo en el radicando, sin embargo el resultado no es un número imaginario, es un número real. A diferencia de los incisos anteriores, en los incisos g y h se está obteniendo una raíz cúbica y una raíz de séptima respectivamente, y los números negativos si tienen raíces impares.

En otras palabras podemos establecer que, los números negativos no tienen raíces pares reales, pero si raíces impares reales.

3.2.1. Leyes de los radicales

Estas propiedades que se muestran en la tabla 3.3, se pueden usar frecuentemente para simplificar expresiones que contengan radicales.

3.2.2. Operaciones con radicales

Para efectuar las operaciones de suma y/o resta de radicales es necesario que éstos sean de igual radicando y del mismo orden –índice de radical–, y cuando se trate de multiplicación o división se utilizan las leyes de los radicales expuestas con anterioridad.

Ley	Descripción	Ejemplos
$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$	Si se tiene un radical elevado a un exponente igual al índice del radical, su resultado será el radicando.	$\left(\sqrt[3]{17}\right)^3 = 17$ $\left(\sqrt[5]{xy}\right)^5 = xy$
$\sqrt[n]{x^n} = x,\ si\ n\ es\ impar$ $\sqrt[n]{x^n} = \lvert x\rvert,\ si\ n\ es\ par$	En un radical donde el índice del radical y la potencia del radicando son iguales se pueden diferir dos casos.	$\sqrt[3]{x^3} = x$ $\sqrt[7]{-y^7} = -y$ $\sqrt[2]{3^2} = \lvert 3\rvert = 3$ $\sqrt[4]{(-5)^4} = \lvert -5\rvert = 5$
$\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$	El producto de dos radicales con el mismo índice de radical y diferente radicando, es igual al producto de los radicandos en un solo radical con el mismo índice de radical.	$\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9\cdot 3} = \sqrt[3]{27}$ $\sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{16\cdot 81} = \sqrt[4]{1296}$ $\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x^3y^2} = \sqrt[3]{x^2\cdot x^3y^2} = \sqrt[3]{x^5y^2}$
$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$	El cociente de dos radicales con el mismo índice de radical y diferente radicando, es igual al radical del mismo índice del cociente de los dos radicandos.	$\dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[4]{\dfrac{16}{32}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{343}} = \sqrt[3]{\dfrac{512}{343}}$ $\dfrac{\sqrt[4]{xy^2}}{\sqrt[4]{x^2y}} = \sqrt[4]{\dfrac{xy^2}{x^2y}} = \sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$	Un radical sobre otro, es igual a un solo radical, donde el índice es el producto de ambos índices.	$\sqrt[4]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[8]{64}$ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[9]{25}$ $\sqrt[6]{\sqrt[3]{xy^3}} = \sqrt[18]{xy^3}$

Tabla 3.3. Leyes de los radicales.

Ejemplo 3.6 *Aplique las leyes de los radicales para simplificar las expresiones:*

a) $\left(\sqrt[6]{1894}\right)^6 = 1894$

b) $\left(\sqrt[8]{xy^3}\right)^8 = xy^3$

c) $\sqrt[5]{-25^5} = -25$

d) $\sqrt[6]{-25^6} = |-25| = 25$

e) $\sqrt[8]{xz^4}\,\sqrt[8]{x^5y^2z} = \sqrt[8]{xz^4 \cdot x^5y^2z} = \sqrt[8]{x^6y^2z^5}$

f) $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{618}}{\sqrt[3]{309}} = \sqrt[3]{\dfrac{618}{309}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

h) $\sqrt[2]{\sqrt[15]{x^2z}} = \sqrt[30]{x^2z}$

Ejemplo 3.7 *Simplificar las siguientes expresiones.*

a) $3\sqrt{b} + 4\sqrt{b} - \sqrt{b} = 6\sqrt{b}$

b) $\sqrt{72} - 4\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{36 \cdot 2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

c) $3\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{162} = 3\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{6 \cdot 8} + \sqrt[3]{6 \cdot 27} = 3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{6} = 4\sqrt[3]{6}$

d) $\sqrt[3]{2ab}\,\sqrt[3]{3a^4b^2} = \sqrt[3]{6a^5b^3} = \sqrt[3]{6 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^3} = ab\sqrt[3]{6a^2}$

e) $\sqrt[5]{7xy}\,\sqrt[5]{2y^3}\,\sqrt[5]{x^2y} = \sqrt[5]{14x^3y^5} = y\sqrt[5]{14x^3}$

f) $\dfrac{\sqrt{8x^3y^4}}{\sqrt{2xy}} = \sqrt{\dfrac{8x^3y^4}{2xy}} = \sqrt{4x^2y^3} = \sqrt{4 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot y} = 2xy\sqrt{y}$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{24x^4y^5}\,\sqrt[3]{2xy}}{\sqrt[3]{3x^2y}} = \sqrt[3]{\dfrac{48x^5y^6}{3x^2y}} = \sqrt[3]{16x^3\mathbf{y}^5} = \sqrt[3]{8 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^2} = 2xy\sqrt[3]{2y^2}$

Ejercicios de Taller

1. Aplique las leyes de los radicales para simplificar.

a) $\left(\sqrt[4]{8}\right)^4 =$

b) $\left(\sqrt[3]{21}\right)^3 =$

c) $\sqrt[3]{x^3} =$

d) $\sqrt[7]{6^7} =$

e) $\sqrt[2]{27^2} =$

f) $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{9} =$

g) $\sqrt[4]{64}\,\sqrt[4]{25} =$

h) $\sqrt[5]{32}\,\sqrt[5]{243} =$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} =$

j) $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}} =$

k) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{45}} =$

l) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{16}} =$

2. Simplifique las expresiones.

a) $2\sqrt{a} + 7\sqrt{a} - \sqrt{a} =$

b) $3\sqrt{108} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{3} =$

c) $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{250} =$

d) $\sqrt{32} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{8} =$

Ejercicios de Tarea:

1. Escriba fuera del radical todos los factores posibles.

a) $\sqrt{18} =$

b) $\sqrt{45} =$

c) $\sqrt{48} =$

d) $\sqrt{72} =$

e) $\sqrt{75} =$

f) $\sqrt{128} =$

g) $\sqrt{320} =$

h) $\sqrt[3]{16} =$

i) $\sqrt[3]{448} =$

j) $\sqrt[4]{448} =$

k) $\sqrt[4]{32} =$

l) $\sqrt[4]{512} =$

m) $\sqrt{7x^4y^8} =$

n) $\sqrt{x^6} =$

o) $\sqrt{x^4y^2} =$

p) $\sqrt{3^4x^{10}} =$

q) $\sqrt[3]{-108} =$

r) $\sqrt[3]{320} =$

s) $\sqrt[4]{256} =$

t) $\sqrt[3]{x^9y^6m^3} =$

u) $\sqrt[4]{n^8p^4} =$

v) $\sqrt[3]{16m^3n^6} =$

w) $\sqrt{7x^4y^8} =$

x) $\sqrt{18m^7} =$

y) $\sqrt{6n^3k^9} =$

z) $\sqrt{16a^6d^4} =$
aa) $\sqrt{45a^9} =$
ab) $\sqrt[3]{125a^5b^7} =$
ac) $\sqrt{\dfrac{3a^3}{5b^4}} =$
ad) $\sqrt[3]{\dfrac{2m^2}{125n^7}} =$

2. Realice las operaciones que se indican.
a) $2\sqrt{a} + 7\sqrt{a} - \sqrt{a} =$
b) $3\sqrt{108} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{3} =$
c) $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{250} =$
d) $\sqrt{32} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{8} =$
e) $\sqrt{128} - 6\sqrt{8} + 2\sqrt{18} =$
f) $\sqrt{50} - 2\sqrt{72} + 3\sqrt{162} =$
g) $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \dfrac{1}{3}\sqrt{32} =$
h) $\sqrt{147} - \sqrt{75} + \sqrt{21} =$
i) $\sqrt{\dfrac{3}{25}} + \sqrt{48} - \sqrt{\dfrac{12}{9}} =$

3. Efectúe las operaciones indicadas
a) $\sqrt{2}\sqrt{8} =$
b) $\sqrt{6}\sqrt{24} =$
c) $\dfrac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}} =$
d) $\dfrac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{6}} =$
e) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$
f) $\dfrac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}} =$
g) $\dfrac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}} =$
h) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{96}} =$

4. Simplifique cada una de las siguientes expresiones.
a) $\sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8} =$
b) $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3} =$

c) $\left(\sqrt[5]{r}\cdot\sqrt[5]{s}\right)^5 =$

d) $\sqrt[3]{2x^2y^3}\cdot\sqrt[3]{4xz^3} =$

e) $\sqrt{6a^2b}\sqrt{2ab^7} =$

f) $\dfrac{\sqrt{7a^3b}}{\sqrt{ab}} =$

g) $\sqrt{\dfrac{3a}{5b^3}}\sqrt{\dfrac{25a^3}{6b}} =$

h) $\sqrt{\dfrac{343n^7p^2}{5n^3p^5}} =$

i) $\dfrac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}} =$

3.2.3. Racionalización

En una expresión algebraica del tipo racional que contenga algún radical, puede este eliminarse mediante un procedimiento denominado racionalización. Racionalizar el numerador significa eliminar el radical existente precisamente del numerador. Racionalizar el denominador significa eliminar el radical existente del denominador. El procedimiento consiste en multiplicar el numerador y denominador por una expresión conveniente, es decir, por una expresión algebraica que provoque la eliminación deseada.

Ejemplo 3.8 *Racionalizar las siguientes expresiones.*

a) $\dfrac{7}{\sqrt{2}} = \dfrac{7}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{5}{3\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5}\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) = \left(\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\right) = \dfrac{3-2}{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{1}{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$

Ejercicios de Taller

1. Racionalice el numerador

a) $\dfrac{\sqrt{7}}{3} =$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$

c) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{7} =$

2. Racionalice el denominador

a) $-\dfrac{3}{\sqrt{7}} =$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

Ejercicios de Tarea

1. En las siguientes expresiones racionalice el numerador

a) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{6} =$

b) $\dfrac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{11}+2} =$

c) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{5} =$

2. En las siguientes expresiones racionalice el denominador

a) $\dfrac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} =$

b) $\dfrac{5}{2-\sqrt{5}} =$

c) $\dfrac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{11}+2} =$

3.3. Exponentes racionales

El concepto de la raíz enésima de un número nos capacita para ampliar la definición de x^n de exponentes enteros a exponentes racionales; y como veremos con frecuencia es más fácil trabajar con exponentes racionales que con radicales.

Para cualquier número x y para cualquier entero positivo n, definimos: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ dado que $\sqrt[n]{x}$ sea un número real. Así, $x^{\frac{1}{n}}$ es simplemente otra forma de designar la raíz enésima principal de x. Además, definimos: $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ para cualquier número entero "m" tal que $\dfrac{m}{n}$ sea la mínima expresión. Se necesita ésta última definición si la ley de exponentes $(x^r)^s = x^{rs}$ va aplicarse a exponentes racionales.

Ejemplo 3.7 *Desarrollar las siguientes potencias.*

a) $(25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

b) $(64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $(0{,}09)^{\frac{5}{2}} = \left[(0{,}09)^{\frac{1}{2}}\right]^5 = \left(\sqrt{0{,}09}\right)^5 = (0{,}3)^5$

d) $(-27)^{-\frac{5}{3}} = \left[(-27)^{\frac{1}{3}}\right]^{-5} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^{-5} = \left[\sqrt[3]{(-3)^3}\right]^{-5} = (-3)^{-5} = \dfrac{1}{(-3)^5} = -\dfrac{1}{243}$

Para $x < 0$; se puede demostrar que

$$(x^m)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = x^{\frac{m}{n}},$$

sin embargo, para $x < 0$ y ciertas opciones de m y n, $x^{\frac{1}{n}}$ no es un número real y, en consecuencia $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ no esta definida, aunque la expresión $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ podría estar definida.

Por otro lado, si $x^{\frac{m}{n}}$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, y $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ cada una representa un número real; entonces todos son iguales.

Aunque $(125)^{\frac{2}{3}} = \left((125)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left((125)^2\right)^{\frac{1}{3}}$; la evaluación de $\left((125)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25$ se puede hacer mentalmente, mientras que $\left((125)^2\right)^{\frac{1}{3}} = (15625)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{15625} = 25$ podría necesitar el uso de calculadora.

El siguiente caso demuestra que $x^{\frac{m}{n}}$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, y $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ no son equivalentes.

Compare a) $x^{\frac{m}{n}}$ b) $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ c) $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ para $x = -9, m = 2, n = 2$

a) $x^{\frac{m}{n}} = (-9)^{\frac{2}{2}} = -9$

b) $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left((-9)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (81)^{\frac{1}{2}} = 9$

c) $(x^m)^{\frac{1}{n}} = \left((-9)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{-9}\right)^2$, que no es un número real ya que contiene la raíz cuadrada de un número negativo (complejo).

Ejercicios de tarea

1. Realice las siguientes operaciones.

a) $\left(a^2b^{-8}\right)^{\frac{1}{4}} =$

b) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{2}}} =$

c) $\left(\dfrac{3x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{5}} =$

d) $\sqrt{x^4\sqrt{x}} =$

e) $-\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}} =$

2. Vuelva a escribir la expresión usando exponentes racionales.
Nota: *Para todos los ejercicios suponga que todas las variables son positivas.*
a) $\sqrt[3]{ab} =$

b) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^4} =$

c) $\sqrt[5]{7x} =$

d) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^3} =$

e) $\sqrt[7]{x+y} =$

f) $\sqrt[3]{a^2+b^2} =$

g) $\sqrt{\left(x+\sqrt{x}\right)} =$

h) $\sqrt{x^2+y^2} =$

3. Vuelva a escribir la expresión usando notación radical.
a) $a^{2/3} =$
b) $2a^{1/3} =$
c) $(3a)^{2/3} =$
d) $2a^{2/3} =$
e) $3 + a^{2/3} =$
f) $(3+a)^{2/3} =$
g) $\dfrac{3}{a^{2/3}} =$
h) $(3a)^{-3/2} =$

4. Encuentre los números indicados.
a) $49^{1/2} =$
b) $-8^{1/3} =$
c) $(0{,}04)^{7/2} =$
d) $\left(\dfrac{1}{64}\right)^{2/3} =$

e) $\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-2/3} =$

f) $(27)^{7/3} =$

g) $(-27)^{-7/3} =$

h) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{162}}\right) =$

5. Simplifique y elimine cualquier exponente negativo.

a) $\left(3w^{\frac{3}{2}}\right)\left(7w^{\frac{5}{2}}\right) =$

b) $a^{\frac{3}{2}}\left(4a^{\frac{2}{3}}\right) =$

c) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{8}}\right) =$

d) $\left(2a^{\frac{1}{2}}\right)\left(2a^{\frac{1}{3}}\right)\left(2a^{\frac{1}{6}}\right) =$

e) $\left(a^2b^4\right)^{\frac{1}{4}} =$

f) $\left(100x^4\right)^{-\frac{3}{2}} =$

g) $\left(25x^{\frac{1}{3}}y\right)^{\frac{3}{2}} =$

h) $\left(4x^4y^{-6}\right)^{\frac{1}{2}} =$

i) $\dfrac{cd^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}d} =$

j) $\dfrac{4x^{\frac{1}{2}}}{(8x)^{\frac{1}{3}}} =$

k) $\left(\dfrac{-y^{\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1} =$

l) $\left[\left(-27a^3b^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 =$

6. Vuelva a escribir la expresión como un solo radical.

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}} =$

b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[8]{a}} =$

c) $\sqrt{x\sqrt{x}} =$

d) $\sqrt{x^3\sqrt{x}} =$

7. Realice las siguientes operaciones, todas las variables representan números positivos.

a) $\left(\sqrt{10abc}\right)\left(\sqrt{15a^3c}\right)\left(\sqrt{12bc}\right) =$

b) $\sqrt[3]{9xy^2}\,\sqrt[3]{6x^2y^4}\,\sqrt[3]{60x^5y} =$

c) $\sqrt[4]{\frac{10}{3}a^3}\,\sqrt[4]{24a^2b^3} =$

d) $\left(\sqrt[3]{6a^2}\right)\left(\sqrt[2]{3a^3}\right) =$

e) $\left(\sqrt[3]{7m}\right)\left(\sqrt[4]{2m}\right) =$

f) $\dfrac{\sqrt{4x^2n}}{\sqrt{2xn}} =$

g) $\dfrac{\sqrt{3s^3}}{\sqrt[4]{3s}} =$

8. Racionalice el denominador de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{x^3y}{\sqrt[5]{2x^2y^3z}} =$

b) $\dfrac{3m^2}{\sqrt[4]{4mnp}} =$

c) $\dfrac{x^2-y^2}{3x\sqrt{x+y}} =$

d) $\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x-\sqrt{x^2+y^2}} =$

Capítulo 4

Polinomios y productos notables

4.1. Expresión de un polinomio de una variable

La expresión algebraica de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$ es un polinomio de grado n y variable x. Los coeficientes $\{a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ a_{n-3}, ...,\ a_2,\ a_1,\ a_0\}$ pertenecen al conjunto de los números reales; mientras los exponentes $\{n,\ n-1,\ n-2,\ n-3, ...,\ 2,\ 1\}$ pertenecen al conjunto de los números naturales.

Ejemplo 4.1 *Exprese el polinomio para* $n = 5$ *con coeficientes* $\{a_5 = 2, a_4 = -3, a_3 = 4, a_2 = 6, a_1 = 7, a_0 = 3\}$ *. Note que los coeficientes pertenecen al conjunto de los números enteros.*

$$2x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 7x + 3.$$

El grado del polinomio es 5.

Ejemplo 4.2 *Exprese el polinomio empleando los coeficientes* $\left\{a_6 = \frac{3}{2},\ a_5 = -4,\ a_4 = 0,\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_2 = 5,\ a_1 = 0,\ a_0 = -100\right\}$. *En este caso los coeficientes pertenecen al conjunto de los números racionales.*

Dicho polinomio es el siguiente:

$$\frac{3}{2}x^6 - 4x^5 + \frac{1}{4}x^3 + 5x^2 - 100.$$

Debido a que los coeficientes $a_4 = 0$ y $a_1 = 0$ los términos x^4 y x no aparecen en el polinomio. El exponente más grande es 6, por lo tanto el polinomio es de sexto grado.

Ejemplo 4.3 *Exprese el polinomio con coeficientes reales* $\left\{a_5 = \frac{1}{4},\ a_4 = -\sqrt{2},\ a_3 = 0,\ a_2 = 6,\ a_1 = 7,\ a_0 = -10\right\}$,

$$\frac{1}{4}x^5 - \sqrt{2}x^4 + 6x^2 + 7x - 10.$$

El polinomio es de grado 5.

Ejemplo 4.4 *Determine si la siguiente expresión algebraica es un polinomio*

$$\frac{6}{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x},$$

para identificar a que conjunto de números pertenecen los exponentes, la expresión puede escribirse como:

$$6x^{-2} - 4x^{1/3} + 5x^{-1}.$$

Puede notarse que los exponentes en la expresión son $\left\{-2,\ \frac{1}{3},\ -1\right\}$ y que pertenecen a los números racionales. Un polinomio tiene exponentes que pertenecen al conjunto de los números naturales. Por lo tanto la expresión no es un polinomio.

Algunos polinomios especiales son los siguientes:

Término algebraico	*Ejemplo*	*Grado*	*Polinomio*
a_0x^0, $[a_0 \neq 0]$	10	0	Constante
$a_1x^1 + a_0x^0$, $[a_1, a_0 \neq 0]$	$-7x - 8$	1	Lineal
$a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$, $[a_2, a_1, a_0 \neq 0]$	$-\frac{1}{4}x^2 + 5x - \sqrt{6}$	2	Cuadrático
$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$, $[a_3, a_2, a_1, a_0 \neq 0]$	$x^3 + 2x^2 + 8x + 1$	3	Cúbico

4.2. Polinomios de más de una variable

Existen polinomios con más de una variable; cada una de ellas tiene exponentes que pertenecen al conjunto de los números naturales.

Ejemplo 4.5. *Identifique las variables y los coeficientes del siguiente polinomio:* $-4x^3y^2 + x^4y^4 + \sqrt{2}xyz^2$

En el término aparecen las variables x, y, z y los coeficientes son $\{-4, 1, \sqrt{2}\}$. Todos los exponentes son números enteros positivos (naturales).

4.3. Monomios, Binomios y Trinomios

Un *monomio* es el polinomio representado por un solo término algebraico. Su grado se obtiene sumando los exponentes de sus variables.

Ejemplo 4.6 *Determine el grado del siguiente monomio:* $-8x^3y^4$.

El grado del monomio es $3 + 4 = 7$.

Los binomios son los polinomios de dos términos algebraicos. Un ejemplo es $6x^2 + 8y^3z$.

En el binomio anterior se involucran las variables x, y, z . El término $6x^2$ es de grado 2, mientras el término $8y^3z$ es de grado 4 . El grado de un binomio corresponde al del término con el mayor grado. Por tanto, el grado del binomio $6x^2 + 8y^3z$ es 4.

Ejemplo 4.7 *Determine el grado del siguiente trinomio:* $-3x^2yz^2 + 7x + y^2$.
Los grados de los términos son $\{5, 1, 2\}$ respectivamente. Por lo que el grado del trinomio es 5.

4.4. Términos semejantes

Los términos semejantes son aquellos que tienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes aunque sus coeficientes sean diferentes.

Ejemplo 4.8 *Del siguiente grupo de términos identifique aquellos que son semejantes.*
$\left\{7x, -4x^2, 8xy, -6xy, \sqrt{5}yx^2, -4x, \frac{5}{3}x, 6x^2y, -3xy^2\right\}$
De acuerdo a la definición anterior se tienen los siguientes grupos de términos semejantes:
$\left\{7x, -4x, \frac{5}{3}x\right\}$, $\{8xy, -6xy\}$, $\{-4x^2\}$, $\left\{\sqrt{5}yx^2, 6x^2y\right\}$ y $\{-3xy^2\}$.

Ejercicios de Taller

1.-Determine si la expresión es un polinomio. Si lo es, defina su grado y escriba si es un monomio, binomio o trinomio.

Expresión	Polinomio (Si/No)	Grado	Monomio, Binomio,Trinomio
$\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$			
$-4x^3 + 8xy - \sqrt{2}$			
$x^{-3} + 6x + 8$			
$x^2 + 5x + 6$			
$6ab + 5ab^2$			
$\sqrt[3]{x} + 5xy$			
$x + y + z$			

2.- Agrupe los términos semejantes

$$\left\{-2ax,\ -2xy,\ 3x^2y^2,\ \sqrt{8}xy^2,\ -6xy^2,\ 5ax,\ -4bx,\ 5xy,\ \frac{1}{3}x^2y,\ -3xy^2,\ -2x^2y,\ 7ax,\ 5xy\right\}$$

Términos semejantes
1.-
2.-
3.-
4.-
5.-

4.5. Operaciones con polinomios

4.5.1. Suma

Ejemplo 4.9 *Realizar la suma* $(6x^2 + 8xy - 4y^2) + (-4x^2 + 7xy + 2y^2) =$

Para efectuar la operación se deben identificar los términos semejantes y agruparlos: $6x^2 + 8xy - 4y^2 - 4x^2 + 7xy + 2y^2 = (6x^2 - 4x^2) + (8xy + 7xy) + (-4y^2 + 2y^2)$.

Finalmente, se suman los coeficientes: $(6-4)x^2 + (8+7)xy + 7xy + (-4+2)y^2 = 2x^2 + 15xy - 2y^2$.

Ejemplo 4.10 *Realizar la suma* $(\frac{1}{7}a^2b^2 + 6a^2b - \frac{2}{3}ab^2 + 2a^2) + (\frac{2}{5}a^2b^2 - 3a^2b - 2ab^2) =$

Agrupando términos semejantes se obtiene $(\frac{1}{7}a^2b^2 + \frac{2}{5}a^2b^2) + (6a^2b - 3a^2b) + (-\frac{2}{3}ab^2 - 2ab^2) + 2a^2$

Sumando los coeficientes: $\frac{19}{35}a^2b^2 + 3a^2b - \frac{8}{3}ab^2 + 2a^2$

4.5.2. Resta

Ejemplo 4.11 *Efectuar la siguiente resta* $(-3x^2 + 2xy - 7y^2) - (-2x^2 - 8xy + 6y^2 - 8x) =$

Al aplicar el signo negativo al segundo grupo de términos se tiene:$(-3x^2 + 2xy - 7y^2) + (2x^2 + 8xy - 6y^2 + 8x)$

Agrupando términos y sumando coeficientes:$(-3x^2 + 2x^2) + (2xy + 8xy) + (-7y^2 - 6y^2) + 8x = -x^2 + 10xy - 13y^2 + 8x$

Ejemplo 4.12 *Efectuar la siguiente resta* $(8cd^2 - \frac{2}{3}cd - 4c) - (-\sqrt{7}cd^2 + \frac{1}{3}cd - 8c) =$

Al aplicar el signo negativo al segundo grupo de términos se tiene:$(8cd^2 - \frac{2}{3}cd - 4c) + (\sqrt{7}cd^2 - \frac{1}{3}cd + 8c)$

Agrupando términos: $(8cd^2 + \sqrt{7}cd^2) + (-\frac{2}{3}cd - \frac{1}{3}cd) + (-4c + 8c)$

y sumando coeficientes se tiene: $= (8 + \sqrt{7})cd^2 + (-\frac{2}{3} - \frac{1}{3})cd + (-4 + 8)c = (8 + \sqrt{7})cd^2 - cd + 4c$

Ejercicios de Taller

a) $(6x + 2y - 3z) + (-4x + 8y - z) =$

b) $\left(-2xy + 5y^2 - \dfrac{2}{5}z^3\right) + \left(3xy - 5y^2 - \dfrac{1}{5}z^3\right) =$

c) $(5a + 2ab - 3ac) + \left(\dfrac{5}{3}a - \dfrac{1}{4}ab - 3ab\right) =$

d) $\left(\sqrt{2}x + \dfrac{1}{3}y\right) + \left(-4x + \dfrac{2}{3}y\right) =$

e) $(-2a + 3b + 2c) - (-4a - 2b + 5c) =$

f) $\left(-2x^2y - 6y^2 - \dfrac{2}{5}z^3\right) - \left(-2x^2y + 56y^2 - \dfrac{7}{5}z^3\right) =$

g) $\left(-2u + 5v - 3w^2\right) - (-3u - 2v + 2w) =$

h) $\left(\sqrt{2}xy + \dfrac{3}{4}y\right) - \left(-4xy + \dfrac{5}{6}y\right) =$

4.5.3. Multiplicación

Producto de dos monomios

Ejemplo 4.13 *Resolver el siguiente producto* $(-2x^2y^3z)(5xy^2z^3) =$
Considerando las leyes de los exponentes, se tiene: $(-2)(5)x^2xy^3y^2zz^3 = -10x^3y^5z^4$

Producto de un monomio por un binomio

Ejemplo 4.14 *Resolver el siguiente producto* $(7xy^2)(6x^3y - 5x^2yz^3) =$
Se aplica la propiedad distributiva como sigue: $(7xy^2)(6x^3y) - (7xy^2)(5x^2yz^3) = 42x^4y^3 - 35x^3y^3z^3$

Producto de dos binomios

Ejemplo 4.15 Resolver *el siguiente producto* $(6a + 5ab^2)(-3b + 8ab^2) =$
Al aplicar la propiedad distributiva y las leyes de los exponentes se tiene: $(6a)(-3b) + (6a)(8ab^2) + (5ab^2)(-3b) + (5ab^2)(8ab^2) = -18ab + 48a^2b^2 - 15ab^3 + 40a^2b^4$

Ejercicios de Taller

Simplificar las siguientes expresiones.

a) $\left(-2a^2b^3c^5\right)\left(4a^2bc^2\right) =$

b) $\left(5xy^2z\right)\left(-3xz^5 + \dfrac{1}{5}xy^3z^2\right) =$

c) $\left(3p^2q^5r^3\right)\left(-3pqr^3 + \sqrt{5}pr^5\right) =$

d) $\left(2a^2b + c\right)(5a - 2c) =$

e) $\left(\frac{1}{4}xy^2 + 2yz\right)\left(\frac{4}{3}xy^2 - 2yz + 8y\right) =$

4.5.4. División

Ejemplo 4.16 *Resolver* $(8x^3y + 10x^2 - 4x^2y - 5x)/(4xy + 5) =$

En el primer paso (i) mostrado en la Figura 4.1 se busca el factor requerido para que al operar sobre $4xy$, resulte $8x^3y$. O sea, $(Factor)(4xy) = 8x^3y$; el factor que cumple es $2x^2$.

El monomio $2x^2$ opera sobre el divisor $4xy + 5$,resultando: $2x^2(4xy + 5) = 8x^3y + 10x^2$. Dicho binomio se resta al dividendo, dando como resultado cero.

En el segundo paso (ii) se bajan los términos que quedan del dividendo y se busca un factor que al operar sobre $4xy$, resulte $-4x^2y$. El factor que cumple es $-x$.

Se multiplica el factor por el divisor $-x(4xy+5) = -4x^2y-5x$. Dicho término se resta al dividendo dejando un cero como residuo.

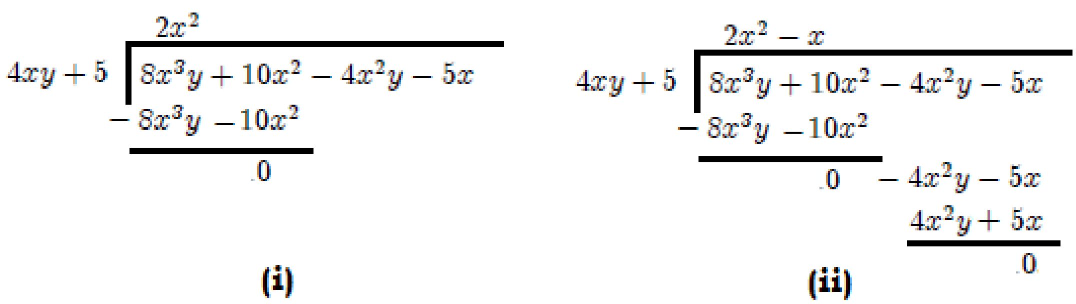


Figura 4.1. Procedimiento del ejemplo 4.16.

Ejemplo 4.17 *Resolver* $(18a^2 + b^2 + 9ab + 12a + 12)/(6a + b) =$

En el primer paso (i) de la Figura 4.2 se busca el factor que al operar sobre $6a$ dé como resultado $18a^2$. O sea, $(Factor)(6a) = 18a^2$. Dicho factor es $3a$. Al multiplicar el factor por el divisor se tiene $(3a)(6a + b) = 18a^2 + 3ab$, este binomio se resta al dividendo quedando como diferencia $b^2 + 6ab$.

En el segundo paso (ii) el factor empleado para operar es b. Al multiplicar b por el divisor se obtiene $b^2 + 6ab$ valor que se resta al dividendo.

Finalmente (iii) se bajan los últimos términos del dividendo. En este caso el factor para operar es el 2, se multiplica por el divisor y se resta al dividendo; quedando como residuo $-2b + 12$.

Ejercicios de Taller

a) $\left(48x^3 + 64x^2 + 30x + 20\right) / (6x + 8) =$

b) $\left(a^2 + 3ab + 2b^2\right) / (a + b) =$

c) $\left(30x^5 + 45x^2\right) / \left(15x^2\right) =$

d) $\left(5x^3 + 4x^2 + 5xy + 4y\right) / (5x + 4) =$

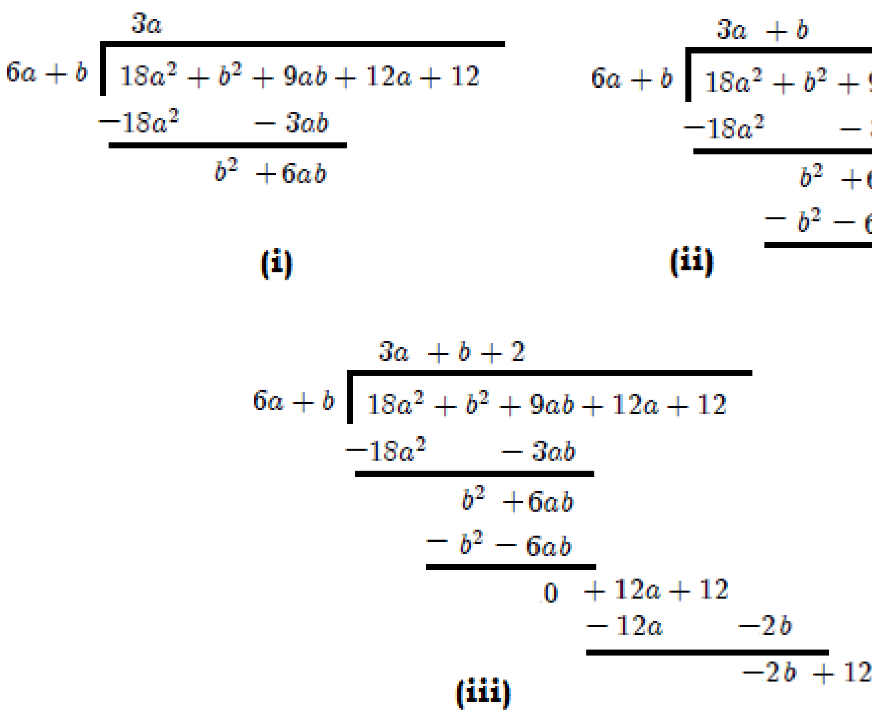


Figura 4.2. Procedimiento del Ejemplo 4.17.

4.5.5. Productos notables.

En la solución de problemas matemáticos existen algunos productos que aparecen frecuentemente y que con experiencia pueden desarrollarse de forma directa. Estos productos se conocen como *productos notables*.

Binomio al cuadrado

Se representa y desarrolla de la siguiente forma

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ab + bb,$$

que en forma compacta se puede escribir

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

El resultado de desarrollar un binomio al cuadrado se le llama *Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)*. En lenguaje común, este producto notable se describe así:

"*El cuadrado de la suma/resta de dos términos, resulta en el cuadrado del primer término más/menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término.*"

Ejemplo 4.18 *Desarrolle el producto* $(5p+6q)^2 =$

$$\begin{aligned}(5p+6q)^2 &= (5p)^2 + 2(5p)(6q) + (6q)^2\\ &= 25p^2 + 60pq + 36q^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.19 *Desarrolle el producto* $(3ab^2 - 5a^2c)^2 =$

$$\begin{aligned}(3ab^2 - 5a^2c)^2 &= (3ab^2)^2 + 2(3ab^2)(-5a^2c) + (5a^2c)^2\\ &= 9a^2b^4 - 30a^3b^2c + 25a^4c^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.20 *Desarrolle el producto* $(-\frac{1}{3}x^3y^2 + \sqrt{5}yz)^2 =$

$$\begin{aligned}(-\frac{1}{3}x^3y^2 + \sqrt{5}yz)^2 &= (-\frac{1}{3}x^3y^2)^2 + 2(-\frac{1}{3}x^3y^2)(\sqrt{5}yz) + (\sqrt{5}yz)^2\\ &= \frac{1}{9}x^6y^4 - \frac{2\sqrt{5}}{3}x^3y^3z + 5y^2z^2.\end{aligned}$$

Producto de binomios conjugados

El conjugado del binomio $(a+b)$ es $(a-b)$. Su producto se representa y desarrolla de la siguiente forma

$$(a+b)(a-b) = aa - ab + ab - bb = a^2 - b^2.$$

El resultado de multiplicar binomios conjugados se llama *Diferencia de Cuadrados.* En lenguaje común, este producto notable se describe así:

"*El producto de un binomio con su conjugado, resulta en el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.*"

Nota: *Se dice que dos binomios son conjugados cuando solo uno de sus términos cambia de signo, por ejemplo:* $(x-3)(-x-3)$ son conjugados, $(3+m)(3-m)$ son conjugados.

Ejemplo 4.21 *Desarrolle el producto* $(6x+8y)(6x-8y)=$

$$(6x+8y)(6x-8y)=(6x)^2-(8y)^2=36x^2-64y^2.$$

Ejemplo 4.22 *Desarrolle el producto* $(\frac{2}{3}ab^2+\sqrt{2}c)(\frac{2}{3}ab^2-\sqrt{2}c)=$

$$(\frac{2}{3}ab^2+\sqrt{2}c)(\frac{2}{3}ab^2-\sqrt{2}c)=(\frac{2}{3}ab^2)^2-(\sqrt{2}c)^2=\frac{4}{9}a^2b^4-2c^2.$$

Ejercicios de Taller

De a cuerdo a cada caso, identifique si se trata del producto de dos binomios idénticos (binomios al cudrado) o si se trata del producto de binomios conjuagdos. Desarrolle los binomios al cuadrado o realice el producto de los binomios conjugados.

a) $(-2a+3b)(-2a+3b)=$

b) $(\frac{2}{3}a^2b+7b^3)^2=$

c) $(-4x+\frac{1}{3}xy^2)^2=$

d) $(\sqrt{2}s^3+5s^2)(\sqrt{2}s^3+5s^2)=$

e) $(2a+3b)(2a-3b)=$

f) $(\frac{1}{3}a^2b^2+4b^5)(\frac{1}{3}a^2b^2-4b^5)=$

g) $(-\sqrt{5}xy^2+4x^2y)(\sqrt{5}xy^2+4x^2y)=$

h) $(x+5)(x-5)=$

Binomio al cubo

Un binomio al cubo se desarrolla como sigue

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3,$$

Por lo que se puede establecer en forma compacta

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

El resultado de desarrollar un binomio al cubo no tiene un nombre en especial. En lenguaje común, este producto notable se describe así:

"El cubo de la suma/resta de dos términos, resulta en el primer término elevado al cubo, más/menos el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo término, mas el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término, más/menos el segundo término elevado al cubo."

Ejemplo 4.23 *Desarrolle el siguiente binomio* $(3x^2 + 2y)^3 =$

Empleando el desarrollo de un binomio al cubo se tiene: $(3x^2 + y)^3 = (3x^2)^3 + 3(3x^2)^2(2y) + 3(3x^2)(2y)^2 + (2y)^3 = 27x^6 + 54x^4y + 36x^2y^2 + 8y^3$.

Ejemplo 4.24 *Desarrolle el siguiente binomio* $(2p - \frac{2}{3}p^2q)^3 =$

El binomio se desarrolla de la siguiente manera $(2p)^3 - 3(2p)^2(\frac{2}{3}p^2q) + 3(2p)(\frac{2}{3}p^2q)^2 - (\frac{2}{3}p^2q)^3$, al elevar los términos a sus respectivos exponentes, resulta: $8p^3 - 3(4p^2)(\frac{2}{3}p^2q) + 3(2p)(\frac{4}{9}p^4q^2) - (\frac{8}{27}p^6q^3)$, por último se multiplican los monomios, $8p^3 - 8p^4q + \frac{8}{3}p^5q^2 - \frac{8}{27}p^6q^3$.

Ejercicios de Taller

Desarrolle los siguientes binomios al cubo.

a) $(a^3 + 4b^2)^3 =$

b) $(4a^2b + 2ab^3)^3 =$

c) $(-2x - \frac{1}{3}x^4y^2)^3 =$

Otros productos notables

En la tabla se muestran otros productos

$(a + b + c)^3 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Ejemplo 4.25 *Desarrolle el producto* $(2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4) =$

Empleando el producto notable se tiene:

$(2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4) = (2x)^3 - (y^2)^3 = 8x^3 - y^6$

Ejercicios de Tarea

1.- Realice las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(a + 2bc + d^2) + (-2a + 8bc + 4d^2 + 5e) =$

b) $(-\frac{1}{3}x + 6xy + y^2) + (2x - 3xy + 8y^2) =$

c) $(\frac{4}{3}w + 6y + \frac{2}{3}z) + (-\frac{1}{7}w + y^2 - 2z) =$
d) $(mn - \sqrt{3}m^2 + \frac{5}{4}n) + (\frac{1}{8}n - \frac{5}{4}m^2 + \sqrt{3}mn) =$
e) $(3a - 2bc + 4d^2) - (\frac{3}{7}a - 4bc - 8d^2 + ef) =$
f) $(\pi uv^2 + 6uv - 3v^2)\ -(2uv^2 - 3uv - \frac{1}{15}v^2)$
g) $(8b^3 - 3b^2 - 2b) - (-3b^3 + 7b^2 + 2b) =$
h) $(\frac{1}{2}ab^3c^2)(2a^2bc^4) =$
i) $(8xyz^2)(-2x + 3xy^2z) =$
j) $(x + 6)(x - 3) =$
k) $(-3ab^3 + \frac{1}{2}ab^2)(ab + 2a^2) =$
l) $(\frac{1}{4}rp - 2r + 5)(-3r + \frac{1}{2}) =$
m) $(6x^3 + 35x^2 + 28x + 15)/(6x^2 + 5x + 3) =$
n) $(y^2x^2 + yx^2 - y^3 + y)/(y^2 + y) =$

2.- Desarrolle el producto notable:
a) $(5p + 8)^2 =$
b) $(2x^2y^3 + 3xy)^2 =$
c) $(\sqrt{5}a^2 - 4b)^2 =$
d) $(\frac{1}{3}a + 5b)(\frac{1}{3}a - 5b) =$
e) $(x + 3)(x - 3) =$
f) $(\sqrt{6}mn + \sqrt{3})(\sqrt{6}mn - \sqrt{3}) =$
g) $(6x + 8y)(6x - 8y) =$
h) $(2a + 7)^3 =$
i) $(3xy^2 + 2x^3y)^3 =$
j) $(x^2 + 2x + 3)^3 =$
k) $(4m + 2n)(16m^2 - 8mn + 4n^2) =$

3.- Calcule el producto de las siguientes expresiones:
a) $(x - 1)(x + 2) =$
b) $(x + 2y)^2 =$
c) $(3h - \sqrt{2}k)^2 =$
d) $(5b^4 + 3x^2)(5b^4 - 3x^2) =$
e) $(3x - 5)(7x + 4) =$
f) $(x^2 + 7x - 2)(3x^2 - x + 5) =$
g) $(3x - 2)(3x - 2)(3x - 2) =$

h) $(4x+5y)(6x^2-\frac{3}{4}xy+2y^2)=$

4.- Determine el producto de las siguientes expresiones:

a) $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{2x}{3}+\frac{2y}{4}\right)=$

b) $\left(\frac{m^2}{3}+\frac{2n^2}{5}\right)\left(\frac{m^2}{3}-\frac{2n^2}{5}\right)=$

c) $\left(\frac{3a^2}{b}+\frac{5x}{4y}\right)\left(\frac{3a^2}{b}-\frac{5x}{4y}\right)=$

d) $[3\,(2y+3b)+7]\;[7\,(2y+3b)-7]=$

e) $\big[(a^3-a)+(a^2-3)\big]\,\big[(a^3-a)-(a^2-3)\big]=$

Capítulo 5

Factorización

Se conoce como *Factorización* al proceso a través del cual se descompone una cantidad en factores. Así como los números pueden ser expresados como el producto de dos o más números, un polinomio puede ser expresado como el producto de dos o más expresiones algebraicas. Así por ejemplo si se desea factorizar el número 30, se tiene que

$$30 = (10)(3) = (15)(2) = (3)(5)(2) = (6)(5)$$

Se puede ver que el número 30 se ha factorizado en cuatro diferentes formas. Los números 10, 3, 15, 6, 5, 10 y 3 se llaman factores del número 30, y en su caso también son divisores del número 30.

Por otro lado si deseamos factorizar el polinomio $3x^2y + 6x^3m - 9x^2yn$, se tiene

$$\begin{aligned} 3x^2y + 6x^3m - 9x^2yn &= 3\left(x^2y + 2x^3m - 3x^2yn\right) \text{ ó } 3x^2y + 6x^3m - 9x^2yn = 3x^2\left(y + 2mx - 3yn\right) \text{ ó} \\ 3x^2y + 6x^3m - 9x^2yn &= 3x^3m\left(\frac{y}{xm} + 2 - \frac{3yn}{xm}\right) \end{aligned}$$

aquí se puede ver, que el polinomio se ha factorizado de tres formas diferentes, y desde luego no son las únicas. El tipo de factorización que se deberá emplear dependerá del tipo de expresión que se tenga y además del objetivo de la misma. Así pues, se pueden definir diferentes tipos de factorización, los cuales se detallan en lo sucesivo.

5.1. Tipos de Factorización

5.1.1. Factorización por factor común.

Como el nombre lo indica, consiste en determinar un factor que sea común a todos o la mayoría de los términos de una expresión algebraica.

Ejemplo 5.1 *Factorizar el polinomio* $3r^3p + 6r^5q - 12r^2s$.

En este caso el factor estará compuesto por el máximo comun divisor de los coeficientes del polinomio y por las variables con exponente menor que sean común a los términos del polinomio.

Aquí se puede ver que los coeficientes del polinomio son 3, 6 y 12. El MCD (Máximo Común Divisor) de estos coeficientes es 3. También se puede ver que la variable común a todos los términos es r, y su exponente menor es el 2. Por lo tanto nuestro factor común será $3r^2$. Así, nuestro polinomio puede factorizarse como

$$3r^3p + 6r^5q - 12r^2s = 3r^2\left(rp + 2r^3q - 4s\right),$$

donde el primer factor es conocido como factor común.

Ejemplo 5.2 *Factorizar el polinomio* $2r\,(3t+1) + (3t+1)\,(k-5) - q\,(3t+1)$.

En este caso, tenemos tres términos y se puede notar que el factor común a los tres términos es $(3t+1)$, así pues el polinomio puede ser expresado por la siguiente factorización

$$2r\,(3t+1) + (3t+1)\,(k-5) - q\,(3t+1) = (3t+1)\,[2r + (k-5) - q].$$

Ejemplo 5.3 *Factorizar el polinomio* $4x^3y^4z + 5m^2nt^3 - 2x^2y^6w + 10m^2n^5k^2$.

En este otro caso, no hay un factor común explícito para los cuatro términos, no obstante, podemos hacer una agrupación previa para realizar la factorización. Si agrupamos el primer y tercer término $\left(4x^3y^4z - 2x^2y^6w\right)$, se puede notar que el MCD de los coeficientes de ambos términos es 2, y las variables en común para ambos términos son x e y, y sus exponentes menores son 2 y 4 respectivamente. Entonces nuestro factor común para estos dos términos será $2x^2y^4$. De igual manera si agrupamos el segundo y cuarto término del polinomio $\left(5m^2nt^3 + 10m^2n^5k^2\right)$ el factor común es $5m^2n$. Si reordenamos nuestro polinomio, se puede factorizar así

$$4x^3y^4z - 2x^2y^6w + 5m^2nt^3 + 10m^2n^5k^2 = 2x^2y^4\left(2xz - y^2w\right) + 5m^2n\left(t^3 + 2n^4k^2\right).$$

Ejercicios de Taller

Factorizar los siguientes polinomios.

a) $12x^3 + 2x^2 + 6x =$

b) $6x^3y^4 - 3\sqrt{3}x^2y^2 - 3x^2y + 3xy =$

c) $2y^2 - yz - 3z =$

d) $15at + bs + 3bt + 5as =$

5.1.2. Factorización de Diferencias de Cuadrados.

En términos generales, una diferencia de cuadrados es una expresión formada por dos términos de signo contrario y ambos pueden tener o no raíz cuadrada exacta. Por ejemplo son diferencias de cuadrados los términos $16x^2 - 9y^2$, $-2m^4 + 4r^6$ y $25t^8 - 3x^5$. Las diferencias de cuadrados se factorizan en dos binomios que se denominan *Binomios Conjugados,* tales binomios tienen la característica de tener los mismos términos pero con sólo un signo diferente. Así se tiene que

$$a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b), \tag{5.1}$$

donde los términos de los factores del miembro derecho de la ecuación son las raíces cuadradas de los términos del miembro izquierdo de la igualdad.

Ejemplo 5.4 *Factorizar la diferencia de cuadrados* $x^2 - y^4$.

Podemos ver a esta expresión como una diferencia de cuadrados porque es un binomio con términos de signo contrario y podemos sacar raíz cuadrada a los términos. Para encontrar los términos de los binomios conjugados, obtenemos las raíces cuadradas de los términos de la diferencia de cuadrados, asi la raíz cuadrada del primer término es $\sqrt{x^2} = x^{\frac{2}{2}} = x$ y la raíz cuadrada del segundo término es $\sqrt{y^4} = y^{\frac{4}{2}} = y^2$. Tomamos como referencia a (5.1) y se tiene que

$$x^2 - y^4 = \left(x + y^2\right)\left(x - y^2\right).$$

Ejemplo 5.5 *Factorizar la diferencia de cuadrados* $-9m^5 + 3n^6$.

Nuevamente se tiene un binomio con términos de signo contrario, reagrupamos los términos por cuestiones prácticas, quedando la expresión como $3n^6 - 9m^5$, ahora obtenemos las raíces cuadradas de los términos de la diferencia de cuadrados, así $\sqrt{3n^6} = \sqrt{3}\sqrt{n^6} = \sqrt{3}n^{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}n^3$ y $\sqrt{9m^5} = \sqrt{9}\sqrt{m^5} = 3m^{\frac{5}{2}}$, en este caso hay que notar que el 3 y m^5 no tienen raíz cuadrada exacta. Tomamos como referencia (5.1) y se tiene que

$$-9m^5 + 3n^6 = 3n^6 - 9m^5 = \left(\sqrt{3}n^3 + 3m^{\frac{5}{2}}\right)\left(\sqrt{3}n^3 - 3m^{\frac{5}{2}}\right).$$

Ejemplo 5.6 *Factorizar la diferencia de cuadrados* $(x+2y)^4 - (3m+6t)^2$.

En este caso, se presenta otra diferencia de cuadrados, donde cada término de la diferencia de cuadrados es a su vez un binomio. De igual manera se procede a obtener las raíces cuadradas de los términos de la diferencia de cuadrados, así $\sqrt{(x+2y)^4} = (x+2y)^{\frac{4}{2}} = (x+2y)^2$ y $\sqrt{(3m+6t)^2} = (3m+6t)^{\frac{2}{2}} = (3m+6t)$. Tomamos como referencia (5.1) y se tiene que

$$(x+2y)^4 - (3m+6t)^2 = \left[(x+2y)^2 + (3m+6t)\right]\left[(x+2y)^2 - (3m+6t)\right].$$

Nota: *Las expresiones* $x^2 + y^2$, $-m^4 - t^2$ *por ejemplo, no son diferencias de cuadrados, porque los términos tienen signos iguales, por lo tanto de ninguna manera se pueden factorizar en Binomios Conjugados. Se deja como ejercicio hacer las demostraciones:*

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), \\ a^2 + b^2 &\neq (a-b)(a+b). \end{aligned}$$

Ejercicios de Taller

Factorizar las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $36x^2 - 25 =$

b) $x^4 - y^4 =$

c) $x^8 - y^4 =$

d) $7m^6 - 16n^{10} =$

5.1.3. Factorización de sumas y diferencias de cubos.

En términos generales, una diferencia o suma de cubos, es una expresión formada por dos términos que pueden tener o no el mismo signo y ambos pueden tener o no raíz cúbica exacta. Las diferencias y sumas de cubos se factorizan en el producto de un binomio por un trinomio de acuerdo a la siguiente regla

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right), && (5.2) \\ a^3 + b^3 &= (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right). && (5.3) \end{aligned}$$

En ambos casos, el primer factor está compuesto de las raíces cúbicas de los términos del miembro izquierdo, el segundo factor se construye a partir de los términos del primer factor, a saber: el cuadrado del primer término más el producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término. Hay que notar el orden de los signos.

Ejemplo 5.7 *Factorizar la diferencia de cubos* $x^3 - y^3$,

Se determinan los términos del primer factor, obteniendo las raíces cúbicas de los términos de la diferencia de cubos. Así la raíz cúbica del primer término es $\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x$ y la raíz cúbica del segundo término es $\sqrt[3]{y^3} = y^{\frac{3}{3}} = y$. Tomamos como referencia (5.2) y se tiene

$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right).$$

Ejemplo 5.8 *Factorizar la suma de cubos* $27m^6 + 8p^{12}$.

Se determinan los términos del primer factor, obteniendo las raíces cúbicas de los términos de la suma de cubos. Así $\sqrt[3]{27m^6} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{m^6} = 3m^{\frac{6}{3}} = 3m^2$ y $\sqrt[3]{8p^{12}} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{p^{12}} = 2p^{\frac{12}{3}} = 2p^4$. Tomamos como referencia (5.3) y se tiene

$$27m^6 + 8p^{12} = \left(3m^2 + 2p^4\right)\left(\left(3m^2\right)^2 - \left(3m^2\right)\left(2p^4\right) + \left(2p^4\right)^2\right) = \left(3m^2 + 2p^4\right)\left(9m^4 - 6m^2p^4 + 4p^8\right).$$

Ejemplo 5.9 *Factorizar la diferencia de cubos* $12x^6 - 64y^5$.

Se determinan los términos del primer factor, obteniendo las raíces cúbicas de los términos de la diferencia de cubos. Así $\sqrt[3]{12x^6} = \sqrt[3]{12}\,\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{12}x^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{12}x^2$ y $\sqrt[3]{64y^5} = \sqrt[3]{64}\,\sqrt[3]{y^5} = 4y^{\frac{5}{3}}$. Tomamos como referencia (5.2) y se tiene

$$\begin{aligned} 12x^6 - 64y^5 &= \left(\sqrt[3]{12}x^2 - 4y^{\frac{5}{3}}\right)\left(\left(\sqrt[3]{12}x^2\right)^2 + \left(\sqrt[3]{12}x^2\right)\left(4y^{\frac{5}{3}}\right) + \left(4y^{\frac{5}{3}}\right)^2\right) \\ &= \left(\sqrt[3]{12}x^2 - 4y^{\frac{5}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{12^2}x^4 + 4\sqrt[3]{12}x^2y^{\frac{5}{3}} + 16x^{\frac{10}{3}}\right). \end{aligned}$$

Nota: *Los signos de los factores ya están asignados por (5.2) y (5.3).*

Ejercicios de Taller

Factorizar las siguientes diferencias y sumas de cubos.
a) $a^3 - 64b^3 =$
b) $8x^3y^6 + 27 =$
c) $y^9 + 125 =$
d) $64m^{12} - 8x^3 =$

5.1.4. Factorización de binomios de la forma $x^n \pm y^n$.

Para realizar la factorización de este tipo de binomios es recomendable que n sea impar y mayor que 3. Si el binomio $x^n + y^n$ se divide por el binomio $x + y$ se obtiene como resultado el factor $\left(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 - \cdots x^2y^{n-3} - x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}\right)$ donde el residuo es cero. Por lo cual se puede establecer la regla (5.4).

$$x^n + y^n = (x+y)\left(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 - \cdots x^2y^{n-3} - x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}\right), \tag{5.4}$$

y de la misma forma

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \cdots x^2y^{n-3} + x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}\right). \tag{5.5}$$

Ejemplo 5.10 Factoricemos el binomio $x^7 + y^7$.
De acuerdo al modelo (5.4), el primero factor es $(x + y)$ y el segundo factor es $\left(x^6y^0 - x^5y^1 + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - x^1y^5 + x^0y^6\right)$. Finalmente se tiene

$$\begin{aligned} x^7 + y^7 &= (x+y)\ \left(x^6y^0 - x^5y^1 + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - x^1y^5 + x^0y^6\right), \\ &= (x+y)\ \left(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.11 Factoricemos ahora el binomio $x^7 - y^7$.
De acuerdo a la identidad (5.5), el primer factor es $(x - y)$ y el segundo factor es $\left(x^6y^0 + x^5y^1 + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + x^1y^5 + x^0y^6\right)$. Finalmente se tiene

$$\begin{aligned} x^7 - y^7 &= (x-y)\ \left(x^6y^0 + x^5y^1 + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + x^1y^5 + x^0y^6\right), \\ &= (x-y)\ \left(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6\right). \end{aligned}$$

Ejercicios de Taller

Factorizar los siguientes binomios.
a) $p^5 + c^5 =$
b) $h^7 - t^7 =$

5.1.5. Factorización de trinomios cuadrados de la forma $ax^2 + bx + c$

Los trinomios cuadrados están compuestos desde luego de la suma de tres términos, un término cuadrático, un término lineal y un término independiente; y algunos de ellos se pueden factorizar como el producto de dos binomios como se muestra en la ecuación (5.6).

$$ax^2 + bx + c = (\eta x + \beta)(\rho x + \delta), \tag{5.6}$$

donde $(\eta x)(\rho x) = ax^2$, $(\delta)(\eta x) + (\beta)(\rho x) = bx$ y $(\beta)(\delta) = c$.

Es de hacer notar que existen trinomios cuadrados que son factorizables y otros que no lo son de acuerdo a los métodos conocidos hasta este momento. Dentro de los que son factorizables hay unos que son trinomios cuadrados perfectos (TCP) y otros que son no perfectos. En los TCP el resultado de la factorización es un producto de dos binomios iguales, es decir $\eta = \rho$ y $\beta = \delta$, mientras que en los trinomios cuadrados no perfectos el resultado de la factorización es el producto de dos binomios diferentes. Habrá algunos trinomios cuadrados que no se puedan factorizar por el método aquí descrito, cuando esto suceda significa una de dos cosas, una es que β y δ son números decimales o la otra que β y δ no existen dentro de los números reales, y se deberán aplicar otros metodos para su factorización.

Trinomios cuadrados perfectos (TCP)

Los trinomios cuadrados perfectos son aquellos cuya factorización resulta en el producto de dos binomios iguales, y por tanto puede ser representado como un binomio al cuadrado.

Ejemplo 5.12 *Factorizar el trinomio* $-6x + 9 + x^2$.

Para factorizar un trinomio cuadrado es recomendable acomodar los términos de mayor a menor grado, así pues podemos reescribir el trinomio en la forma $x^2 - 6x + 9$. Después se buscan los factores adecuados que deberán ir en los binomios.

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$$

Figura 5.1. Factorización de un TCP.

Finalmente se debe comprobar que la factorización sea correcta, para esto, el término cuadrático x^2 debe resultar de la multiplicación de los términos izquierdos de los binomios. El término independiente $+9$ debe resultar de la multiplicación de los términos derechos de los binomios considerando sus signos. Por último el término lineal $-6x$ debe resultar de la suma del producto de los términos medios más el producto de los términos de los extremos como lo muestra la Figura 5.1.

Ejemplo 5.13 *Factorizar el trinomio* $-\frac{4}{3}x + x^2 + \frac{4}{9}$.

Si acomodamos los términos de mayor a menor grado, se tiene $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$, y buscamos los factores adecuados para los binomios resultantes de la factorización, como se muestra en la Figura 5.2.

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Figura 5.2. Factorización de un TCP.

Finalmente se debe comprobar que la factorización sea correcta, para esto, el término cuadrático x^2 debe resultar de la multiplicación de los términos izquierdos de los binomios. El término independiente $+\frac{4}{9}$ debe resultar de la multiplicación de los términos derechos de los binomios considerando sus signos. Por último el termino lineal $-\frac{4}{3}x$ debe resultar de la suma del producto de los términos medios más el producto de los términos de los extremos como lo muestra la Figura 5.2.

Nota: *La factorización de un TCP resulta en la factorización de dos binomios iguales, por lo que un TCP puede ser representado como un binomio al cuadrado. Así el Ejemplo 5.12 se pueden representar como* $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ y el Ejemplo 5.13 como $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$.

Trinomios cuadrados no perfectos

Los trinomios cuadrados no perfectos son aquellos cuya factorización resulta en el producto de dos binomios diferentes, y no puede ser representados como un binomio al cuadrado.

Ejemplo 5.14 *Factorizar el trinomio* $-8x - 8 + 6x^2$.

Acomodamos los términos de mayor a menor grado y se tiene $6x^2 - 8x - 8$, y buscamos los factores adecuados quedando la factorización como se muestra en la Figura 5.3.

$$6x^2 - 8x - 8 = (2x - 4)(3x + 2)$$

Figura 5.3. Factorización de un trinomio cuadrado no perfecto.

Ejemplo 5.15 *Factorizar el trinomio* $2x + \frac{3}{8} + 2x^2$.

Primero se acomodan los términos en grado descendente, así se tiene el trinomio $2x^2 + 2x + \dfrac{3}{8}$, enseguida se buscan los factores adecuados de los binomios resultantes de la factorización como se ve en la Figura 5.4.

$$2x^2 + \mathbf{2}x + \frac{3}{\mathbf{8}} = \left(2x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

Figura 5.4. Factorización de un trinomio cuadrado no perfecto.

Finalmente se debe comprobar que la factorización sea correcta, para esto, el término cuadrático $-2x^2$ debe resultar de la multiplicación de los términos izquierdos de los binomios. El término independiente $+\dfrac{3}{8}$ debe resultar de la multiplicación de los términos derechos de los binomios considerando sus signos. Por último el término lineal $+x$ debe resultar de la suma del producto de los términos medios más el producto de los términos de los extremos como lo muestra la Figura 5.4.

Ejemplo 5.16 (Trinomio no factorizable) Como se mencionó con anterioridad, algunos trinomios cuadrados no son factorizables, como por ejemplo $x^2 + 12x - 1$ ó $x^2 + x + 2$. Se deja como ejercicio intentar la factorización de estos trinomios.

Ejercicios de Taller (Trinomios cuadrados perfectos)

Factorizar los siguientes trinomios.
a) $9 + x^2 + 6x =$
b) $x^2 + 4 - 4x =$
c) $x^2 - 10x + 25 =$
d) $x^2 + 10x + 25 =$

Ejercicios de Taller (Trinomios cuadrados no perfectos)

Factorizar los siguientes trinomios.
a) $-6 + x^2 + x =$
b) $x^2 + 20 - 9x =$
c) $x^2 + 6x + 8 =$
d) $x^2 + 6x + 5 =$

Ejercicios de Tarea

1. Factorice los siguientes polinomios.
a) $6x^5y^5 + \sqrt{2}x^2y^3 + 14xy^3 =$
b) $3a^2b^3 - 3\sqrt{2}a^4b^2 + 9a^2b =$
c) $xyz^3 - xy^3z + x^3yz =$
d) $x^3 + 2x + x^2 + 2 =$
e) $2p^3 - p^2 - 1 =$

2. Factorice los siguientes binomios.
a) $a^2 - 4b^2 =$
b) $4x^2y^2 - 1 =$
c) $49x^2 - 64y^2 =$
d) $x^6 + y^6 =$
e) $y^6 - 1 =$
f) $1 - m^3 =$

3. Factorice los siguientes polinomios.
a) $x^2 - 5x + 6 =$
b) $x^2 - 10x + 24 =$
c) $y^2 + 7y + 10 =$
d) $y^4 + 10y^2 + 21 =$
e) $x^4 - 3x^2 - 4 =$
f) $x^2 + 4x - 12 =$
g) $r^2 + 2r + 1 =$
h) $r^2 + 5r - 14 =$
i) $x^2 - xy - 2y^2 =$
j) $x^2 - 4xy + 3y^2 =$
k) $r^2 - 8rt + 16t^2 =$
l) $9m^2 - 6mn + n^2 =$
m) $2p^2 + 7p + 5 =$
n) $8q^2 + 2q - 3 =$
ñ) $10b^4 - 23b^2 + 12 =$
o) $2x^2 - 7xy + 3y^2 =$
p) $6a^4 + 13a^2 - 15 =$
q) $-3x^2 - 5xy + 12y^2 =$
r) $3m^2 + 8h^3 =$
s) $25h^4 - 7x^3 =$

4. Factorice los siguientes polinomios.
a) $(x^2 + 1)^3 + (y^2 - 1)^3 =$
b) $(4 - x^2)^3 - (4 - y^2)^3 =$
c) $x(x - y) + y(y - x) =$

d) $x(x-y)-y(y-x)=$
e) $(1-x^2)^3-(1-y^2)^3=$
f) $(x^2-4)^3+(4-y^2)^3=$
g) $1-256m^2=$
h) $r^8-6561=$
i) $x^6-7x^3-8=$
j) $m^{10}-5m^5+6=$
k) $r^3s^3-8t^3=$
l) $25c^2d^2-x^2y^4=$
m) $p^3-pq^2-p^2q-q^3=$
n) $4x^2+7xy-2y^2=$
ñ) $36x^2+12xy+y^2=$

5. Factorice las siguientes expresiones.
a) $x^2-13=$
b) $2m^2-1=$
c) $5m^2-1=$
d) $\frac{1}{4}a^2-b^2=$
e) $x^2+x+\frac{1}{4}=$
f) $m^2-\frac{2}{5}m+\frac{1}{25}=$
g) $3m^2-4r^2=$
h) $24-n^2=$
i) $x^2-2\sqrt{2}xy+2y^2=$
j) $p^{11}-q^{11}=$

Capítulo 6

Expresiones racionales

El cociente de dos polinomios puede o no ser un polinomio y se conoce como *expresión racional*. Algunos ejemplos de expresiones racionales son las siguientes:

a) $\dfrac{6x^2+8x+3}{2x+2}$

b) $\dfrac{-3x^5+8}{x+4}$

c) $\dfrac{\frac{1}{4}xy+8y+6}{y^2+xy}$

6.1. Simplificación de expresiones racionales

La simplificación de expresiones racionales se realiza mediante la aplicación de sus propiedades y la factorización de los polinomios.

Para cualquiera de los polinomios A, B, C y D. Las propiedades son las siguientes:

Propiedad	
Cancelación	$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{A}{B}; C\neq 0$
Suma o Resta	$\dfrac{A}{B}\pm\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD\pm CB}{BD}$
Multiplicación	$\dfrac{A}{B}\cdot\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$
División	$\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD}{BC}$

Ejemplo 6.1 *Simplificar la siguiente expresión* $\dfrac{x^2-25}{x+5}$.

El polinomio en el numerador corresponde a una diferencia de cuadrados que se factoriza de la siguiente forma: $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

Por lo que la expresión se puede escribir como

$$\frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)}.$$

Finalmente aplicando la propiedad de cancelación se tiene que

$$\frac{(\mathbf{x+5})(x-5)}{(\mathbf{x+5})} = (x-5)$$

Ejemplo 6.2 *Simplificar la siguiente expresión* $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-9}$.

Para simplificar se factorizan ambos polinomios. La factorización del numerador es $x^2-8x+15 = (x-3)(x-5)$. *Mientras que el denominador se factoriza como* $x^2-9=(x-3)(x+3)$. *Sustituyendo y aplicando la propiedad de cancelación se tiene*

$$\frac{(\mathbf{x-3})(x-5)}{(\mathbf{x-3})(x+3)} = \frac{x-5}{x+3}.$$

Ejemplo 6.3 *Simplificar la siguiente expresión* $\dfrac{x^3-8}{-6x+12}$.

El numerador es una diferencia de cubos por lo que su factorización es $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$. En el denominador se factoriza el -6, resultando $-6x+12=-6(x-2)$. Sustituyendo y aplicando la propiedad de cancelación la expresión queda

$$\frac{(\mathbf{x-2})(x^2+2x+4)}{-6(\mathbf{x-2})} = \frac{(x^2+2x+4)}{-6} = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Nótese que el resultado del cociente es un polinomio.

Ejemplo 6.4 *Simplificar la siguiente expresión*

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2-2x+1}.$$

Las factorizaciones son las siguientes:

El numerador es un trinomio cuadrado no perfecto: $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$.

El denominador es un TCP por lo que: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.
Sustiyuyendo y aplicando las propiedades se tiene

$$\frac{(2x+1)(\mathbf{x-1})}{(x-1)(\mathbf{x-1})} = \frac{2x+1}{x-1}.$$

Ejercicios de Taller

Simplifique las siguientes expresiones racionales:

a) $\dfrac{x+7}{x^2-49} =$

b) $\dfrac{p^2+3p+2}{p^2+6p+8} =$

c) $\dfrac{x^3-9x}{x^3-6x^2+9x} =$

d) $\dfrac{x^2-9}{x^3+27} =$

6.2. Mínimo Común Múltiplo (m.c.m)

Algunas veces para efectuar operaciones con expresiones racionales es necesario obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo 6.5 *Encuentre el mínimo común múltiplo de los denominadores de las siguientes expresiones* $\dfrac{1-x}{x^2}; \dfrac{x+5}{x^2-4}; \dfrac{2}{(x+2)^2}$

Los denominadores de las expresiones son: $x^2; x^2-4; (x+2)^2$
Los factores para cada uno son: $xx; (x+2)(x-2); (x+2)\,(x+2)$
Por lo que el m.c.m es: $xx(x+2)(x-2)(x+2) = x^2(x+2)^2(x-2)$

Ejemplo 6.6 *Encuentre el mínimo común múltiplo de los denominadores de las siguientes expresiones* $\dfrac{5}{x^2+3x}; \dfrac{x-2}{(x-3)^3}; \dfrac{4}{x^3}$

Los denominadores de las expresiones son: $x^2+3x; (x-3)^3\,; x^3$
Los factores para cada uno son: $x(x+3); (x-3)(x-3)(x-3); xxx$
Por lo que el m.c.m es:$x\,(x+3)\,(x-3)(x-3)(x-3)xx = x^3\,(x+3)\,(x-3)^3$

Ejercicios de Taller

Determine el mínimo común múltiplo (m.c.m)

a) $\dfrac{1}{(r+2)^2(r+3)}; \dfrac{1}{(r+3)^3(r+2)}$

b) $\dfrac{1}{x^2+x+2}$; $\dfrac{4}{x+2}$

c) $\dfrac{1}{x^2-10x+25}$; $\dfrac{x}{x^2-25}$; $\dfrac{1}{x^2+10x+25}$

d) $\dfrac{p}{p+r}$; $\dfrac{r}{p^2+2pr+r^2}$; $\dfrac{1}{p^3+r^3}$

6.3. Operaciones con expresiones racionales

6.3.1. Suma

Ejemplo 6.7 *Realice la siguiente suma* $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{5}{x-2}$.

Debe identificarse el mínimo común múltiplo y emplearlo como común denominador

$$\frac{x}{x+2}+\frac{5}{x-2}=\frac{x(x-2)+5(x+2)}{(x+2)(x-2)},$$

al desarrollar los productos se tiene

$$\frac{x(x-2)+5(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-2x+5x+10}{x^2-4}=\frac{x^2+3x+10}{x^2-4}.$$

Ejemplo 6.8 *Realice la siguiente suma* $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x^2+4x+4}$.

El mínimo común múltiplo (m.c.m) es: $(x-2)(x+2)^2$. La operación se desarrolla de la siguiente forma

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{x}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{(x+2)(x+2)}=\frac{x(x+2)+(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+2)}=$$

$$\frac{x^2+2x+x-2}{(x-2)(x+2)^2}=\frac{x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

6.3.2. Resta

Ejemplo 6.9 *Realice la siguiente resta* $\dfrac{6x}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x-1}$.

El m.c.m es $(x-1)(x+1)$.

La operación se desarrolla como sigue

$$\frac{6x-(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{6x-(x^2-x-2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{6x-x^2+x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{-x^2+7x+2}{x^2-1}.$$

Ejemplo 6.10 *Realice la siguiente resta* $\frac{x+5}{2x}-\frac{x}{x+8}$.
El m.c.m es $(2x)(x+8)$.
La operación se desarrolla como sigue

$$\frac{(x+5)(x+8)-x(2x)}{2x(x+8)}=\frac{x^2+13x+40-2x^2}{2x(x+8)}=\frac{-x^2+13x+40}{2x^2+16x}.$$

Ejercicios de Taller

Realice las siguientes operaciones:
a) $\frac{6x}{2x+2}+\frac{6}{2x+2}=$
b) $\frac{p}{p-q}+\frac{p}{q-p}=$
c) $\frac{1}{x+3}+\frac{x}{x+1}+\frac{x^2+1}{x^2+4x+3}=$
d) $\frac{q}{q-p}-\frac{p}{q+p}=$
e) $\frac{5a}{5a-1}-\frac{1}{1-5a}=$
f) $\frac{3}{a-2}-\frac{6}{a^2-4}=$

6.3.3. Multiplicación

Ejemplo 6.11 *Realice el siguiente producto* $\left(\frac{x^2y}{x+5}\right)\left(\frac{y+3}{y}\right)$.
Aplicando las propiedades de multiplicación y distributiva resulta

$$\frac{x^2y(y+3)}{(x+5)y}=\frac{x^2y^2+3x^2y}{xy+5y}.$$

Ejemplo 6.12 *Realice la siguiente multiplicación* $\left(\frac{x+9}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x^2-81}\right)$.
Aplicando las propiedades necesarias se obtiene

$$\frac{(x+9)x}{x^2(x^2-81)}=\frac{\mathbf{x}(\mathbf{x}+\mathbf{9})}{(\mathbf{x})(x)(\mathbf{x}+\mathbf{9})(x-9)}=\frac{1}{x(x-9)}=\frac{1}{x^2-9x}.$$

Ejemplo 6.13 *Realice la siguiente multiplicación* $\left(\frac{r^2+2r-15}{r+2}\right)\left(\frac{8}{r+5}\right)$.
Aplicando las propiedades y las factorizaciones necesarias se obtiene

$$\frac{8(r^2+2r-15)}{(r+2)(r+5)}=\frac{8(r-3)(\mathbf{r}+\mathbf{5})}{(r+2)(\mathbf{r}+\mathbf{5})}=\frac{8(r-3)}{(r+2)}=\frac{8r-24}{r+2}.$$

Ejercicios de Taller

Realizar los siguientes productos de expresiones racionales

a) $\left(\frac{x+4}{x+3}\right)\left(\frac{x-2}{x+5}\right)=$

b) $\left(\frac{a^2+a}{a^2-1}\right)\left(\frac{a+1}{a^2}\right)=$

c) $\left(x^2-2x+1\right)\left(\frac{x+1}{x^3-1}\right)=$

d) $-\left(\frac{2p+8}{p-1}\right)\left(\frac{p+4}{2p}\right)=$

e) $(5x+2)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x+1}{x^2}\right)=$

6.3.4. División

Ejemplo 6.14 *Realice la siguiente división* $\frac{p+1}{p+2}\div\frac{p+1}{p+5}$.
Aplicando las propiedades se obtiene

$$\frac{(\mathbf{p}+\mathbf{1})(p+5)}{(p+2)(\mathbf{p}+\mathbf{1})}=\frac{p+5}{p+2}.$$

Ejemplo 6.15 *Realice la siguiente división* $\frac{x^4+4x^2+4}{x+2}\div\frac{4-x^4}{5}$.
Aplicando las propiedades de las expresiones racionales la división queda como

$$\frac{(x^4+4x^2+4)(5)}{(4-x^4)(x+2)}=\frac{(\mathbf{x}^2+\mathbf{2})(x^2+2)(5)}{(\mathbf{2}+\mathbf{x}^2)(2-x^2)(x+2)}=\frac{(x^2+2)(5)}{(2-x^2)(x+2)}=\frac{5x^2+10}{-x^3-2x^2+2x+4}.$$

Ejemplo 6.16 *Realice la siguiente división* $\dfrac{x^2+xy+y^2}{\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}}$.

Se factoriza el numerador y se efectua la resta del denominador

$$\frac{x^2+xy+y^2}{\frac{x^3-y^3}{xy}} = \frac{xy(x^2+xy+y^2)}{x^3-y^3},$$

factorizando la diferencia de cubos de la expresión se tiene

$$\frac{xy(\mathbf{x}^2+\mathbf{xy}+\mathbf{y}^2)}{(x-y)(\mathbf{x}^2+\mathbf{xy}+\mathbf{y}^2)} = \frac{xy}{x-y}.$$

Ejercicios de Taller

Resolver las siguientes divisiones de expresiones racionales.

a) $\left(\dfrac{3w+1}{w-4}\right) \div \left(\dfrac{2w+1}{w}\right) =$

b) $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}\right) \div \left(\dfrac{x-4}{x+3}\right) =$

c) $\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\right) \div \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right) =$

d) $\dfrac{\frac{a}{a-1}-\frac{a+1}{a}}{1-\frac{a}{a-1}} =$

Ejercicios de Tarea

1. Determine el mínimo común múltiplo (m.c.m) de las siguientes expresiones racionales.

a) $\dfrac{5}{v^2+2v+1}; \dfrac{v}{v^2-3v-4}$

b) $\dfrac{10}{b^3+b^2-6b}; \dfrac{1}{b^2(b-6)}; \dfrac{b}{b-2}$

c) $\dfrac{1}{m^2+m}; \dfrac{m}{m^2+2m+1}; \dfrac{1}{m^2-1}$

d) $\dfrac{1}{x^3-x^2}; \dfrac{x}{x^2-1}; \dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$

2. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} =$

b) $(2x)(x-1)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(x^2) =$

c) $\dfrac{1}{u^{-1}+v^{-1}} =$

d) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+6x+8} =$

e) $\dfrac{x^2-9}{x^3+27} =$

f) $\dfrac{v^4+4v^2+4}{4-v^4} =$

g) $\dfrac{3x^2-7x-20}{2x^2-5x-12} =$

h) $\dfrac{w^3-9w}{w^3-6w^2+9w} =$

i) $\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2} =$

3. Combine y simplifique la expresión:

a) $\dfrac{4x}{4x+5} + \dfrac{5}{4x+5} =$

b) $\dfrac{3}{s-2} + \dfrac{4}{2-s} =$

c) $\dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{5}{x^2-1} =$

d) $\dfrac{b}{2b+1} - \dfrac{2b}{b-2} =$

e) $\dfrac{2}{r^2-r-12} + \dfrac{r}{r+3} =$

f) $\dfrac{z}{2z+3} - \dfrac{3}{4z^2-3z-1} + \dfrac{4z+1}{2z^2+z-3} =$

g) $\left(\dfrac{t-4}{t+3}\right)\left(\dfrac{t+5}{t-2}\right) =$

h) $\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\right)\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right) =$

i) $\left(\dfrac{6x+5}{3x+3}\right)\left(\dfrac{x+1}{6x^2-7x-10}\right) =$

j) $-\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)\left(\dfrac{x^2+x-12}{3+2x-x^2}\right) =$

k) $\dfrac{3w+1}{w-4} \div \dfrac{2w+1}{w} =$

l) $\dfrac{x}{x+4} \div \dfrac{x+5}{x} =$

m) $\dfrac{s^2-5s+6}{s^2-7s+10} \div \dfrac{2-s}{s+2} =$

n) $\frac{x}{x+y} \div \frac{y}{x+y} =$

Capítulo 7

Sistemas de ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad donde por lo menos hay un número desconocido, llamado incógnita o variable, y que se cumple para determinado valor numérico de dicha incógnita. Se denominan ecuaciones lineales o de primer grado a las igualdades algebraicas con incógnitas cuyo exponente es 1.

Como procedimiento general para resolver ecuaciones enteras de primer grado se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se reducen los términos semejantes, cuando es posible.
2. Se hace la transposición de términos (aplicando inverso aditivo o multiplicativo), los que contengan la incógnita se ubican en el miembro izquierdo, y los que carezcan de ella en el derecho.
3. Se reducen términos semejantes, hasta donde es posible.
4. Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita (inverso multiplicativo), y se simplifica.

7.1. Solución de ecuaciones lineales enteras de primer grado

Para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, aplicamos el criterio del operador inverso (inverso aditivo o inverso multiplicativo).

Ejemplo 7.1 *Resolver la ecuación* $2x - 3 = 53$.

Debemos tener las incógnitas a un lado y los números al otro lado de la igualdad (=), entonces para llevar el –3 al otro lado de la igualdad, le aplicamos el inverso aditivo (el inverso aditivo de –3 es +3, porque la operación inversa de la resta es la suma).

Entonces hacemos:

$$2x - 3 + 3 = 53 + 3.$$

En el primer miembro –3 se elimina con +3 y tendremos:

$$\begin{aligned} 2x &= 53+3, \\ 2x &= 56. \end{aligned}$$

Ahora tenemos el número 2 que está multiplicando a la variable o incógnita x, entonces lo pasaremos al otro lado de la igualdad dividiendo. Para hacerlo, aplicamos el inverso multiplicativo de 2 (que es $\frac{1}{2}$) a ambos lados de la ecuación:

$$2x(\frac{1}{2}) = 56(\frac{1}{2}).$$

Simplificamos y tendremos ahora:

$$\begin{aligned} x &= 56/2, \\ x &= 28. \end{aligned}$$

7.2. Solución de ecuaciones lineales fraccionarias de primer grado

Una ecuación lineal fraccionaria es aquella cuyos coeficientes y términos independientes pueden ser números racionales (fracciones). El método para resolverlas es semejante al de las ecuaciones lineales enteras.

Debemos hacer notar que las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{1}{a}x, \\ \frac{cx}{a} &= \frac{c}{a}x, \end{aligned} \tag{7.1}$$

para cualquier valor de a, c y d, donde $a \neq 0$.

Recordemos que el método de solución es igual que el utilizado para resolver las ecuaciones lineales enteras.

Ejemplo 7.2 *Resolver la ecuación* $\frac{2x}{5} = \frac{8}{10}$.

En este caso ambos denominadores se cruzan del otro lado de la igualdad multiplicando a ambos miembros

$$\begin{aligned} 10(2x) &= 5(8), \\ 20x &= 40, \\ x &= \frac{40}{20}, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.3 Resolver la ecuación $-\frac{3x}{4}-\frac{4}{5}=-\frac{7x}{3}+\frac{6}{7}$.

Cuando se tienen dos o mas términos que incluyen a la incógnita, se dejan de un solo lado de la igualdad todos los términos que contienen a la incógnita, y del otro lado de la igualdad todos los términos que no la contienen

$$-\frac{3x}{4}+\frac{7x}{3}=\frac{4}{5}+\frac{6}{7}.$$

Se suman los términos del miembro izquiero de la ecuación utilizando las reglas de la aritmética para sumar fracciones

$$-\frac{3x}{4}+\frac{7x}{3}=\frac{-9x+28x}{12}=\frac{19x}{12},$$

ahora se suman los términos del miembro derecho de la ecuación

$$\frac{4}{5}+\frac{6}{7}=\frac{28+30}{35}=\frac{58}{35}.$$

De tal forma que se tiene

$$\frac{19x}{12}=\frac{58}{35},$$

siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior, cruzamos los denominadores multiplicando del otro lado de la igualdad

$$\begin{aligned} 35(19x) &= 12(58), \\ 665x &= 696, \\ x &= \frac{696}{665}. \end{aligned}$$

7.3. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

donde $x_1,...,x_n$ son las incógnitas, $b_1,...,b_n$ se denominan términos independientes y los números a_{ij} se llaman coeficientes de las incógnitas. Dado un sistema de ecuaciones, el objetivo principal es hallar todas sus soluciones, es decir, hallar todos los valores de $x_1,...,x_n$ que verifican todas las ecuaciones.

El problema consiste en encontrar los valores desconocidos de las incógnitas involucradas.

7.3.1. Solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Ejemplo 7.4 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + y &= 11, & (7.2) \\ 5x - y &= 13. & (7.3) \end{aligned}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, se empleará el método de sustitución, el cual consiste en despejar una variable de una ecuación y sustituirla en la otra ecuación. En este caso, de la ecuación (7.2) se despeja la varible y

$$y = 11 - 3x, \tag{7.4}$$

y el resultado se sustituye en la ecuación (7.3)

$$5x - (11 - 3x) = 13,$$

ahora se resuelve como una ecuación de una incógnita

$$\begin{aligned} 5x - 11 + 3x &= 13, \\ 8x &= 24, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Se calcula el valor de y mediante la ecuación 7.4

$$y = 11 - 3(3) = 2.$$

Así la solución del sistema es $x = 3$, y $y = 2$.

7.3.2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

Ejemplo 7.5 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4, & (7.5) \\ x - 2y + 3z &= 13, & (7.6) \\ x + 3y + 4z &= 11. & (7.7) \end{aligned}$$

Se despeja la variable x de la ecuación (7.5)

$$x = 4 - y - z. \tag{7.8}$$

Se sustituye la expresión anterior en las otras ecuaciones (7.6) y (7.7)

$$\begin{aligned} (4 - y - z) - 2y + 3z &= 13, \\ (4 - y - z) + 3y + 4z &= 11, \end{aligned}$$

simplificando se tiene

$$\begin{aligned} -3y + 2z &= 9, \\ 2y + 3z &= 7, \end{aligned}$$

Se resulve por el método de igualación, despejando z de ambas ecuaciones se tiene

$$z = \frac{9+3y}{2}, \tag{7.9}$$

$$z = \frac{7-2y}{3}, \tag{7.10}$$

se igualan ambas expresiones

$$\frac{9+3y}{2} = \frac{7-2y}{3},$$

y se resuelve como una ecuación lineal de una incógnita, se cruzan multiplicando los denominadores del lado opuesto de la ecuación

$$\begin{aligned} 3(9+3y) &= 2(7-2y), \\ 27+9y &= 14-4y, \\ 13y &= -13, \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Ahora se utliza la ecuación (7.9) ó (7.10) para encontrar el valor de z

$$z = \frac{9+3y}{2} = \frac{9+3(-1)}{2} = 3.$$

Ahora se encuentra el valor de x con la ecuación (7.8)

$$x = 4 - y - z = 4 - (-1) - (3) = 2.$$

Así la solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$ y $z = 3$.

Ejercicios de Taller

1. Resolver las siguientes ecuaciones

a) $2x - 1 = 3x + 5$

b) $-5x + \frac{2}{3}x = 5$

c) $2(x-3) - 3(2x+5) = 4\left[2(x+3) - 2\right]$

d) $\frac{2}{5}x - \frac{5}{6} = \frac{2}{6}x + 2$

2. Resolver los sistemas de ecuaciones

a) $\begin{aligned} x + y &= 50, \\ 2x + 4y &= 134. \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} y &= 2x + 2, \\ 4x + 6y &= 156. \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x - y + 2z &= -6, \\ -5x + 4y + z &= 21, \\ x + y - 6z &= -14. \end{aligned}$

Ejercicios de Tarea

1. Resolver las siguientes ecuaciones

a) $-5x + 4 = -2x + 4$

b) $8x - \dfrac{2}{5} = \dfrac{2x}{3} + 1$

c) $3\left[2(x+3) - 2(x-1)\right] = 2(-x-3)$

2. Resolver los sistemas de ecuaciones

a) $\begin{aligned} 5x + 2y &= 1, \\ -3x + 3y &= 5. \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x + y &= 6, \\ 4x + 3y &= 14. \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x - 5y + 5z &= 50, \\ -2x - 3y + 2z &= 25, \\ 3x + 4y - 5z &= -45. \end{aligned}$

1. 

"La Física no sólo ha modelado espacio y tiempo, también los ha transformado"

Introducción

Desde hace siglos el ser humano ha buscado comprender el Universo en el que se encuentra. Se ha cuestionado sobre la naturaleza que lo rodea y trata de encontrar una respuesta a sus preguntas e inquietudes, dando como resultado el surgimiento de la ciencia. Y esa búsqueda perpetua de la verdad y la comprensión del Universo nos abre paso al campo del conocimiento.

Preguntas para analizar y discutir

I.- ¿Cuáles fueron las primeras preguntas que se formuló el hombre sobre su entorno y la naturaleza?

II.- ¿Qué es la Física?

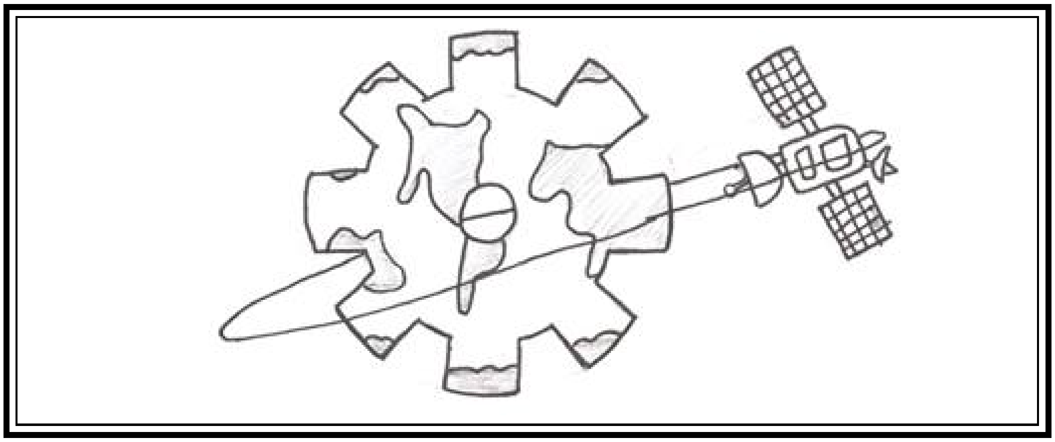
III.- ¿Cuándo nace la Física?

....

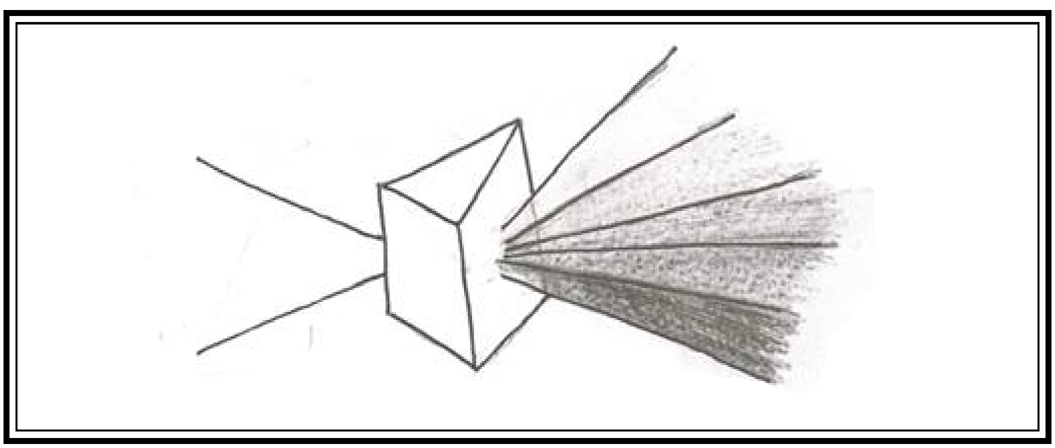
La **Física** es la ciencia que se encarga del estudio de las propiedades de la materia y de la energía, así como de sus interacciones en el espacio-tiempo. La materia es todo lo que ocupa un lugar en el espacio y está constituida por átomos que son partículas diminutas. La energía es la capacidad para realizar un trabajo.

Estudiar Física implica la búsqueda de las Leyes que rigen los fenómenos del Universo y de las fuerzas naturales que están contenidas en él. Para facilitar su estudio se ha dividido esta ciencia en varias ramas que clasifican los fenómenos de acuerdo a su naturaleza. Las ramas son: mecánica clásica, óptica, electromagnetismo y termodinámica.

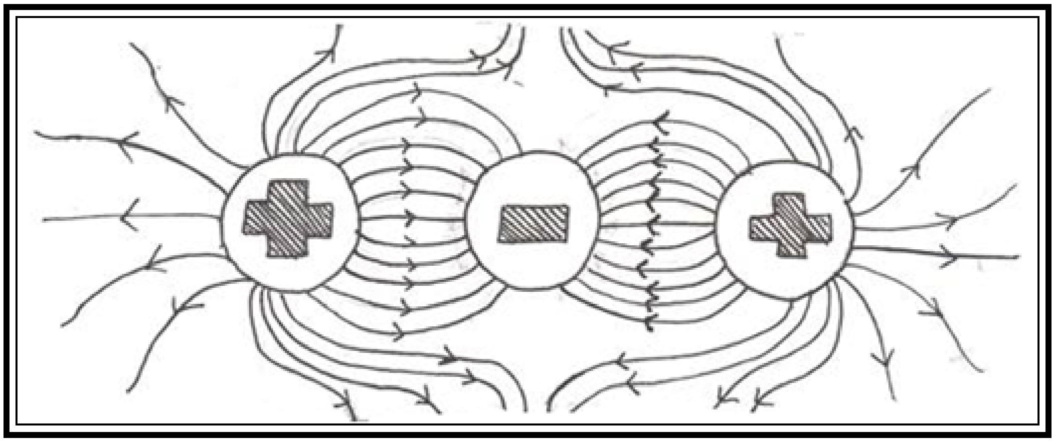
La **mecánica** se encarga del estudio de los cuerpos en movimiento, con el entendimiento de esta rama podremos responder a las preguntas: *¿Qué es lo que hace a un satélite mantenerse en órbita alrededor de un planeta? ¿Cuáles son los movimientos que existen en el giro de un trompo?¿Cómo puedo predecir el alcance de una pelota después de ser lanzada por un beisbolista?* La mecánica clásica hace uso de las Leyes de Newton para explicar la dinámica de los cuerpos.



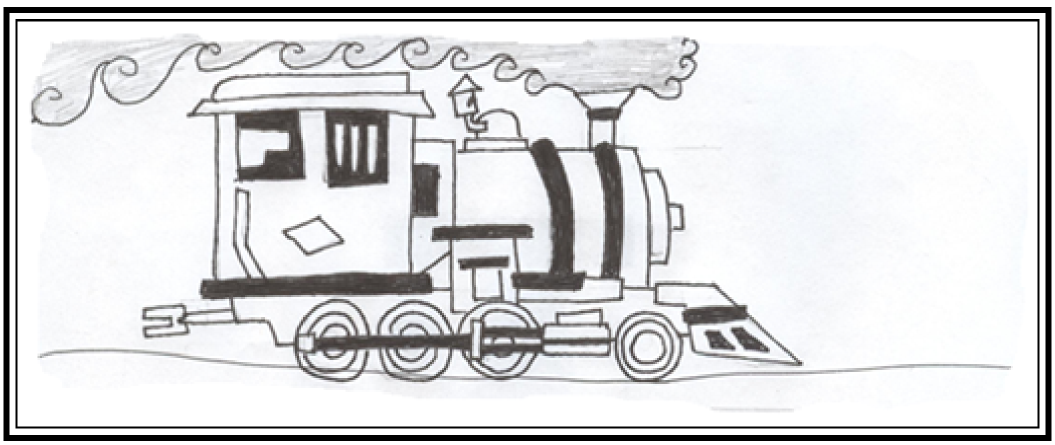
La **óptica** se encarga de estudiar las propiedades de la luz. Algunas preguntas relacionadas a esta rama que podemos plantearnos son: *¿Qué es la luz? ¿Por qué la luz blanca se dispersa en sus distintos colores cuando pasa a través de un prisma? ¿Cómo funciona la visión?¿Qué ventajas tiene la transmisión de datos mediante fibra óptica?* Las Leyes de Snell permiten analizar algunos fenómenos de naturaleza óptica, tales como la reflexión y la refracción.



El **electromagnetismo** se encarga del estudio de los fenómenos electromagnéticos. La materia además de tener la propiedad de masa, tiene otra propiedad conocida como carga. En general encontraremos que la materia es neutra ya que las cargas positivas y negativas se neutralizan. Sin embargo, algunos fenómenos permiten la acumulación o el movimiento de las cargas eléctricas y éstas generan campos electromagnéticos. Muchas de las comodidades que tenemos hoy en día son debidas a la energía eléctrica, *¿Cómo convertimos la energía eólica en energía eléctrica? ¿Cómo funciona un motor eléctrico? ¿Cómo se almacena información en las cintas magnéticas de nuestra tarjeta de crédito? ¿Cuánta energía se libera en un rayo eléctrico? ¿Cómo viajan las ondas electromagnéticas que portan la señal de nuestro teléfono celular?* Los fenómenos electromagnéticos son explicados y modelados con las Leyes de Maxwell.



La **termodinámica** estudia las propiedades y los procesos del calor. *¿Qué ocurre a nivel molecular cuando el agua pasa de estado sólido a estado líquido? ¿Qué es la temperatura? ¿Se puede diseñar un motor que funcione por diferencia de temperatura? ¿Cuánta energía se requiere para elevar la temperatura de 1kg de agua de 26 Celsius a 50 Celsius? ¿Cómo funciona la máquina de vapor? ¿Es universal la Ley de conservación de la energía?* Para estudiar los fenómenos termodinámicos se aplican las Tres Leyes de la Termodinámica.

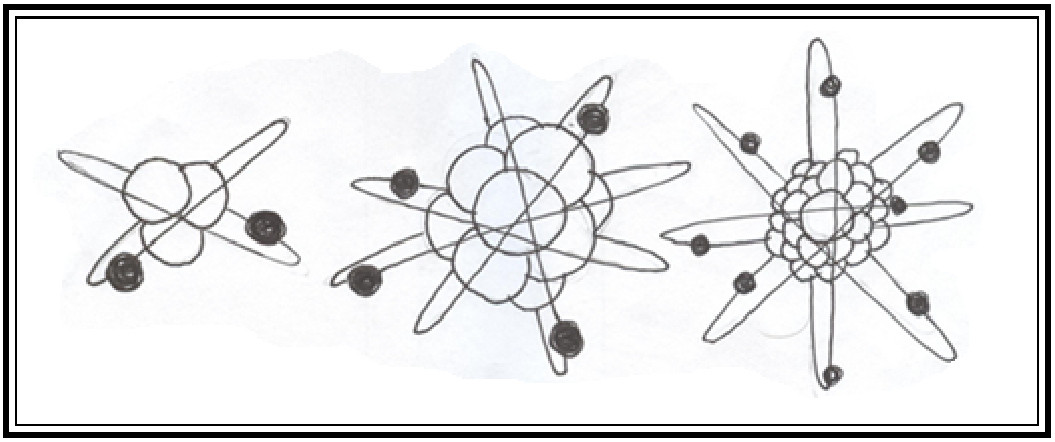


Estas cuatro ramas de la Física que corresponden a la **Física Clásica** han aportado muchas teorías que han favorecido el desarrollo de aparatos y dispositivos tecnológicos que facilitan las actividades al hombre.

Preguntas para analizar y discutir

I.- ¿Qué es la tecnología?
II.-¿Cómo se ha beneficiado el hombre con el desarrollo tecnológico moderno?
III.-¿Cuál es el impacto social y ambiental de la tecnología?

....
A partir del siglo XX se considera una nueva etapa para las teorías de la Física, aparecieron nuevas ramas de interés tales como: **la mecánica cuántica, mecánica estadística, mecánica relativista, física nuclear y física de partículas**. Algunas de las preguntas que podemos estudiar son: *la luz, ¿es una onda, una partícula o ambas? ¿Cómo puedo estudiar el comportamiento de los electrones de un material si son muchos? ¿Cómo funciona la energía nuclear? ¿Qué es la fusión y la fisión nuclear? ¿Qué fundamenta la teoría del Big Bang sobre el origen del Universo? ¿Cuáles son los fenómenos asociados a la curvatura espacio-tiempo?*



Todas estas interrogantes sobre la naturaleza y el funcionamiento de la tecnología nos comprometen a estudiar las Leyes de la Física. Conociendo estas Leyes se va adquiriendo la capacidad de interpretar fenómenos, diseñar tecnología y solucionar problemas científicos y cotidianos mediante una metodología rigurosa.

En este manual se estudian conceptos y Leyes básicas de la Física, se resuelven y se proponen algunos problemas de mecánica y de electricidad. Y se busca que el estudiante logre analizar los fenómenos físicos y pueda modelarlos.

Preguntas para analizar y discutir

I.- ¿Qué es el método científico?
II.-¿Cómo es el proceso de aprobación de una hipótesis?
III.-¿Cuál es el futuro de la Física?
....
Ejercicios de Tarea:
"Para investigar"

1.- Elabora un ensayo con una extensión de 1-2 cuartillas, donde respondas a una o varias de las preguntas que se discutieron en clase (Sección: Preguntas para analizar y discutir). Plasma tu punto *de vista sobre los tópicos. Es recomendable el uso de fuentes de información confiables, tales como: libros, artículos e internet.*

La estructura del ensayo debe ser la siguiente:

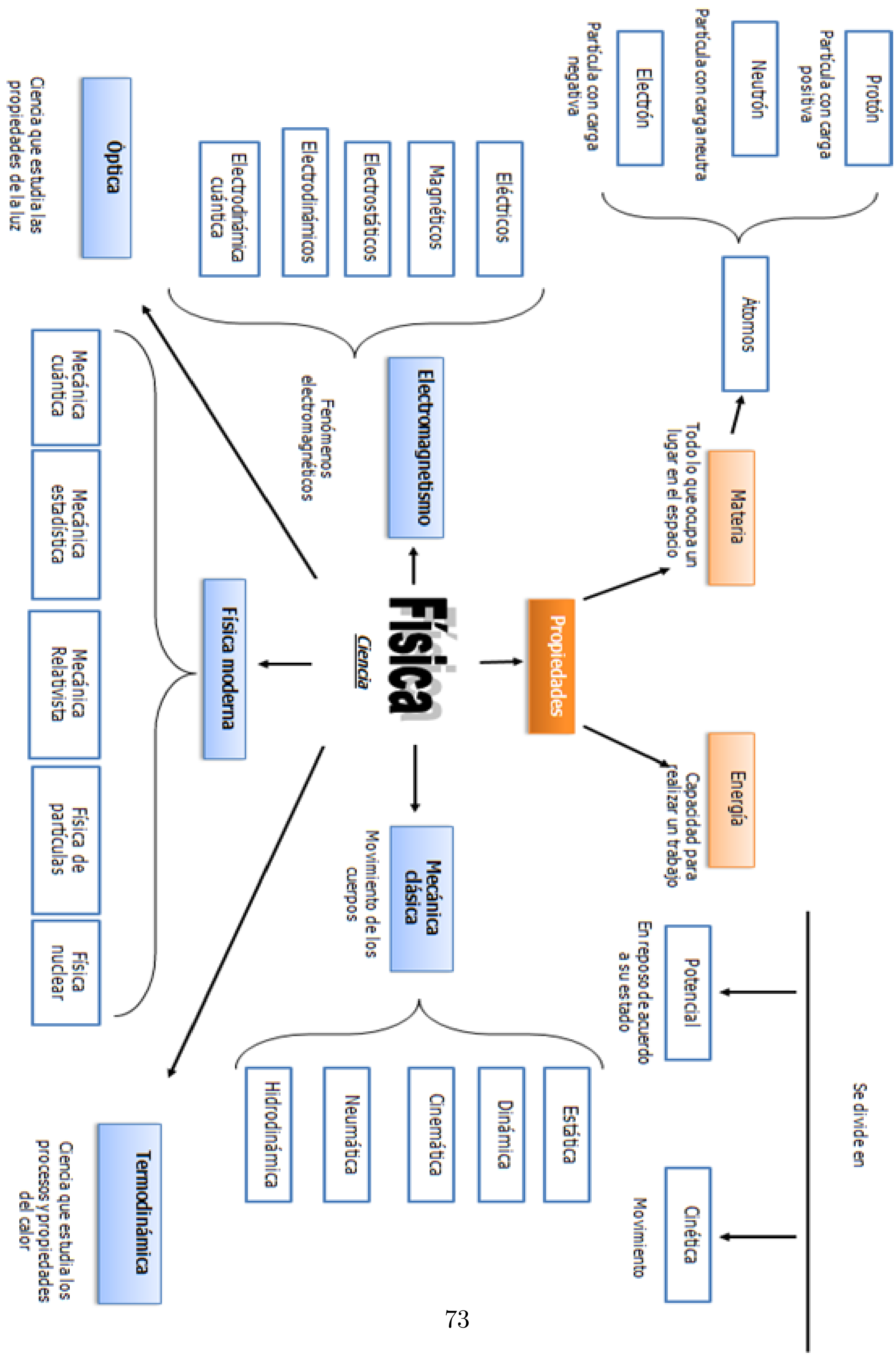
Introducción

Desarrollo

Conclusión

Bibliografía

Es importante cuidar la ortografía, la redacción, el fondo y la forma del documento.



La Física, su campo de estudio y sus ramas.

Capítulo 8

Notación científica y sistema de unidades

8.1. Notación científica

Si queremos tener noción de que tan largo es un camino que vamos a recorrer en un paseo, el metro como unidad para medir la distancia es muy útil. Podríamos pensar entonces en un recorrido de 1000 metros. La altura de un edificio puede ser de unos 60 metros y el tiempo promedio que alguien espera un autobús podría ser de 30 minutos o bien 1800 segundos. Hablar de distancias y tiempos en la vida cotidiana es sencillo. Sin embargo, los sistemas de los que hablamos en ciencia pueden ser muy grandes o muy pequeños, y los tiempos en los que suceden determinados fenómenos físicos pueden ser tan prolongados o tan cortos que en ocasiones es complicado para nosotros tener noción espacial y temporal de los eventos; pero que a pesar de ello podemos analizarlos, estudiarlos y en su caso predecirlos.

Si hacemos un viaje de Mexicali a Guadalajara debemos recorrer una distancia de 2500 kilómetros aproximadamente, o bien, 2 500 000 metros. Nótese que es más complicado darse una idea de la distancia recorrida cuando ésta se define en metros. Si se recorre esa distancia en autobús el tiempo aproximado es de unos dos días o 48 horas o 172 800 segundos. Observamos que mientras la unidad de tiempo es más corta se requieren de números más grandes para indicar el tiempo que durará el recorrido. Es poco común indicar el tiempo de viaje en segundos, son más útiles las horas y los días. Por lo tanto, algunas unidades son más favorables para expresar distancia o tiempo.

La velocidad de la luz es de aproximadamente 300 000 000 metros/segundo. El radio ecuatorial de la Tierra es de aproximadamente 6 378 100 metros. La edad del Universo de acuerdo a la teoría del Big Bang es de trece mil setecientos millones de años y la distancia de la tierra al sol es de 149 600 000 kilómetros. En estos sistemas las magnitudes de distancia, tiempo y velocidad son muy grandes y para representarlas se utiliza la **notación científica**.

Existen varias formas de representar una cantidad en notación científica, por ejemplo 300 000 000 $= 3 \times 10^8 = 300 \times 10^6 = 0{,}3 \times 10^9$.

Consideremos $n = 5$ en la expresión exponencial 10^n

$$10^5 = (10)(10)(10)(10)(10) = 100000$$

Si se tiene:

$$6{,}78 \times 10^4 = (6{,}78)(10)(10)(10)(10) = 67\ 800$$

O bien

$$4\ 650\ 000 = 4{,}65 \times 10^6 = 465 \times 10^4$$

El número de veces que se recorre el punto decimal corresponde al exponente n.

Ejemplo 1.1 *Expresar las siguientes cantidades en notación científica:*

a) 300 000 000 metros/segundo
b) 6 378 100 metros
c) 149 600 000 kilómetros
d) 2 500 000 metros
e) 13 700 000 000 años

Solución: *Las cantidades anteriores se pueden expresar de la siguiente forma:*

b) $6\ 378\ 100 = 63{,}781 \times 10^5 metros$
c) $149\ 600\ 000 = 1{,}496 \times 10^8 kilómetros$
d) $2\ 500\ 000 = 25 \times 10^5 metros$
e) $13\ 700\ 000\ 000 = 1370 \times 10^7 años$

Ejercicios de Taller. *Completa los espacios en blanco*

a) $123\ 000\ 000 =$ __________ $\times 10^4$
b) $80\ 000 =$ _________ $\times 10^3$
c) $34\ 500\ 000\ 000 =$ _________ $\times 10^9$
d) $315\ 700\ 000 =$ ___________ $\times 10^5$
e) $62\ 500 =$ ____________ $\times 10^2$
f) $4\ 572\ 000 = 45{,}72 \times 10$−−
g) $657\ 800\ 000 = 657{,}8 \times 10$−−
h) _________________ $= 6{,}43 \times 10^5$
i) _________________ $= 324{,}65 \times 10^7$

En ocasiones la magnitud de los parámetros que se estudian es muy pequeña. El radio del núcleo de un átomo de Hidrógeno es de aproximadamente 0,00000000000000175 m. La longitud de onda de la luz roja es de 0,0000007 m y la carga eléctrica de un protón es de 0,0000000000000000001602 $Coulomb$. Cuando las cantidades son muy pequeñas también se puede emplear notación científica para representarlas. Se usa la potencia de diez pero en este caso con exponentes negativos.

Una potencia de diez con exponentes negativos se expresa

$$1 \times 10^{-n} = 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Para $n = 3$ se tiene:

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 * 10 * 10} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Una forma práctica para emplear la notación científica en cantidades pequeñas consiste en recorrer el punto decimal hacia la derecha n veces. Donde $-n$ será el exponente en la notación.

Por ejemplo, la cantidad 0,00000056 se puede expresar como $5{,}6 \times 10^{-7}$, al recorrer el punto decimal 7 veces.

Ejemplo 1.2. *Expresar las siguientes cantidades con notación científica.*

a) 0,00045 =
b) 0,000006 =
c) 0,45 =
d) 0,0000000124 =
e) 0,000456 =
Solución:
a) $4{,}5 \times 10^{-4}$ b) 6×10^{-6} c) 45×10^{-2} d) 124×10^{-10} e) 456×10^{-6}
Ejemplo 1.3. *Expresar las siguientes cantidades sin notación científica.*
a) $3{,}45 \times 10^{-5} =$
b) $628{,}2 \times 10^{-3} =$
c) $4 \times 10^{-7} =$
d $24{,}95 \times 10^{-6} =$

Solución:
a) 0,0000345 b) 0,6282 c) 0,0000004 d) 0,00002495

Ejercicios de Taller.- *Completa los espacios en blanco.*

a) 0,0000586 = _ _ _ _ _ _ _ _ _ $\times 10^{-5}$

b) $0{,}0458 =$ _________ $\times 10^{-3}$
c) $0{,}000000693 =$ _________ $\times 10^{-8}$
d) $0{,}000001538 =$ ___________ $\times 10^{-7}$
e) $0{,}148 =$ ____________ $\times 10^{-2}$
f) $0{,}00852 = 85{,}2 \times 10$– – –
g) $0{,}0000456 = 456 \times 10$– – –
h) _________________ $= 3{,}29 \times 10^{-5}$
i) _________________ $= 324{,}65 \times 10^{-7}$
j) __________________ $= 45{,}39 \times 10^{-4}$
j) $2{,}25 \times 10^{-3} = 2250 \times 10$– – –

Uso de prefijos

Cuando las cantidades son muy grandes o pequeñas y se han expresado en notación científica es común emplear prefijos que expresan la notación exponencial. Por ejemplo, la magnitud $3{,}5 \times 10^{-3}$ metros, puede escribirse como 3,5 mm, (3,5 milímetros).

La siguiente tabla muestra los prefijos más empleados en las magnitudes.

Notación exponencial	Prefijo	Letra
1×10^{12}	tera	T
1×10^{9}	giga	G
1×10^{6}	mega	M
1×10^{3}	kilo	K
1×10^{-3}	mili	m
1×10^{-6}	micro	μ
1×10^{-9}	nano	n
1×10^{-12}	pico	p
1×10^{-15}	femto	f

Tabla I: Prefijos para notación exponencial

Ejercicios de Taller.

1.- Utiliza los prefijos para las siguientes magnitudes.
a) 2×10^{12} $Bytes$
b) 40×10^{8} $Hertz$
c) 2×10^{-9} $Faradios$
d) $3{,}4 \times 10^{6}$ $Pascales$
e)$10 \times 10^{-5} metros$
f) 3000 metros
g) 0,003 litros

h) $4{,}5 \times 10^{-6}$ *segundos*

Ejercicios de Tarea

1.- Escribe las cantidades empleando notación científica.

a) 123 450 000
b) 30 000 000
c) 120 000 000
d) 55 345 000
e) 230 000
f) 10 000
g) 400 000 000

2.- Escribe las cantidades empleando notación científica.

a) 0.000000123
b) 0.00014
c) 0.01
d) 0.0034
e) 0.0000045
f) 0.000000000065
g) 0.0000789

3.- Completa los espacios en blanco.

a) $4500000 = 45 \times 10$---
b) $32000 =$ ___ $\times 10^{4}$
c) $7800000 = 780 \times 10$---
d) $45 = 4500 \times 10$---
e) $9240000 =$ _____ $\times 10^{5}$
f) $65050000 =$ _____ $\times 10^{8}$
g) $0{,}000045 = 4{,}5 \times 10$---
h) $0{,}00003 = 30 \times 10$----
i) $0{,}014 =$ ____ $\times 10^{-5}$
j) $0{,}0000000679 = 67{,}9 \times 10$----
k) $0{,}0009 = 900 \times 10$-----
l) $0{,}003 =$ ____ $\times 10^{-2}$

8.2. Despejes

Al resolver problemas de Física se emplean variables para representar ciertos parámetros. Si se quiere calcular el tiempo que tardará un cuerpo en llegar de un punto A a un punto B, o sea, recorrer una distancia AB, se debe conocer a qué velocidad se desplaza el cuerpo, dicho de otra forma que distancia recorre por unidad de tiempo. Un cuerpo que se desplaza a una velocidad constante de 50 km/hr recorre una distancia de 50 km en una hora. Por lo tanto si su trayecto dura dos horas recorrerá una distancia de 100 km, si es de tres horas será una distancia de 150 km. Para representar la relación entre las variables velocidad (v), distancia (d) y tiempo (t) se utiliza la siguiente ecuación:

$$v = \frac{d}{t}$$

Si se conoce la velocidad a la que viaja el cuerpo y la distancia que recorrió, se puede calcular el tiempo que tardó en desplazarse efectuando un despeje de la ecuación anterior.

Ejemplo 1.4. *Una partícula se desplaza con una velocidad constante de* 203,2 m/s. *¿En cuánto tiempo recorrerá una distancia de 405 m?*

Se tiene que $v = 203{,}2\ m/s$ y $d = 405\ m$. Para encontrar el tiempo se despeja la ecuación como sigue:

$$vt = d$$

$$t = \frac{d}{v}$$

Sustituyendo los datos se tiene:

$$t = \frac{405m}{203{,}2m/s} = 1{,}9931s \approx 2s$$

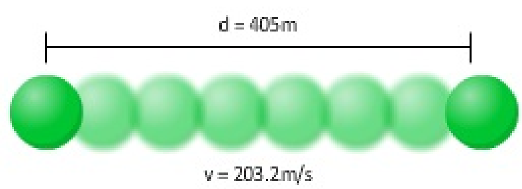


Figura 1.1: Velocidad, distancia y tiempo recorrido.

Ejemplo 1.5 *Despeja de cada ecuación la variable indicada.*

a) $pV = nRT$ variable T

b) $F = \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$ variables m_1 y r

c) $V = IR$ variable I

d) $C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{d}$ variable A y ε_r

e) $a = \dfrac{V_f - V_i}{t}$ variable V_f

Solución:

Matemáticamente para efectuar un "despeje" de una ecuación se sigue el siguiente procedimiento.

a) Se dividen ambos miembros entre nR, de esta forma se conserva la igualdad:

$$\frac{pV}{nR} = \frac{\mathbf{nR}T}{\mathbf{nR}}$$

Por propiedad cancelativa, la variable T es:

$$T = \frac{pV}{nR}$$

b)Para m_1, se multiplican ambos miembros de la igualdad por r^2

$Fr^2 = \dfrac{Gm_1m_2}{\mathbf{r}^2}\left(\mathbf{r}^2\right)$. Aplicando la propiedad cancelativa se tiene: $Fr^2 = Gm_1m_2$, dividiendo ambos miembros entre Gm_2 y aplicando la propiedad cancelativa se tiene:

$$m_1 = \frac{Fr^2}{Gm_2}$$

Para r :

$Fr^2 = Gm_1m_2$, "se pasa dividiendo F" $r^2 = \dfrac{Gm_1m_2}{F}$, y .$^{\text{el}}$ exponente al cuadrado pasa como raíz cuadrada" $r = \sqrt{\dfrac{Gm_1m_2}{F}}$

c) Se dividen ambos miembros entre R :

$$\frac{V}{R} = \frac{I\mathbf{R}}{\mathbf{R}}$$

Se aplica la propiedad cancelativa:

$$I = \frac{V}{R}$$

d) "Se pasa multiplicando d", $Cd = \varepsilon_0 \varepsilon_r A$. "Se pasan dividiendo $\varepsilon_0 \varepsilon_r$"

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Y para ε_r,"Se pasa dividiendo $\varepsilon_0 A$"

$$\varepsilon_r = \frac{Cd}{\varepsilon_0 A}$$

e) "t pasa multiplicando"$at = V_f - V_i$
"V_i pasa sumando"

$$V_f = at + V_i$$

Ejercicios de Taller. *Despeja la variable que se solicita.*

a) $E = \dfrac{mv^2}{2}$ variables m y v

b) $a = \dfrac{F}{m}$ variables m y F

c) $E = mgh$ variable h

d) $K = \dfrac{1}{2} I \omega^2$ variable ω

e) $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^3}{GM}$ variables r y M

f) $F_i = \dfrac{F_0 A_i}{A_0}$ variable F_0

8.3. Magnitudes físicas. Patrones y unidades.

Preguntas para analizar y discutir

I. En tus actividades cotidianas, ¿Qué magnitudes mides y qué unidades empleas?
II.- ¿Cuáles fueron los primeros patrones que empleó el hombre para medir?
....

Una **magnitud física** es todo aquello que puede ser medido. Existen algunas fundamentales como: longitud, tiempo, masa, temperatura, intensidad luminosa, corriente eléctrica y cantidad de sustancia. Y las magnitudes derivadas como la velocidad, que emplea unidades de distancia y de tiempo, o bien, la aceleración, la fuerza, el momento lineal, el voltaje, campo magnético, entre otras.

En las actividades cotidianas se utilizan algunas magnitudes y para medirlas hacemos uso de instrumentos. Para medir la distancia utilizamos una regla o cinta, para medir el tiempo empleamos el reloj y para la masa una báscula. Nuestro automóvil tiene un velocímetro que nos indica la velocidad a la cual nos desplazamos.

Medir es comparar un patrón para cuantificar cuantas veces está contenido en un espécimen u objeto determinado. Para realizar una medición se requiere de un patrón que se conserve íntegro y estable a pesar del paso del tiempo.

Diferentes culturas a través del tiempo han establecido los patrones que les han permitido intercambiar productos y realizar sus actividades cotidianas con organización. Algunos de los patrones que se usaron para medir distancia fueron los codos, los pies, la mano (cuarta), en su mayoría relacionados con las dimensiones corporales del hombre y otros patrones estaban asociados a sus actividades cotidianas. Una forma de medir un área, por ejemplo, podría ser la que se cubriría arando la tierra con una yunta durante un día. Sin embargo, el uso de estos patrones en las mediciones no era confiable ya que varían según la persona. Por ejemplo, no es la misma longitud la del pie de un hombre que la de otro.

En la actualidad se emplean instrumentos y patrones que hacen más precisa y exacta una medición, ya sea de distancia, tiempo, masa o cualquier otra magnitud . Para la masa se emplea como unidad el kilogramo, la longitud se mide en metros y el tiempo en segundos.

8.4. Sistema Internacional de Unidades

El Sistema Internacional de Unidades (SI) compila las unidades y patrones empleados para medir las magnitudes fundamentales que al combinarlas se obtienen las magnitudes derivadas.

La Tabla II muestra las magnitudes y las unidades que se emplean en el Sistema Internacional.

Magnitud física	Unidad	Símbolo
Longitud	Metros	m
Tiempo	Segundos	s
Temperatura	Kelvin	K
Masa	Kilogramo	kg
Corriente eléctrica	Ampere	A
Intensidad Luminosa	Candela	cd
Cantidad de sustancia	Mol	mol

Tabla II: Unidades y sus símbolos en el Sistema Internacional

8.5. Patrones de Longitud, Masa y Tiempo.

Los patrones que valida actualmente el Sistema Internacional son los siguientes:

Masa (kilogramo): Es un cilindro de platino e iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

Longitud (metros): Un metro es la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo temporal de 1/299, 792, 458 de segundo.

Tiempo (segundos): El segundo es la duración de 9,192,631,770 vibraciones de una radiación (especificada) emitida por un isótopo (especificado) del átomo de cesio.

8.6. Conversión de unidades

Existen tres sistemas de unidades, el Sistema Internacional, el Sistema Inglés y el Sistema Cegesimal. El Sistema Inglés es empleado en Estados Unidos e Inglaterra. En los problemas de ingeniería es común tener que efectuar conversiones, ya que hay varios instrumentos e indicadores que manejan unidades diferentes y para poder resolver los problemas se debe emplear un mismo sistema de unidades.

Ejemplo 1.6. *Un conductor viaja en su automóvil por Estados Unidos. Su velocímetro marca una velocidad de 90 km/hr, observa un señalamiento que indica que la máxima velocidad permitida es de 60 millas/hr. ¿Está el conductor infringiendo la ley?*

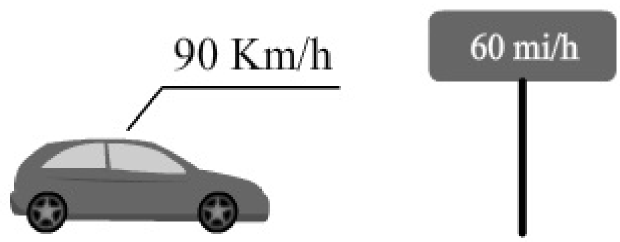


Figura 1.2: Ilustración para el Ejemplo 1.6

Este es un claro ejemplo en el que se requiere efectuar una conversión. No podemos comparar directamente los valores de 60 y 90 puesto que no tienen las mismas unidades. Para ello se debe conocer cuál es la equivalencia de kilómetros a millas. Las tablas III y IV nos indican la equivalencia para diferentes unidades de los sistemas métricos. Se tiene que 1 milla=1,609 kilómetros.

$$90\frac{km}{hr} * \left(\frac{1milla}{1{,}609km}\right) = 55{,}9millas/hr$$

Por lo tanto el conductor está dentro del límite de velocidad.

Ejemplo 1.7. *Un científico emplea un equipo de alto vacío que cuenta con bombas turbo para la extracción de aire de una cámara. El medidor indica una presión de* $1{,}5 \times 10^{-5}$ *torr. ¿Cuál es la equivalencia de la presión en atmósferas?*

La equivalencia entre las unidades de presión involucradas es: 1 $atm = 760\ torr$.
La conversión es:

$$1{,}5 \times 10^{-5}\ torr * \left(\frac{1atm}{760torr}\right) = 1{,}97 \times 10^{-8} atm$$

La presión en atmósferas es de $1{,}97 \times 10^{-8}$.

Ejemplo 1.8. *Convertir* $800\dfrac{m^3}{\text{mín}}$ *a* $\dfrac{litros}{segundo}$
Podemos notar que las unidades son de volumen por unidad tiempo, por tanto, puede indicarnos que tan rápido se está llenando un contenedor. Las equivalencias son:
1 m^3 = 1000 *litros* y 1 mín = 60 *segundos* Y la conversión es:

$$800\frac{m^3}{\text{mín}} = \left(\frac{1000 litros}{1m^3}\right) * \left(\frac{1\ \text{mín}}{60s}\right) \approx 13333{,}33\frac{litros}{segundo}$$

Ejemplo 1.9. *Convertir* $450\dfrac{cm^2}{hr}$ *a* $\dfrac{m^2}{s}$
Las equivalencias son las siguientes: $1\ m = 100\ cm$ y $1\ hr = 3600s$

$$450\frac{cm^2}{hr} * \left(\frac{1m}{100cm}\right) * \left(\frac{1m}{100cm}\right) * \left(\frac{1hr}{3600s}\right) = 1{,}25 \times 10^{-5}\frac{m^2}{s}$$

Ejemplo 1.10. *Convertir* $300\dfrac{ergs}{hr}$ *a* $\dfrac{Joules}{s}$
Las unidades son de energía por unidad de tiempo, que corresponden a potencia. La potencia es una medida de que tan rápido está entregado la energía un sistema determinado. Los ergs son las unidades de energía del sistema cegesimal y los Joules corresponden al Sistema Internacional. Las equivalencias que permiten realizar una conversión entre unidades son:
$1\ erg = 1 \times 10^{-7} Joules$ y $1\ hr = 3600s$
La conversión es:

$$300\frac{ergs}{hr} * \left(\frac{1 \times 10^{-7} Joules}{1erg}\right) * \left(\frac{1hr}{3600s}\right) \approx 8{,}33 \times 10^{-9}\frac{Joules}{s}$$

Ejercicios de Taller. *Realiza las siguientes conversiones de unidades.*
a) $205{,}3\dfrac{millas}{hr}$ a $\dfrac{km}{hr}$
b) $2000m$ a *yardas*

c) $2atm$ a $Pascales$

d) $5\dfrac{N}{m}$ a $\dfrac{lb}{cm}$

e) $2km^2$ a ft^2

f) $1200\dfrac{gr}{cm^3}$ a $\dfrac{kg}{m^3}$

g) $60\dfrac{dinas}{cm^2}$ a $\dfrac{N}{m^2}$

h) $55\dfrac{yardas}{\text{mín}}$ a $\dfrac{ft}{s}$

i) $200in$ a ft

A continuación se muestra una tabla con las equivalencias más relevantes para longitud, masa y fuerza.

Masa	Longitud	Fuerza
1 slug= 14.59 kg	1 pulgada=2.54 cm	1 dina= $1\times10^{-5}N$
1 onza= 28.35 gr.	1 pie=30.48 cm	1 libra= 4.448N
1 libra= 453.6 gr	1 milla= 1609 metros	1 dina= $2.248\times10^{-6}lb$
1 libra= 16 onzas	1 yarda= 3 pies	1 poundal=$1.383\times10^{4}dinas$
1 kilogramo= 1000 gr.	1 milla= 5280 pies	1 poundal= 0.1383 N
1 tonelada métrica=1000 kg.	1 pie = 12 pulgadas	1 libra= 32.17 poundal

Tabla III: Equivalencias de unidades para masa, longitud y fuerza.

Para presión y energía:

Presión	Energía
1 atmósfera=$1.013\times10^{5}Pascales$	1 Joule= $9.481\times10^{-4}Btu$
1 atmósfera=$1.013\times10^{6}\dfrac{dinas}{cm^2}$	1 Joule= $1\times10^{7}erg$
1 atmósfera= 76 cm de Hg	1 Joule= 0.2389 Calorías
1 torr= 1 mm de Hg	1 Joule= 6.242×10^{18} electrón-Volt(eV)
1 Pascal= 7.501×10^{-4} cm de Hg	1 erg= $9.481\times10^{-11}Btu$
1 cm de Hg= 5.353 pulgada de agua	1 caloría= 3.088 ft$\cdot lb$

Tabla IV: Equivalencias de unidades para presión y energía.

Ejercicios de Tarea.

1.- Escribe las cantidades en notación científica.

a) 132 000 000

b) 0,0000000054

c) 193 000

d) 896 433 000 000

e) 0,0000564

2.- Escribe las cantidades sin notación científica.

a) $3{,}28 \times 10^{-5}$

b) $7{,}55 \times 10^{4}$

c) $87{,}45 \times 10^{-3}$

d) $9{,}87 \times 10^{6}$

e) $0{,}014 \times 10^{-3}$

3.-Utiliza prefijos en las siguientes magnitudes.

a) 5 600 000 Pascales

b) 0.000005 torr

c) $4.5{\times}10^{7} Byte$

d) $4.5{\times}10^{12} Hertz$

4.- Despeja de la ecuación la variable que se indica.

a) $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_o y}$, despejar λ, y

b) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, despejar r

c) $P = 2a + 2b$, despejar a

d) $R = \dfrac{\rho L}{A}$, despejar L, A

e) $B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi d}$, despejar i, d

f) $E = hf$, despejar h, f

5.- Realiza las conversiones que se indican.

a) 7 *días a segundos*

b) 450 *yardas a pies*

c) 6000 km/s *a* $yardas/hr$

d) 25 $galones/s$ *a* $litros/$ mín

e) 80 *btu a atm*

f) 45 eV *a* $Joules$

g) 600 m/s^2 a km/hr^2

i) 3890 $toneladas$ a $libras$

Capítulo 9

Vectores

En física se usan los marcos de espacio y tiempo para analizar los fenómenos. En el movimiento de un avión al despegar, por ejemplo, se puede describir la posición en la que se encuentra para un tiempo determinado. La *Figura 2.1* ilustra de forma muy general la trayectoria del avión. Primero sigue la pista en dirección *z* ″, su movimiento es unidimensional. Cuando el avión se eleva su movimiento es en dos direcciones *(y,z)* y para posicionarse a la altura requerida es necesario moverse en las tres dimensiones *(x,y,z)*.

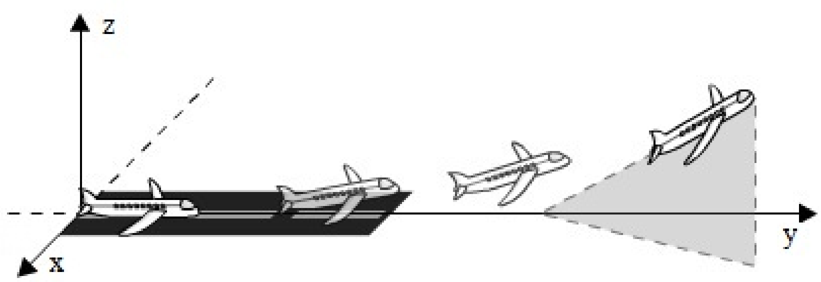


Figura 2.1: El movimiento de un avión en tres dimensiones.

En esta sección se estudiarán vectores en dos dimensiones espaciales *(x,y)*. Los vectores pueden representar la dirección de movimiento de una partícula o cuerpo. Sin embargo, también se emplean para expresar otras magnitudes importantes en física, tales como: fuerza, aceleración, campo magnético, entre otras. Las magnitudes vectoriales tienen una intensidad definida para cada dirección del espacio. Por ejemplo, el desplazamiento del avión puede ser diferente en las tres direcciones.

Ejemplo 2.1. *Una persona se desplaza del punto A al punto B como se muestra en la Figura 2.2. Calcula:*

a) La distancia total recorrida. Suponiendo que primero hizo el movimiento horizontal y después el vertical.

b) La distancia total recorrida. Considerando un movimiento en línea recta.
c) El desplazamiento
d) ¿Es el mismo desplazamiento en la dirección "x" en la dirección "z"?
e) ¿En cuántas dimensiones se desplaza la persona?

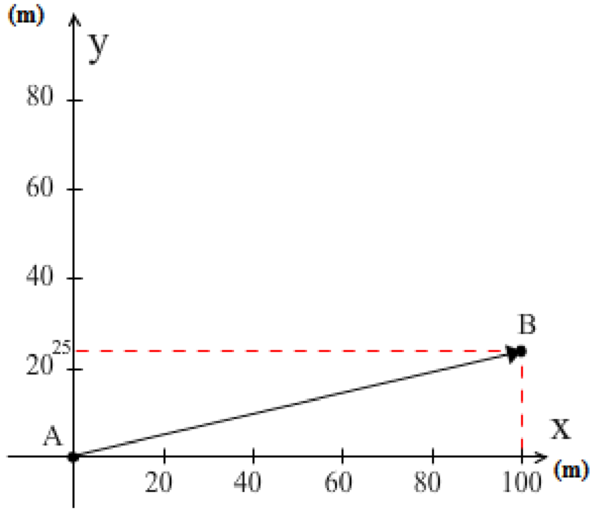


Figura 2.2: Desplazamiento de una persona
del punto A al punto B.

a) La distancia total recorrida es:
Distancia horizontal + Distancia vertical.

$$d_T = d_x + d_y = 100m + 25m = 125m$$

b) Si el desplazamiento se hace en línea recta la distancia recorrida puede calcularse con el Teorema de Pitágoras.

$$d = \sqrt{25^2 + 100^2} = 103{,}08m$$

Por lo que la distancia recorrida es de $103{,}08m$.

c) El desplazamiento es una magnitud vectorial y se define, en este caso, con la distancia recorrida en cada dirección.

$$\textbf{Desplazamiento} = 100m\ en\ "\mathbf{x}" + 25m\ en\ "\mathbf{y}"$$

d) El desplazamiento no es el mismo en ambas direcciones. En el eje "x"se desplaza 100 m, mientras que en el eje z"se desplazó solo 25 m. En los vectores las magnitudes de los parámetros a estudiar pueden ser diferentes en cada dirección.

e) El cuerpo se desplaza en dos dimensiones (x,y).

9.1. Sistemas de coordenadas cartesianas

Para definir los vectores en el espacio se requiere de un marco de referencia, para ello se hace uso del sistema de coordenadas cartesianas, que también es útil para ubicar un punto en el espacio. Si en el análisis de un problema en física se estudian vectores en dos dimensiones, se trata de vectores en el plano y son coplanares.

El sistema de coordenadas cartesianas en dos dimensiones se divide en cuatro regiones llamadas cuadrantes, que se forman por dos ejes ortogonales (con un ángulo de 90^o entre ellos), el eje "x" o eje de las abscisas y el eje "y" o eje de las ordenadas.

Un par coordenado (x, y) corresponde a un punto en el plano, el primer valor indica la posición en "x"para el punto y el segundo indica la posición en z". A la intersección entre los ejes se le conoce como el origen y corresponde al par $(0, 0)$.

En la *Figura* 2,3 se muestra el plano cartesiano.

En el *primer cuadrante* ambos valores son positivos $(+, +)$

En el *segundo cuadrante* el valor en "x" es negativo y el valor en "y" es positivo $(-, +)$

En el *tercer cuadrante* ambas cantidades son negativas $(-, -)$

En el *cuatro cuadrante* el valor en "x" es positivo y el valor en "y" es negativo $(+, -)$

Ejemplo 2.2. *Ubica las coordenadas (-4,5) y (3,1) en el plano cartesiano.*

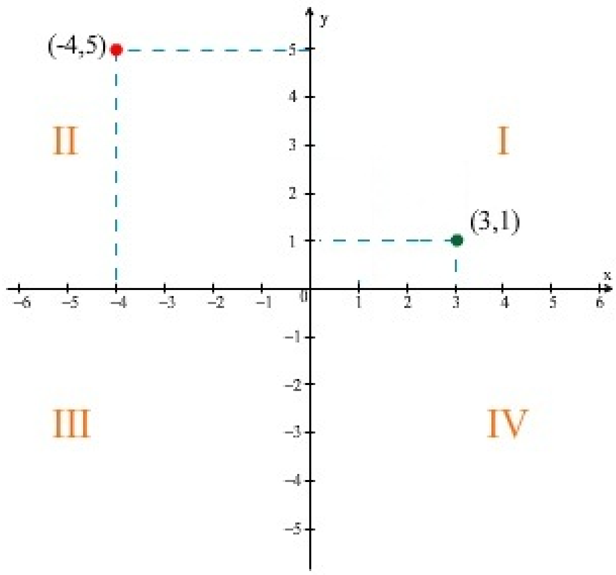


Figura 2.3: Plano cartesiano

La coordenada (3,1) está en el primer cuadrante, para ubicarla a partir del origen nos desplazamos tres unidades en "x" (a la derecha), y una unidad en el eje "y" (hacia arriba). Para ubicar la coordenada (-4,5) nos desplazamos cuatro unidades en "x" (a la izquierda, por ser negativo el valor) y cinco unidades en "y" (hacia arriba). Si el valor de la coordenada en "y" es negativo nos desplazamos hacia abajo.

Ejercicios de Taller. *Ubica en el plano cartesiano las siguientes coordenadas.*

a) $(-3, 5)$

b) $(-2, -2)$

c) $(5, 3)$

d) $(4, -5)$

e) $(\frac{1}{2}, -3)$

f) $(-2, -\frac{1}{2})$

9.2. Vectores y escalares

Las magnitudes físicas pueden ser escalares, vectoriales y tensoriales. Las **magnitudes escalares** se definen mediante una cantidad y su unidad. Por ejemplo: la masa, la temperatura, la distancia, la rapidez, entre otros.

Ejemplos de magnitudes escalares son: 50 kilogramos, 8 segundos, 2000 m, 90 volts.

Las **magnitudes vectoriales** se definen con una norma o módulo, dirección, sentido y unidad. Las componentes de un vector se ilustran en la *Figura 2.4*.

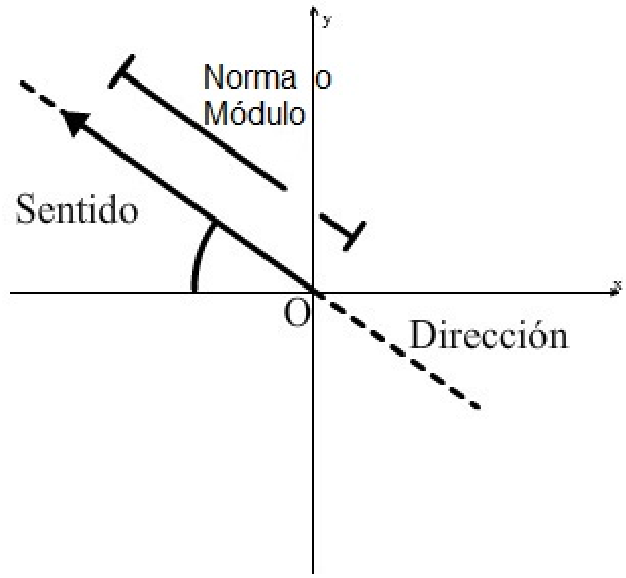


Figura 2.4: Componentes de un vector.

En las magnitudes vectoriales el fenómeno a estudiar tiene una dirección preferencial sobre la que actúa. Como ejemplo tenemos el desplazamiento, la velocidad, la fuerza.

Ejemplo 2.3. *Una persona quiere desplazarse del punto A al punto B que se encuentra a 1 km al norte.*

¿Llegará la persona al punto B si su velocidad es de $v = 0{,}98\ m/s$*?*

Como no se indicó la dirección de la velocidad no se puede saber si la persona en realidad se desplaza hacia el norte. Puede emprender su desplazamiento en cualquier dirección pero sólo en el caso en el que su velocidad sea en el sentido Sur-Norte llegará al punto deseado. Por lo tanto, la velocidad que permite llegar al punto B es $v = 0{,}98\ Norte\ (m/s)$. De hecho, si no se indica la dirección el parámetro es conocido como rapidez.

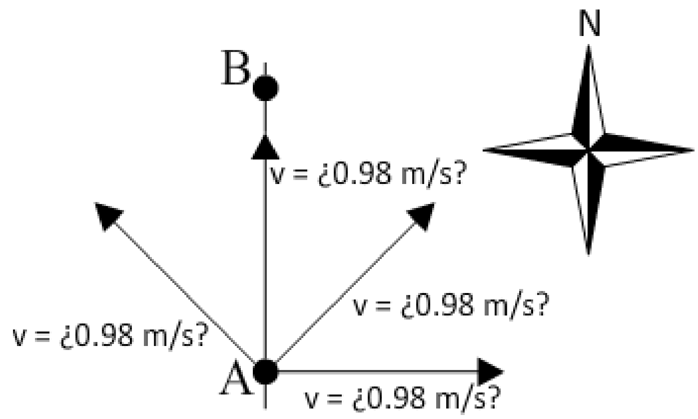


Figura 2.5: La velocidad es una magnitud vectorial. Se requiere de una dirección y sentido para definirla.

La fuerza es otra magnitud vectorial y por tanto se debe saber la dirección en la que es aplicada. Si dos personas quieren mover un refrigerador o algún mueble grande y aplican la fuerza con la misma intensidad (magnitud) pero una de un lado y la otra del otro, el refrigerador no se moverá ya que las fuerzas se anulan. Las unidades en las que se mide la fuerza son los Newton (N), para el caso estudiado hay dos posibilidades si las fuerzas se aplican en la misma dirección:

a) En el mismo sentido. Para una magnitud de fuerza de 60 N, la fuerza resultante será:

$$F_R = 60N + 60N = 120N$$

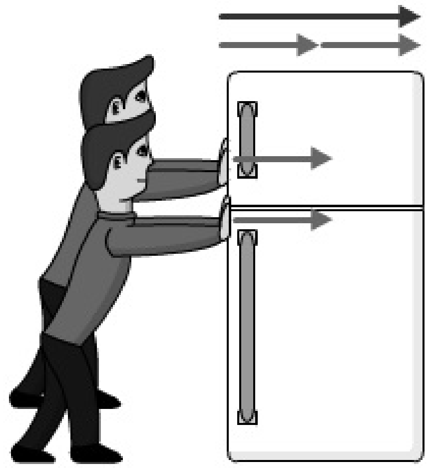


Figura 2.6: Si la fuerza es aplicada en la misma dirección y sentido, la resultante es mayor.

b) En sentido contrario:

$$F_R = 60N + (-60N) = 0N$$

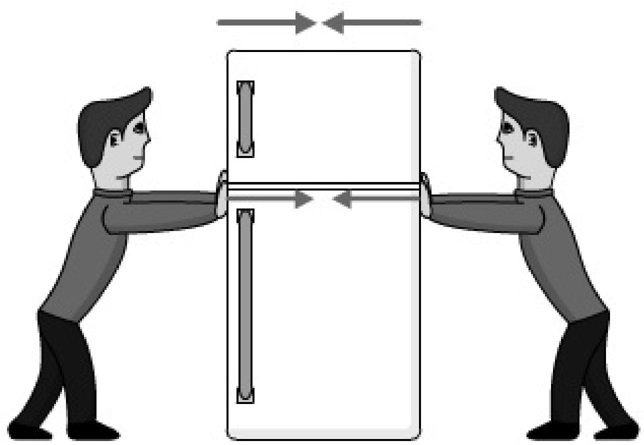


Figura 2.7: Si la fuerza se aplica en la misma dirección pero en sentido contrario, las fuerzas se anulan.

Muchos de los parámetros involucrados en los fenómenos naturales son magnitudes vectoriales, como ya se mencionó la velocidad y la fuerza son ejemplos. Para la solución de problemas se debe conocer la notación con la que se representan los vectores, su descomposición, la sumatoria de las componentes e interpretar el vector resultante.

9.2.1. Vectores en el plano

Los vectores indican la intensidad de un parámetro en cada dirección del espacio. Se utilizan flechas para representarlos en el plano cartesiano.

Un vector en el plano se representa en su forma cartesiana como $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$.

Donde A_x y A_y son las componentes del vector para la direcciones "x" y "y" respectivamente.

El vector $\mathbf{i}$ es de magnitud 1 en dirección de las x. El vector $\mathbf{j}$ es de magnitud 1 en dirección y. Los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son conocidos como vectores unitarios.

En la *Figura 2.8* se bosqueja el vector $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ en el plano cartesiano.

Hay una componente en la dirección "x" de 3 vectores unitarios ($\mathbf{i}$) y una componente en la dirección $\mathcal{z}$" de 1 vector unitario ($\mathbf{j}$). El vector se dibuja del origen al punto donde finaliza la componente en "y" del vector.

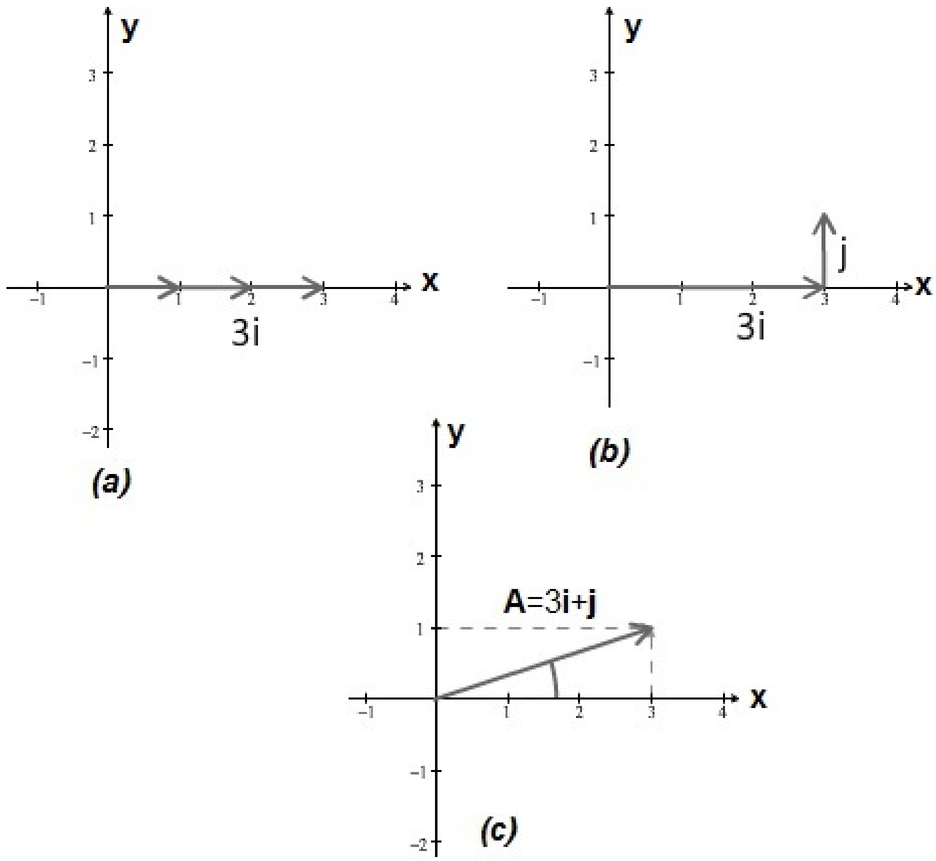


Figura 2.8: Bosquejo del vector $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ en el plano cartesiano.
(a) Componente en "x"(b) Componente en z"(c) Vector

Ejemplo 2.4. *Realiza un bosquejo de los siguientes vectores en el plano cartesiano.*
a) $\mathbf{A} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
b) $\mathbf{B} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
c) $\mathbf{C} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
d) $\mathbf{D} = -\dfrac{1}{2}\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
e) $\mathbf{E} = -2\mathbf{i} - \dfrac{1}{4}\mathbf{j}$

Solución:

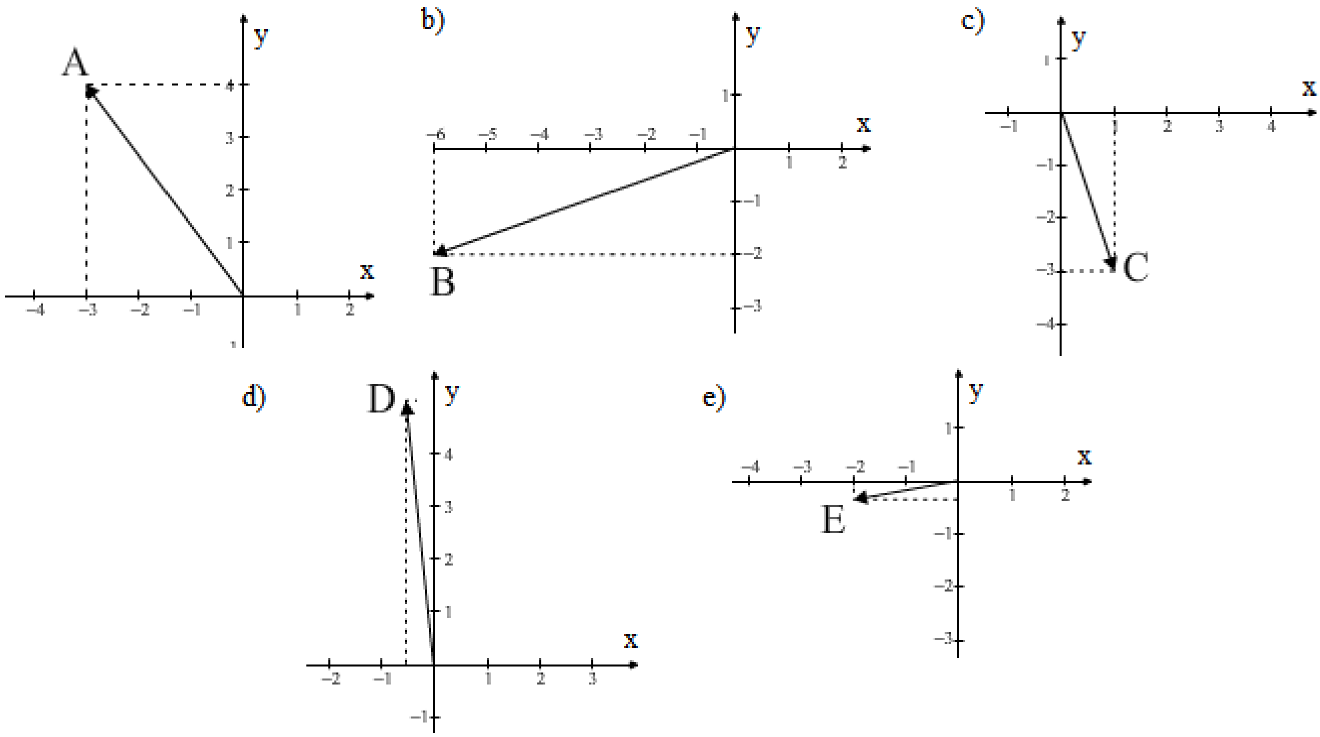


Figura 2.9: Bosquejos de los vectores del Ejemplo 2.4

Ejercicios de Taller:

a) $\mathbf{A} = -\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$
b) $\mathbf{B} = -\,3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
c) $\mathbf{C} = \mathbf{4i} + 3\mathbf{j}$
d) $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$
e) $\mathbf{E} = 3\mathbf{i} + \frac{1}{4}\mathbf{j}$
f) $\mathbf{F} = -2\mathbf{j}$
g) $\mathbf{G} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j}$

Ejercicios de Tarea:

1.- Cita un ejemplo donde un cuerpo se desplace en:
a) Una dirección (rectilíneo)
b) Dos direcciones (en un plano)
c) Tres direcciones (en el espacio)
2.- Mediante un ejemplo explica la diferencia entre distancia recorrida y desplazamiento.

3.- Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano

a) $P_1 = (0, -2)$

b) $P_2 = (-3, -5)$

c) $P_3 = (\frac{5}{2}, 3)$

d) $P_4 = (2, -1)$

e) $P_5 = (-\frac{2}{3}, -27)$

f) $P_6 = (4, 0)$

g) $P_7 = (1, -6)$

4.- Explica la diferencia entre un vector y un escalar.

5.- ¿Cuál es la fuerza neta que experimenta el cuerpo A? y ¿el cuerpo B?

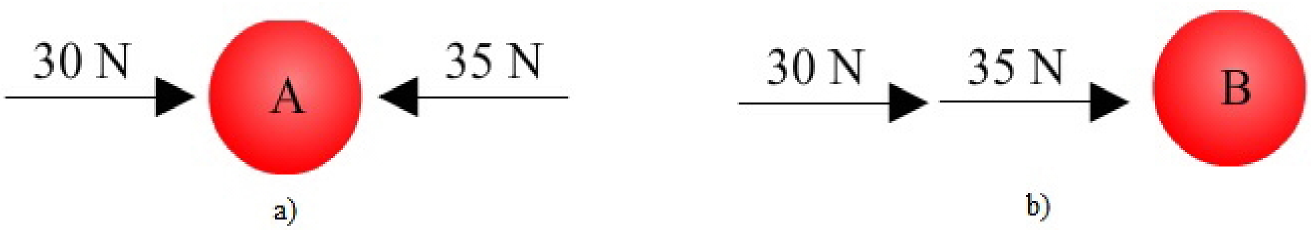


Figura 2.10: Ilustración para el Ejercicio de Tarea 5

6.- ¿Cuál es la fuerza neta que experimenta el cuerpo C?

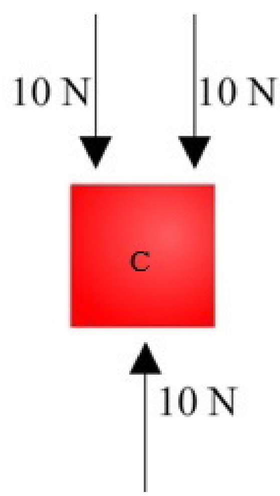


Figura 2.11: Ilustración para el Ejercicio de Tarea 6.

6.- ¿Cuáles son los componentes de un vector?
7.- ¿Qué es un vector unitario?
8.- Bosqueja los siguientes vectores en el plano cartesiano.

a) $\mathbf{A} = -\,\mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j}$
b) $\mathbf{B} = -\,2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
c) $\mathbf{C} = -\mathbf{3i} - 3\mathbf{j}$
d) $\mathbf{D} = -\,\frac{5}{2}\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
e) $\mathbf{E} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
f) $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + \mathbf{4j}$
g) $\mathbf{G} = \mathbf{4i} + 2\mathbf{j}$

Coordenadas polares.

El sistema de coordenadas polares se basa en dos parámetros (r, θ) para la ubicación de puntos en el plano. El valor de r indica que tan alejado se está del origen y el valor de θ marca la posición sobre la circunferencia $r = r_0$, donde r_0 es su radio. El valor de θ se encuentra en el intervalo de $[0^o, 360^o]$. De la *Figura 2.12* se definen los puntos en coordenadas polares:

A $(12, 90^o)$; B $(8, 140^o)$; C $(5, 315^o)$; D $(12, 315^o)$.

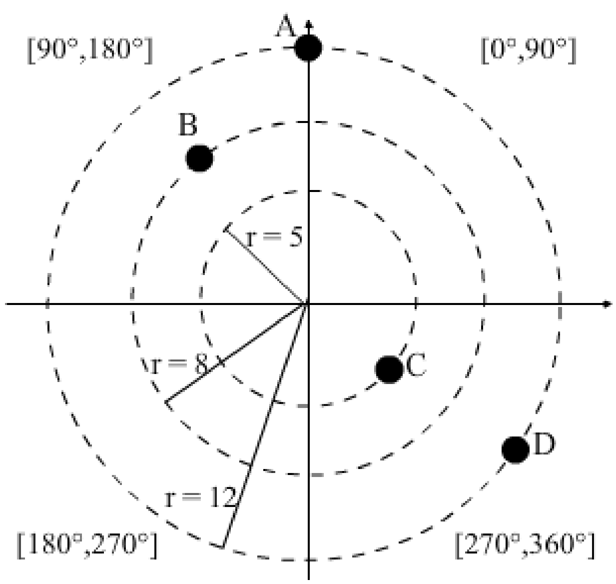


Figura 2.12: Sistema de coordenadas polares.

Representación de vectores en forma polar

Haciendo uso de las coordenadas polares también se pueden representar los vectores. Un vector puede definirse como $\mathbf{A} = (|A|, \theta)$, donde $|A|$ es la módulo o norma y θ indica la dirección y el sentido. Es común denominar al valor $|A|$ como magnitud, refiriéndonos también a la longitud del vector.

Ejemplo 2.5. *Bosqueja el vector* $\mathbf{A} = (8, 135^o)$

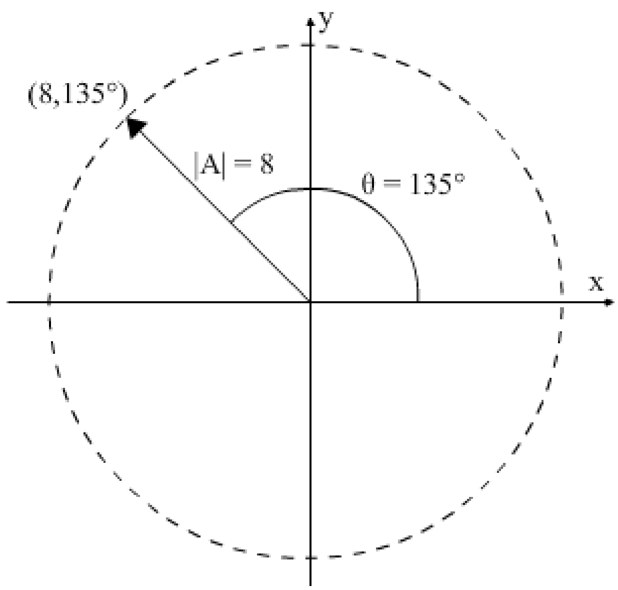


Figura 2.13: Bosquejo del vector $\mathbf{A} = (8, 135^o)$

El vector se bosqueja desde el origen hasta el punto con la coordenada polar $(8, 135^o)$. La norma o módulo es de 8 unidades y su ángulo es de 135 grados. Esta notación de vectores se conoce como polar.

Ejercicios de Taller. *Empleando compás y transportador bosqueja los siguientes vectores en hojas milimétricas.*

a) $\mathbf{A} = (3{,}5, 48^o)$

b) $\mathbf{B} = (7, 225^o)$

c) $\mathbf{C} = (9{,}4, -30^o)$

Si se tiene un vector en su forma cartesiana $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$, puede calcularse su módulo con la ecuación:

$$|A| = \sqrt{|A_x|^2 + |A_y|^2}$$

Y su ángulo:

$$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Se toman algunas consideraciones con respecto al ángulo cuando el vector se localiza en el segundo o tercer cuadrante. Si se encuentra en el segundo cuadrante se tiene que el ángulo es:

$$\theta = 180 + \theta_A$$

Y si se posiciona en el tercer cuadrante:

$$\theta = \theta_A - 180$$

Ejemplo 2.6. *Encuentra el módulo (magnitud) y el ángulo del vector* $\mathbf{A} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

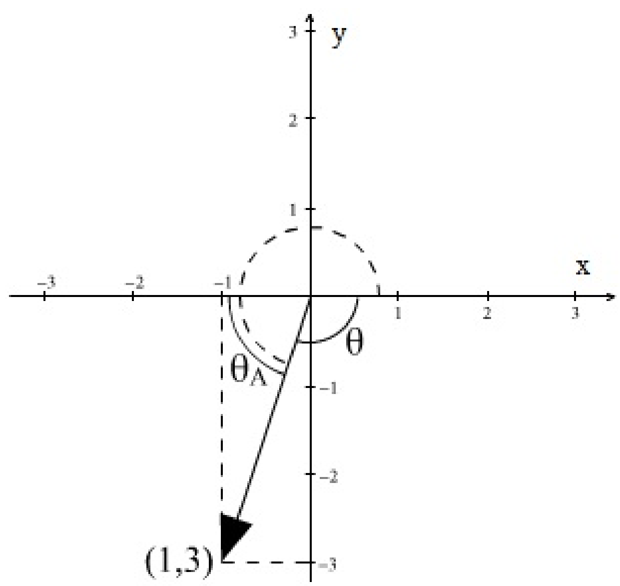


Figura 2.14: Bosquejo del vector $\mathbf{A} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

.

El módulo es:

$$|A| = \sqrt{|-1|^2 + |-3|^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$$

Para el ángulo:

$$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{-1}\right) = 71{,}56^o$$

En este caso el vector se encuentra en el tercer cuadrante por lo que el ángulo es:

$$\theta = 71{,}56 - 180 = -108{,}43^o$$

El vector se expresa entonces:

$$\mathbf{A} = (\sqrt{10}, -108{,}43^o)$$

Recuerda que un ángulo negativo se obtiene haciendo el giro en sentido de las manecillas del reloj. El vector representado con un ángulo positivo es:

$$\mathbf{A} = (\sqrt{10}, 251{,}56^o)$$

Ejercicios de Taller. *Expresa el vector de acuerdo a su módulo y ángulo (forma polar).*
a) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
b) $\mathbf{B} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
c) $\mathbf{C} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
d) $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
e) $\mathbf{E} = -2\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j}$

Ahora bien, si el vector está definido en su forma polar $\mathbf{A} = (|A|, \theta)$ y se busca representarlo en su forma cartesiana, $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$, se emplean las siguientes ecuaciones:

$$A_x = |A|\cos(\theta)$$

$$A_y = |A|\, sen(\theta)$$

Ejemplo 2.7. *Representar el vector* $\mathbf{A} = (250, 30^o)$ *en su forma cartesiana.*

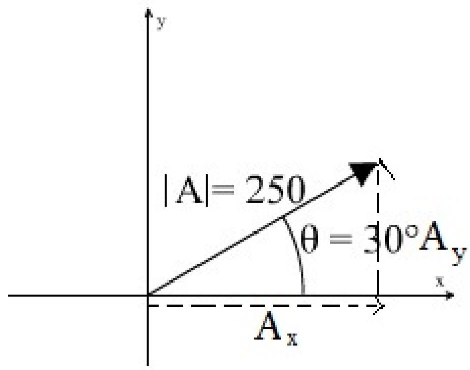


Figura 2.15: Bosquejo del vector
$\mathbf{A} = (250, 30^o)$.

$$A_x = 250\cos(30) = 250 * \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 125\sqrt{3} \approx 216{,}5$$

$$A_y = 250sen(30) = 250 * \left(\frac{1}{2}\right) = 125$$

El vector se puede representar de la siguiente forma, $\mathbf{A} = 125\sqrt{3}\mathbf{i} + 125\mathbf{j}$ o bien $\mathbf{A} \approx 216{,}5\mathbf{i} + 125\mathbf{j}$

Ejercicios de Taller. *Representar los siguientes vectores en su forma cartesiana.*

a) $\mathbf{A} = (20, 100^o)$
b) $\mathbf{B} = (2{,}5, 190^o)$
c) $\mathbf{C} = (1546, 298^o)$
d) $\mathbf{D} = (\frac{1}{2}, -60^o)$

Ejercicios de Tarea.

1.- Bosqueja los siguientes vectores en el plano cartesiano.

a) $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
b) $\mathbf{B} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
c) $\mathbf{C} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
d) $\mathbf{D} = (2, 10^o)$
e) $\mathbf{E} = (7, -43^o)$
f) $\mathbf{F} = (2{,}5, -200^o)$

2.- Representa los vectores en su forma polar.

a) $\mathbf{A} = \mathbf{625i} - 328\mathbf{j}$
b) $\mathbf{B}$ =0,25$\mathbf{i} + 1{,}156\mathbf{j}$
c) $\mathbf{C} = -45\mathbf{i} - 28\mathbf{j}$
d) $\mathbf{D}$ =25,35$\mathbf{i} - 2{,}48\mathbf{j}$
e) $\mathbf{E} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
3.- Representa los vectores en su forma cartesiana.
a) $\mathbf{A} = (143{,}25, 110^o)$
b) $\mathbf{B} = (25{,}65, -10^o)$
c) $\mathbf{C} = (14, 230^o)$
d) $\mathbf{D} = (28, 90^o)$
e) $\mathbf{E} = (2{,}5, -200^o)$

9.3. Método geométrico para sumar vectores

Existen tres métodos geométricos para la suma de vectores: triángulo, paralelogramo y polígono. Los dos primeros se emplean cuando se suman dos vectores. El método del polígono puede aplicarse para sumar cualquier número de vectores.

9.3.1. *Método del triángulo*

Ejemplo 2.8. *Sumar los vectores* $\mathbf{A} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.
Como primer paso se bosqueja el vector A. (Ver *Figura 2.16*)
Ahora se grafica el vector B pero se toma como origen el punto donde finaliza el vector A.
Se traza el vector resultante del origen del vector A hasta el final del vector B.

Se emplea regla y transportador para medir el módulo y el ángulo del vector.

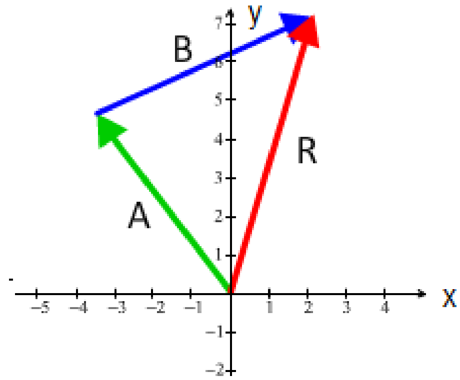


Figura 2.16 : Suma de vectores por
el método del triángulo.

Ejercicio de Taller.

1.- a) *Sumar por el método del triángulo los vectores* $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

b) *Encontrar el módulo y el ángulo del vector resultante.*

2. a) *Sumar por el método del triángulo los vectores* $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ *y* $\mathbf{G} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

b)*Encontrar el módulo y el ángulo del vector resultante.*

9.3.2. *Método del paralelogramo*

Ejemplo 2.9. *Sumar los vectores* $\mathbf{D} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{E} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ *empleando el método geométrico del paralelogramo.*

Se bosqueja el vector **D** en el plano cartesiano. Ver *Figura 2.17.*

Haciendo coincidir los orígenes de los vectores se bosqueja el vector **E**.

Se trazan líneas paralelas a ambos vectores.

Se dibuja el vector resultante coincidiendo con la diagonal del paralelogramo.

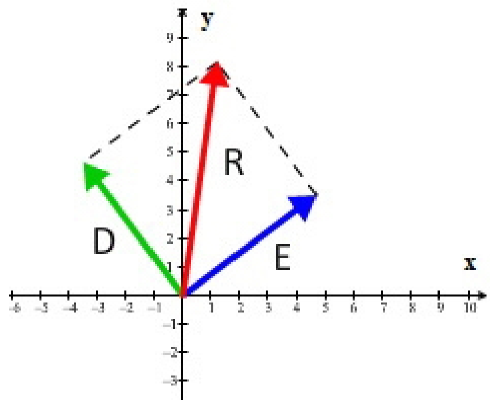


Figura 2.17: Suma de vectores por
el método del paralelogramo.

9.3.3. *Método del polígono*

El método del polígono es básicamente una extensión del método del triángulo. Un tercer vector se grafica tomando como origen el punto donde finalizó el segundo.

Ejemplo 2.10. *Mediante el método del polígono sumar los siguientes vectores:* $\mathbf{A} = -\,2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{C} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

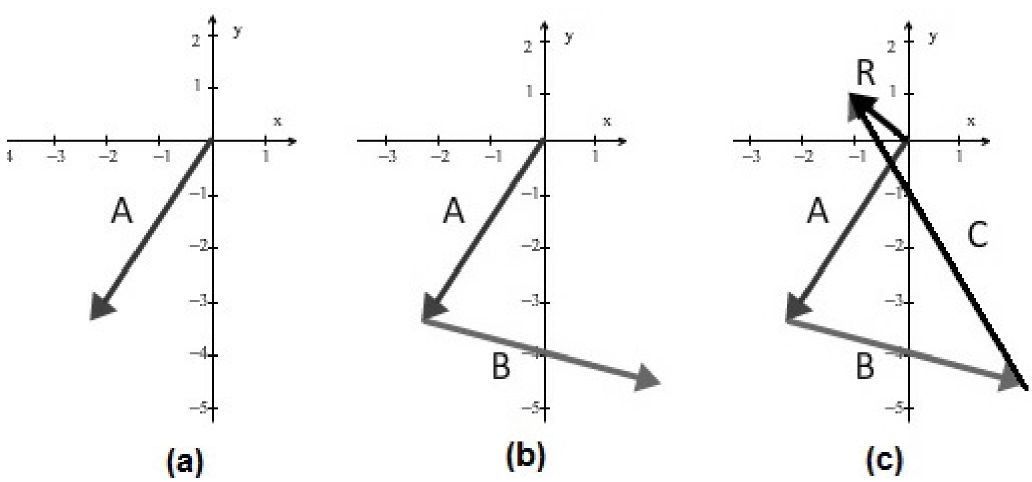


Figura 2.18: Suma de vectores por el método del polígono.

El vector resultante R se obtiene uniendo el origen con el final del vector C.

Ejercicios de Taller.

1.- Empleando el método geométrico. Encontrar:

a) A+B

b) B+C

c) A+B+C+D

Considerando los vectores:

$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$\mathbf{B} = -\,3\mathbf{i}$

$\mathbf{C} = -\,5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

$\mathbf{D} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

Ejercicios de Tarea.

1.- Sumar los vectores por el método del triángulo y del paralelogramo. Representa el vector resultante en forma polar.

a) $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

b) $\mathbf{B} = -\,2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j}$

c) $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

d) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -\,3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

e) $\mathbf{B} = 9\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = -\,3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

2.- *Sumar los vectores por el método del polígono. Representa el vector resultante en forma polar.*

a) $\mathbf{A} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -\,\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

b) $\mathbf{A} = \mathbf{4i}-\mathbf{3j}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = \mathbf{5i} + 6\mathbf{j}$

3.- Comprueba tus resultados empleando el software.

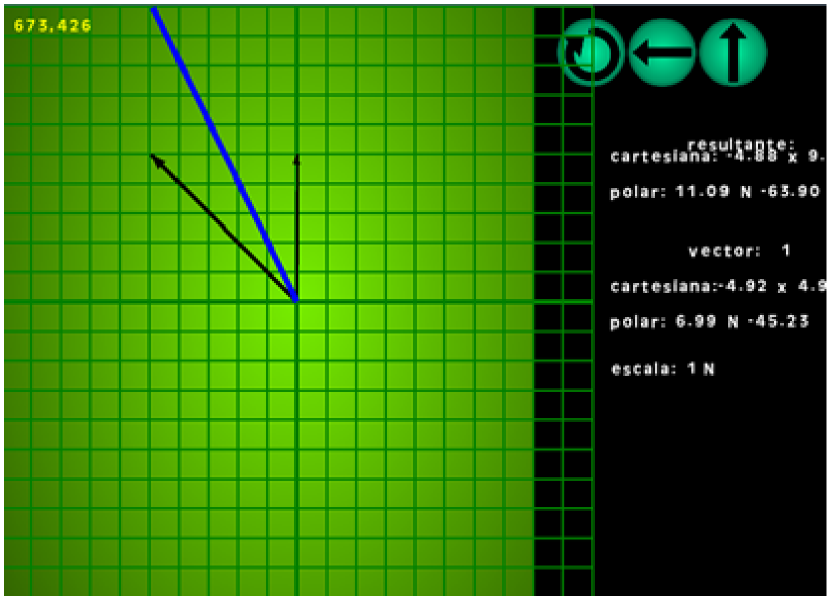


FIGURA- Ambiente de NEWTON-1

9.4. Descomposición y suma de vectores por el método analítico

Para realizar suma de vectores se puede emplear el método analítico. Si el vector está en su forma cartesiana bastará con sumar las componentes en "x" de cada vector para obtener la componente en "x" del vector resultante y se suman las componentes en "y" de cada vector para obtener la componente en "y" resultante.

De tal forma que si se tiene un conjunto de n vectores en el plano $\{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, ...\mathbf{S}_n\}$, donde el vector resultante es:

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$$

La componente en "x" estará dada por:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} S_{xi}$$

y la componente en "y" por:

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} S_{yi}$$

Ejemplo 2.11. *Realizar la sumatoria de los vectores:* $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ y $\mathbf{D} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

En la *Figura 2.19* se bosqueja el vector resultante empleando el método del polígono.

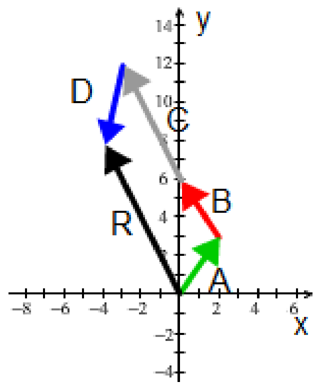


Figura 2.19: Suma de vectores por el método del polígono.

La sumatoria de las componentes en "x" y en "y" se calculan como:

$$R_x = \sum_{i=1}^{4} S_{xi} = (2 - 2 - 3 - 1) = -4$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{4} S_{yi} = (3 + 3 + 6 - 4) = 8$$

Por lo tanto, el vector resultante en su forma cartesiana es: $\mathbf{R} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$.

Para su representación polar se tiene:

$$|R| = \sqrt{|-4|^2 + |8|^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} \approx 8{,}94$$

Y para el ángulo:

$$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{8}{-4}\right) \approx -63{,}43^o$$

En este caso el vector se encuentra en el segundo cuadrante por lo que el ángulo es:

$$\theta = 180 + \theta_A \approx 180 + (-63{,}43) = 116{,}57^o$$

El vector en forma polar se representa como: $\mathbf{R} = (\sqrt{80}, 116{,}57^o)$.

Ejemplo 2.12. *Calcula el vector resultante de la suma de los siguientes vectores.*

$\mathbf{A} = -\,3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = (8, 45^o)$, $\mathbf{C} = (6{,}5, 75^o)$ y $\mathbf{D} = (3, 15^o)$

Puede notarse que tres de los vectores se encuentran en su forma polar. Es necesario se definan en su forma cartesiana para sumarlos por el método analítico.

La Tabla V nos permite colocar en una columna las componentes en "x" y en otra las componentes en "y" de los vectores.

Vector	Magnitud	Ángulo	Componente en "x"	Componente en "y"
A			-3	2
B	8	45	$8cos(45) \approx 5{,}66$	$8\sin(45) \approx 5{,}66$
C	6,5	75	$6{,}5cos(75) \approx 1{,}68$	$6{,}5\sin(75) \approx 6{,}28$
D	3	15	$3cos(15) \approx 2{,}9$	$3sin(15) \approx 0{,}78$
Sumatorias			$\sum_{i=1}^{4} S_{xi} = 7{,}24$	$\sum_{i=1}^{4} S_{yi} = 14{,}72$

Tabla V: Descomposición de vectores para su sumatoria.

Por lo que el vector resultante es:

$$\mathbf{R} = 7{,}24\mathbf{i} + 14{,}72\mathbf{j}$$

En la *Figura 2.20* se obtiene el vector resultante mediante el método geométrico del polígono.

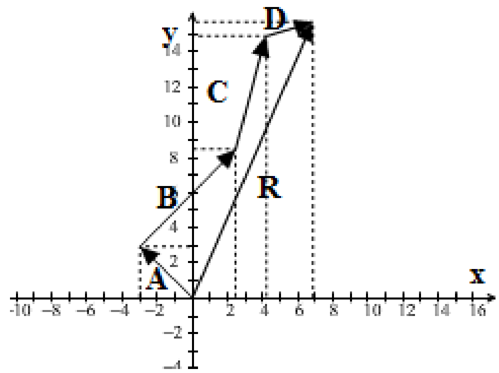


Figura 2.20: Sumatoria de vectores
por el método del polígono.

Para denotar el vector resultante en su forma polar se calcula el módulo:

$$|R| = \sqrt{|7{,}24|^2 + |14{,}72|^2} = \sqrt{52{,}42 + 216{,}68} \approx 16{,}4u$$

Y para el ángulo

$$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{14{,}72}{7{,}24}\right) \approx 63{,}81^o$$

El vector resultante en su forma polar es:

$$\mathbf{R} = (16{,}4, 63{,}81^o)$$

Ejercicios de Tarea.

1.- Suma los vectores empleando el método analítico. (Compara los resultados con el método geométrico)

a) $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

b) $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j}$

c) $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

d) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

e) $\mathbf{E} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{F} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$

2.- Realiza la suma de los vectores mediante el método analítico.

a) $\mathbf{A} = \mathbf{0{,}78i} + 3{,}65\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 2{,}56\mathbf{i} - 4{,}45\mathbf{j}$

b) $\mathbf{A} = \mathbf{3i} - 4\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -2{,}56\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = 4{,}67\mathbf{i} + 3{,}65\mathbf{j}$

c) $\mathbf{A} = -\,2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -\,\mathbf{i} + 3{,}5\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = -4{,}67\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

d) $\mathbf{E} = (7, 35^o)$, $\mathbf{F} = -\,2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

e) $\mathbf{B} = (5, 123^o)$, $\mathbf{C} = (3{,}5, -20^o)$

f) $\mathbf{A} = (4, 12{,}5^o)$, $\mathbf{B} = (5{,}32, 180^o)$, $\mathbf{C} = (14, 35^o)$

g) $\mathbf{A} = -\,2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = (5{,}4, 80^o)$, $\mathbf{C} = (10, -35^o)$

3.- Utiliza el software para verificar algunos de tus resultados.

9.5. Resultante de varias fuerzas concurrentes

Las fuerzas concurrentes son aquellas en las que sus líneas de acción se intersectan en un punto. En la *Figura 2.21* tres fuerzas son aplicadas a un cuerpo, para este caso las líneas de acción de las fuerzas intersectan al punto .^{o}", por tanto son concurrentes.

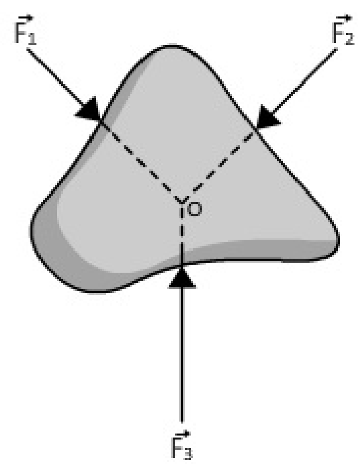


Figura 2.21: Fuerzas concurrentes.

Si dos personas jalan un cuerpo con diferente fuerza como se muestra en la *Figura 2.22*, se trata de un caso de fuerzas concurrentes ya que las cuerdas parten del mismo punto.

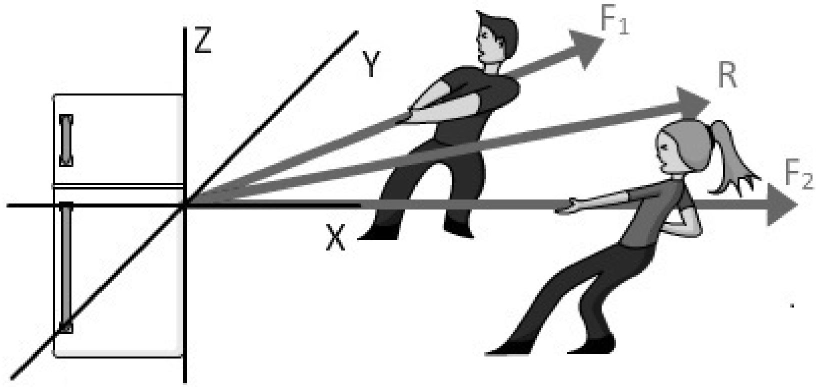


Figura 2.22: Aplicación de fuerzas concurrentes a un cuerpo.

Ejemplo 2.13. *Calcula la fuerza resultante, si* $\mathbf{F}_1 = (300, 40^o)N$ *y* $\mathbf{F}_2 = (350, 0^o)$ N en la *Figura 2.22.*

a) Por método gráfico

b) Por método analítico

La *Figura 2.23* bosqueja únicamente las fuerzas que experimenta el cuerpo. Nótese que no hay componente en el eje "z", lo que indica que no se está tratando de levantar el refrigerador, sólo se desplaza por el piso (x, y).

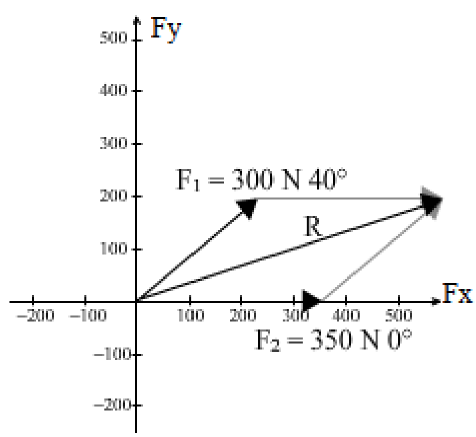


Figura 2.23: Diagrama de fuerzas.

Empleando el método analítico para suma de vectores se obtiene la Tabla VI.

Fuerza	Componente en "x" $F_x = \lvert\mathbf{F}\rvert \cos(\theta)$	Componente en "y" $F_y = \lvert\mathbf{F}\rvert\, sen(\theta)$
$\mathbf{F}_1 = (300, 40^o)$	$F_{1x} = 300 \cos 40^o = 229{,}81$	$F_{1y} = 300 sen 40^o = 192{,}83$
$\mathbf{F}_2 = (350, 0^o)$	$F_{2x} = 350 \cos 0^o = 350$	$F_{2y} = 350 sen 0^o = 0$
	$\sum F_x = 579{,}81$	$\sum F_y = 192{,}83$

Tabla VI: Sumatoria de vectores por método analítico

Por lo que la fuerza resultante es:

$$\mathbf{F}_R = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} = 579{,}81\mathbf{i} + 192{,}83\mathbf{j}\ N$$

Para expresar la fuerza en su forma polar, se tiene:

$$|\mathbf{F}_R| = \sqrt{\left|\sum F_x\right|^2 + \left|\sum F_y\right|^2} = \sqrt{579{,}81^2 + 192{,}83^2} = 611{,}034N$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sum F_y}{\sum F_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{192{,}83}{579{,}81}\right) = 18{,}39^o$$

Por lo que la fuerza resultante en su forma polar es:

$$\mathbf{F}_R = (611{,}034, 18{,}39^o)\ N$$

Ejemplo 2.14. *Calcula la fuerza resultante que experimenta el cuerpo mostrado en la Figura 2.24, si los módulos las fuerzas son:*

$|\mathbf{F}_1| = 225N, \quad |\mathbf{F}_2| = 180N, \qquad |\mathbf{F}_3| = 210N$

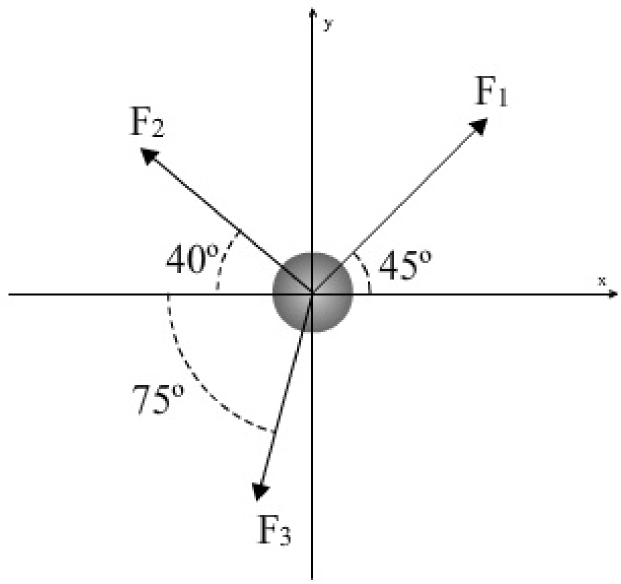


Figura 2.24: Ilustración para el Ejemplo 2.14.

En la Tabla siguiente se descomponen las fuerzas.

Fuerza	Componente en "x" $F_x = \|F\| \cos(\theta)$	Componente en "y" $F_y = \|F\| \, sen(\theta)$
$\mathbf{F}_1 = (225, 45^o)$	$F_{1x} = 225 \cos 45^o = 159{,}09$	$F_{1y} = 225 sen 45^o = 159{,}09$
$\mathbf{F}_2 = (180, 140^o)$	$F_{2x} = 180 \cos 140^o = -137{,}88$	$F_{2y} = 180 sen 140^o = 115{,}7$
$\mathbf{F}_3 = (210, 255^o)$	$F_{3x} = 210 \cos 255^o = -54{,}35$	$F_{3y} = 210 sen 255^o = -202{,}84$
	$\sum F_x = -33{,}14$	$\sum F_y = -28{,}05$

Sumatoria de vectores por método analítico

Por lo que la fuerza resultante es:

$$\mathbf{F}_R = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} = -\,33{,}14\mathbf{i} - 28{,}05\mathbf{j}$$

Para expresar la fuerza en su forma polar:

$$|\mathbf{F}_R| = \sqrt{\left|\sum F_x\right|^2 + \left|\sum F_y\right|^2} = \sqrt{|-33{,}14|^2 + |-28{,}05|^2} = 28{,}22N$$

$$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{\sum F_y}{\sum F_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-28{,}05}{-33{,}14}\right) = 40{,}24^o$$

Debido a que la fuerza se encuentra en el tercer cuadrante, el ángulo es:

$$\theta = \theta_A - 180 = 40{,}24 - 180 = -139{,}76$$

La fuerza resultante es:

$$\mathbf{F}_R = (28{,}22, -139{,}76)\ N$$

Ejercicio de Taller. *Encuentra la fuerza resultante que experimenta el cuerpo ilustrado en la Figura 2.25.*

Dónde:

$|F_1| = 3500N, \quad |F_2| = 1535N, \ |F_3| = 1123N$

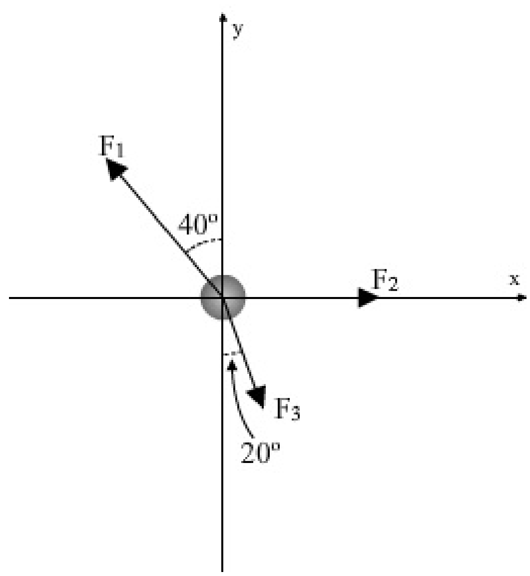


Figura 2.25: Ilustración para el Ejercicio de Taller

Ejercicios de Tarea

1.- Encontrar la fuerza resultante que experimentan los cuerpos que se ilustran.

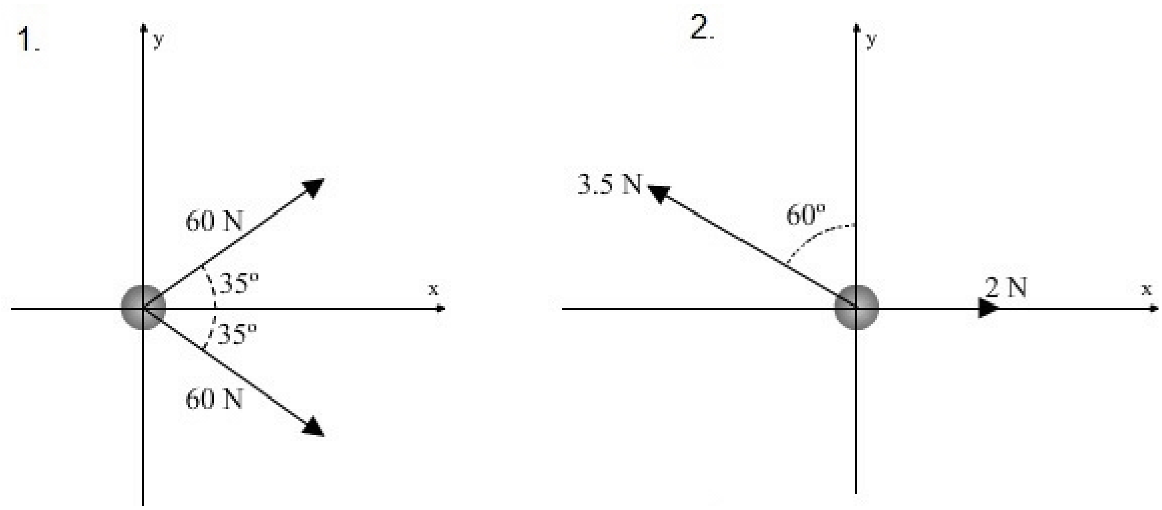


Figura 2.26(a): Ilustraciones para los ejercicios de Tarea.

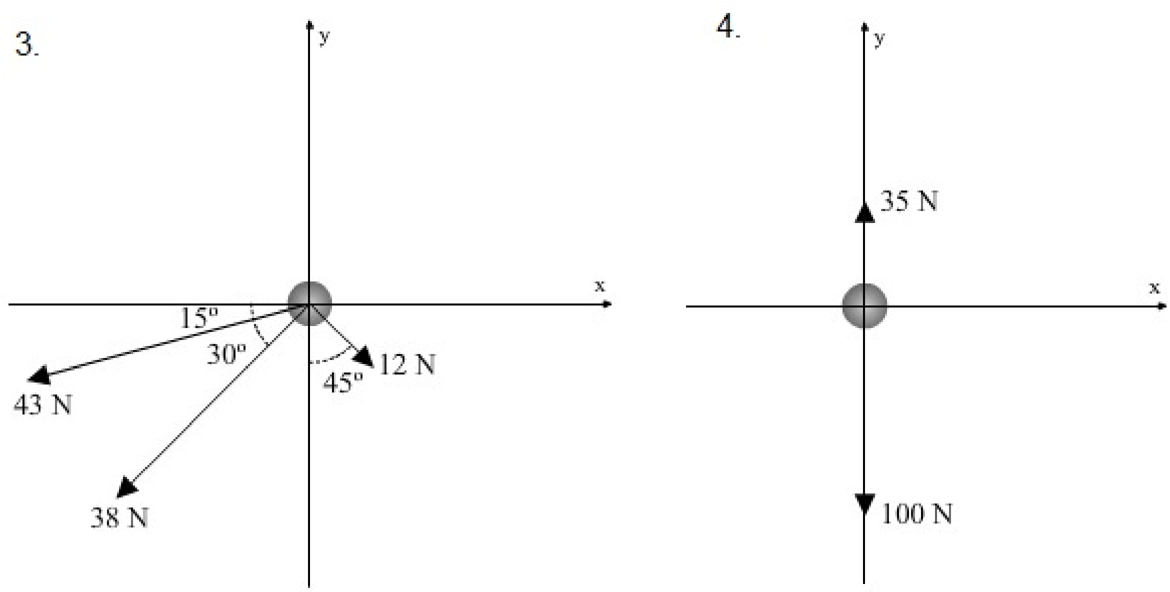


Figura 2.26(b): Ilustraciones para los ejercicios de Tarea.

2.- Usa el programa NEWTON-1 y aplica las fuerzas anteriores para que mediante el movimiento del cuerpo identifiques la dirección de la fuerza resultante.

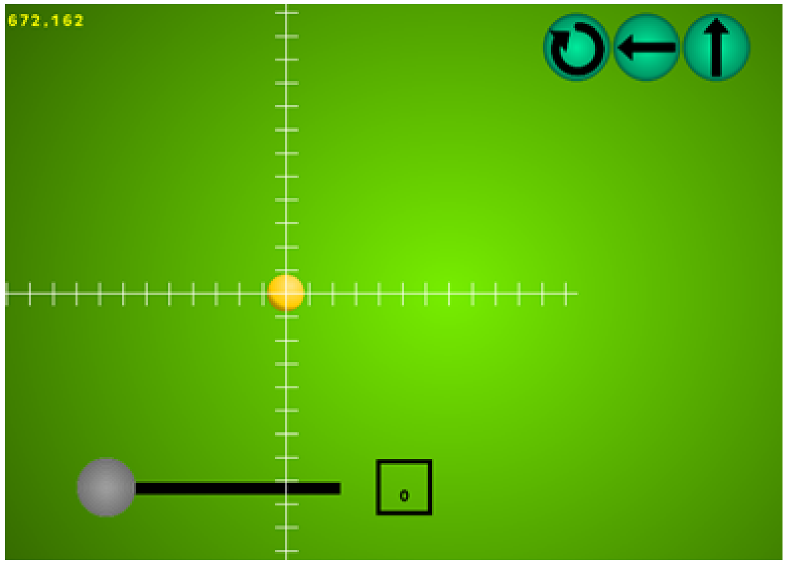


FIGURA- Ambiente de NEWTON-1

9.6. Producto punto de dos vectores

El producto punto de dos vectores $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$ da como resultado un valor escalar. Y se calcula mediante la siguiente ecuación:

$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = (\mathbf{A}_x B_x + A_y B_y)$

El producto punto puede interpretarse como la proyección de un vector sobre otro, como se ilustra en la *Figura 2.27.*

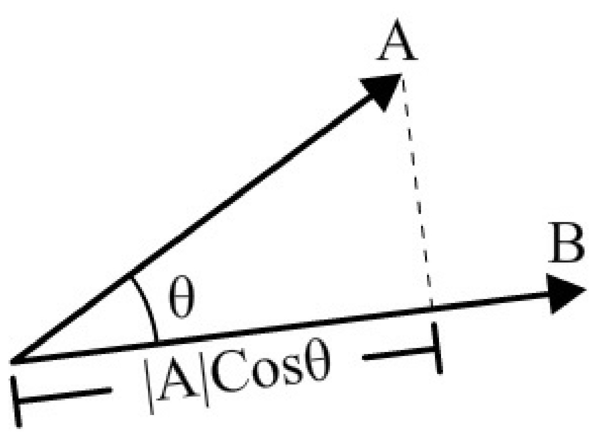


Figura 2.27: Proyección de un vector A sobre un vector B

Ejemplo 2.15. *Calcule el producto punto de los vectores* $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.
La *Figura 2.28* ilustra a los vectores, al ángulo formado entre ellos y a su proyección.

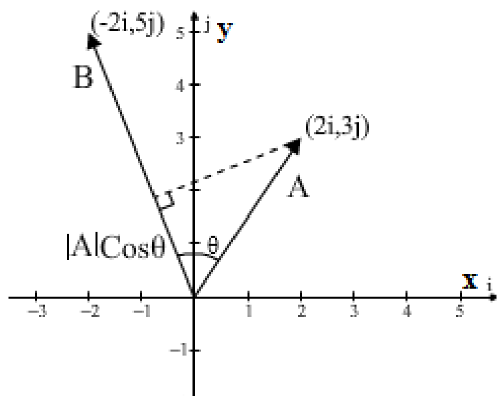


Figura 2.28: Ilustración para el
Ejemplo 2.15

Se tiene:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = (A_x B_x + A_y B_y) = (2 * -2 + 3 * 5) = -4 + 15 = 11$$

Otra relación útil del producto punto es la siguiente:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = |A|\,|B| \cos\theta$$

Efectuando un despeje se puede encontrar el ángulo θ si se calculan los módulos de los vectores. Se tiene:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}}{|A|\,|B|}$$

y

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}}{|A|\,|B|}\right)$$

Los módulos de los vectores son: $|A| = \sqrt{|2|^2 + |3|^2} \approx 3{,}605$, y $|B| = \sqrt{|-2|^2 + |5|^2} \approx 5{,}385$. Por lo tanto:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{11}}{(3{,}605)(5{,}385)}\right) = 55{,}48^{o}$$

Ejercicios de Taller

1.- Empleando el producto punto encuentra el ángulo formado entre los vectores $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

2.- Encuentra el producto punto de los vectores $\mathbf{A} = (12, 35^{o})$ y $\mathbf{B} = (5, 15^{o})$

9.7. Producto cruz de dos vectores

El producto cruz entre dos vectores $\mathbf{A}x\mathbf{B}$ da como resultado otro vector. El módulo de dicho vector se calcula con la ecuación:

$$|\mathbf{A}x\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\,sen\theta$$

donde θ es el ángulo entre los vectores.

Ejercicios de Taller: *Calcula el módulo del producto cruz entre los vectores que se muestran en la Figura 2.29.*

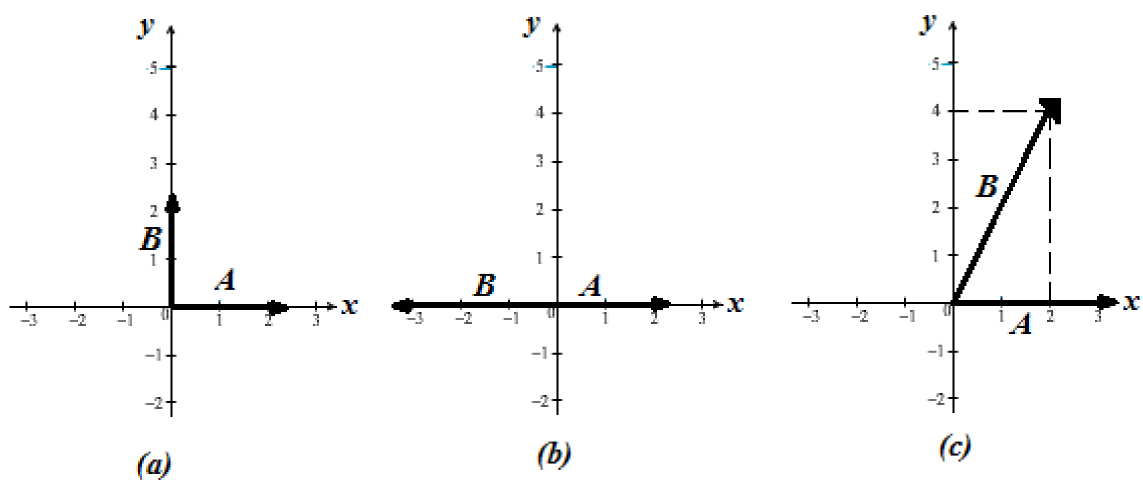


Figura 2.29: Ilustraciones para Ejercicios Taller.

Ejercicios de Tarea.

1.-Una persona se desplaza del punto A al B y del B al C en línea recta. Calcula:

a) La distancia recorrida

b) El desplazamiento

c) Un vector de desplazamiento que vaya del punto A al B

d) Un vector de desplazamiento que vaya del punto B al C

e) El vector resultante de **AB** *y* **BC**

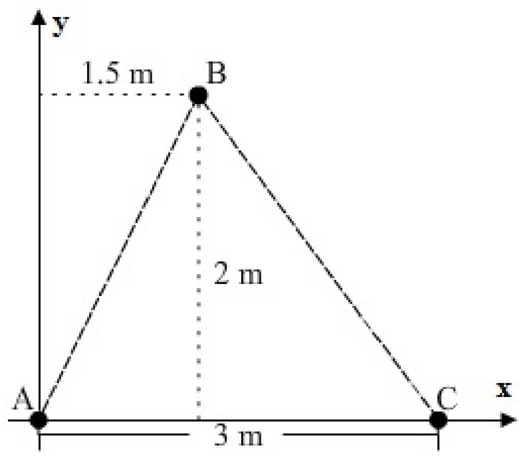


Figura 2.30: Ilustración para el problema 1.

2.- Calcula la fuerza resultante.

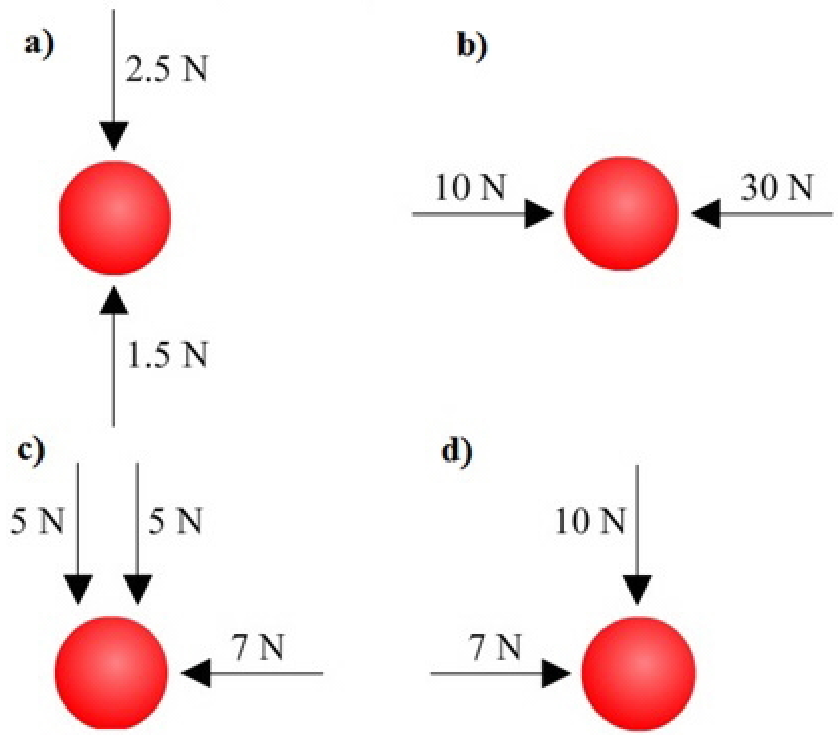


Figura 2.31: Ilustraciones para el problema 2.

3.- Para los siguientes vectores:

$\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{D} = (5, 180^o)$, $\mathbf{E} = (4{,}5, 110^o)$.

a) Realiza un bosquejo de cada vector en el plano cartesiano.

b) Expresar los vectores A, B y C en su forma polar

c) Expresar los vectores D y E en su forma cartesiana

d) Encontrar el vector resultante por el método geométrico:

d.1) A+B

d.2) B+C

d.3) A+C+D

e) Encontrar el vector resultante por el método analítico:

e.1) A+C

e.2) B+E

e.3) A+B+C+D+E

f) El producto punto de los vectores A y B. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

g) El producto punto de los vectores A y B. $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})$

h) El producto punto de los vectores A y B. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$

4.- La resultante de la suma del vector $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ *y el vector* $\mathbf{B}$ *es* $\mathbf{R} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. *Define el vector* $\mathbf{B}$.

5.-La resultante de la suma del vector $\mathbf{A} = (3{,}4, 35^o)$ *y el vector* $\mathbf{B}$ *es* $\mathbf{R} = (2, 90^o)$. *Define el vector* $\mathbf{B}$ *en su forma polar.*

6.- Encuentra la fuerza resultante que experimentan los cuerpos.

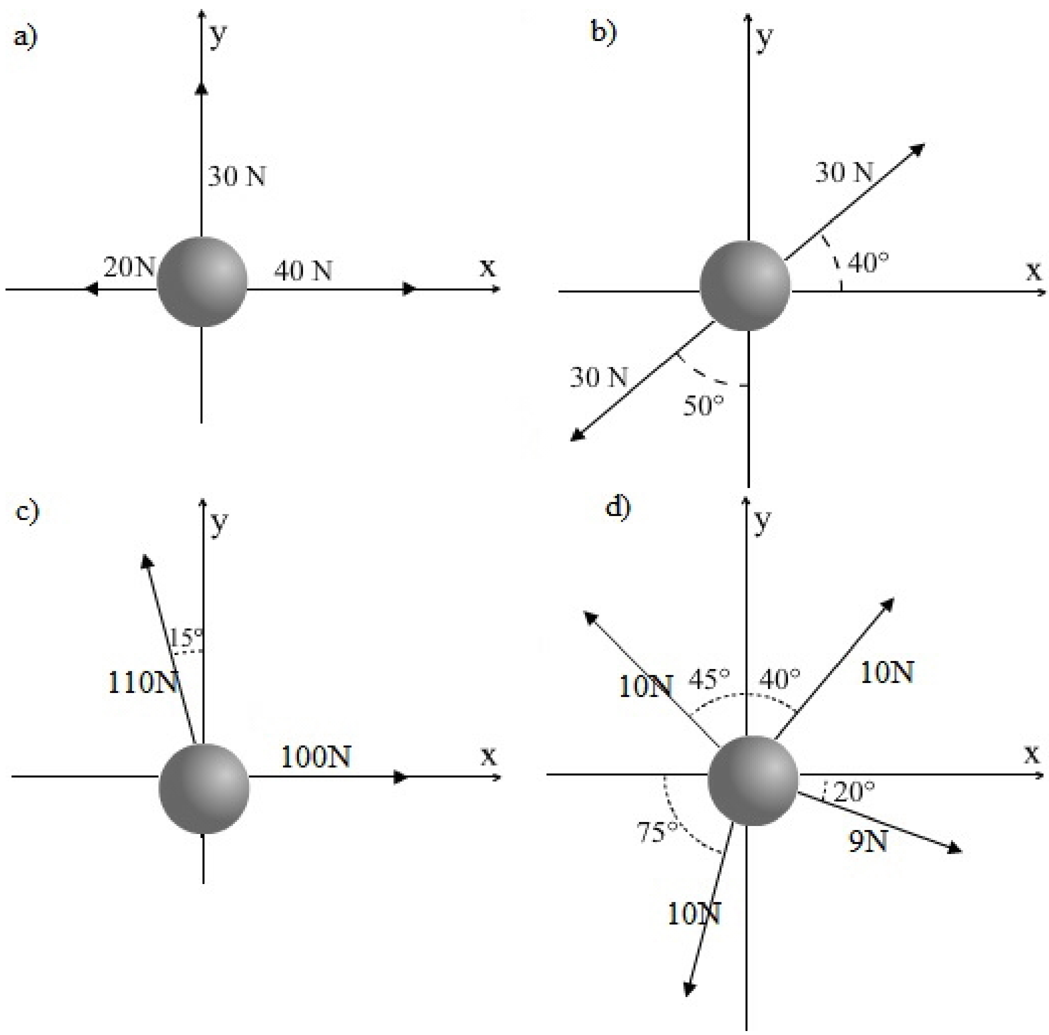


Figura 2.32: Ilustraciones para el problema 6.

7.- Emplea el software para identificar la fuerza resultante de los ejercicios anteriores. Escribe algunas conclusiones.

Capítulo 10

Cinemática.

La cinemática es la rama de la Física que se encarga del estudio del movimiento sin atender a las causas que lo producen. Es decir, estudia la posición, desplazamiento, velocidad y aceleración de un cuerpo o partícula sin analizar las fuerzas que provocaron el estado en el que se encuentra.

10.1. Movimiento en una dimensión.

Ejemplo 3.1. *La Figura 3.1 muestra dos casos del estado de la cinemática de una partícula. La posición inicial es el origen para un tiempo $t = 0s$ y se ilustra la posición final después de un tiempo $\Delta t = 1s$. Analiza posición, movimiento, desplazamiento y velocidad para cada caso.*

En el caso A la partícula se quedó en la misma posición.

En el caso B la partícula se movió 3m a la derecha.

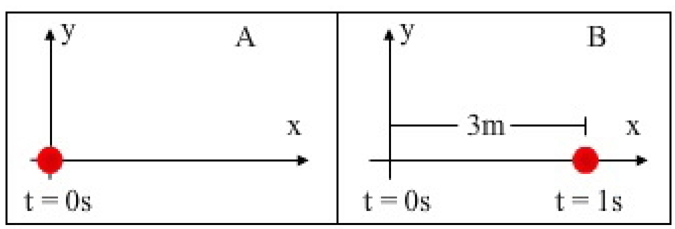


Figura 3.1: Movimiento de una partícula.

Movimiento: Propiedad que poseen los cuerpos cuando cambian su posición con respecto al tiempo.

En el caso B la partícula se encuentra en movimiento.

Posición: De acuerdo a un sistema de referencia nos indica la proximidad espacial con respecto al origen. Dicho de otra forma que tan lejos o cerca estamos del punto que hemos elegido como el origen. Es común emplear vectores de posición para ubicar alguna partícula o cuerpo.

En el caso A, la posición de la partícula para cualquier tiempo es $\mathbf{h} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\ m$.

En el caso B, la posición final después del segundo es $\mathbf{h}_f = 3\mathbf{i}\ m$.

Desplazamiento: Magnitud vectorial que indica la separación espacial entre la posición inicial y la final.

$$\textbf{Desplazamiento} = \textbf{Vector de Posición final} - \textbf{ Vector de Posición inicial}$$

Para A el desplazamiento $\mathbf{r} = 0\mathbf{i}m$

En el caso B, el desplazamiento es $\mathbf{r} = 3\mathbf{i}\ m$

Velocidad: Es una magnitud vectorial que indica la rapidez con la que se cambia la posición con respecto al tiempo.

$$\textbf{Velocidad} = \frac{\textbf{Desplazamiento}}{\textit{tiempo}}$$

En el caso A, $v = 0m/s$.

En el caso B, la magnitud de la velocidad es:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{3m}{1s} = 3m/s$$

Aceleración: Es una magnitud vectorial que indica la rapidez con la que cambia la velocidad con respecto al tiempo.

$$\textbf{Aceleración} = \frac{\textbf{Velocidad final} - \textbf{ Velocidad inicial}}{\textit{tiempo}}$$

Si el cuerpo no cambia su velocidad no se encuentra acelerado. En los casos se tiene:

Caso A: $a = 0m/s^2$

Caso B: No se sabe si el cuerpo se aceleró o si su velocidad fue uniforme.

Velocidad constante o uniforme

Al estudiar la cinemática de una partícula en una dimensión podemos calcular su posición, su velocidad y aceleración. Si la velocidad es constante o uniforme, implica que la partícula recorre la misma distancia para un lapso de tiempo determinado durante todo su recorrido.

Si una partícula se ubica en $x = 0m$ para $t = 0s$, (Ver *Figura 3.2*) y se desplaza a una velocidad constante de $v = 10m/s$. Se tiene que para cualquier tiempo $t \geq 0s$, el cuerpo se desplazará $10m$ cada segundo. La posición de la partícula no es la misma, cambia uniformemente.

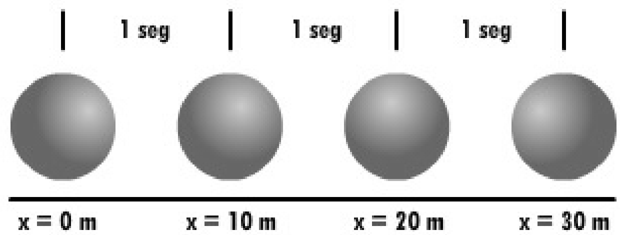


Figura 3.2: Cinemática de una partícula en movimiento a velocidad constante.

La siguiente tabla indica la posición de la partícula en función del tiempo.

Tiempo (s)	Posición (m), $x(t) = vt$
0	0
0.5	5
1	10
1.5	15
2	20
2.5	25
3	30
3.5	35
4	40

Posición de una partícula con respecto al tiempo.

Puede notarse de acuerdo a la posición como es que la partícula recorre 10 m cada segundo. La *Figura 3.3* muestra la gráfica de la posición dependiente del tiempo.

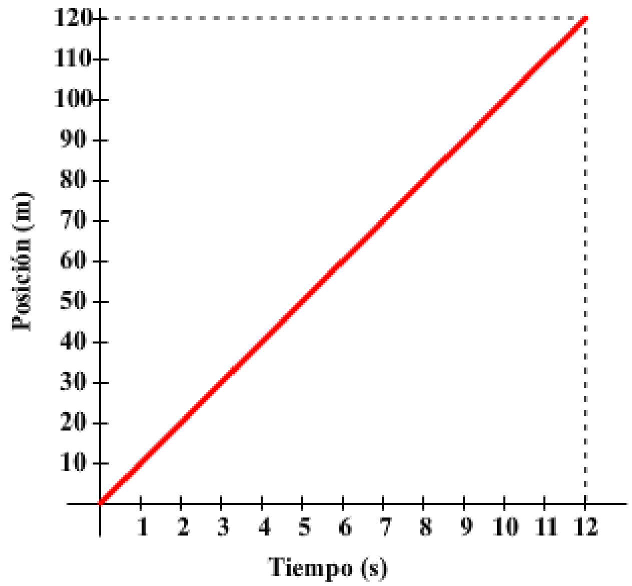


Figura 3.3: Posición con respecto al tiempo.

Ejemplo 3.2. *A partir de la Figura 3.3, determinar:*
a) ¿Cuánto tiempo se requiere para que la partícula tenga una posición de 120m?

$$t = \frac{d}{v} = \frac{120m}{10m/s} = 12s$$

b) ¿Cuál será el desplazamiento de la partícula después de 2 horas?

$$d = vt = (10m/s)(7200s) = 72000m = 72km$$

La partícula habrá recorrido 72 km en un lapso de tiempo de 2 horas.

Ejemplo 3.3. *Un automóvil recorre una distancia de 45 km en 30 minutos. Considera una velocidad constante. ¿A qué velocidad se desplazó el automóvil? Señala el resultado en m/s.*

$$v = \frac{d}{t} = \frac{45km}{30\,\text{mín}} = 1{,}5km/\,\text{mín}$$

Efectuando la conversión se tiene:

$$1{,}5km/\,\text{mín} * \left(\frac{1\,\text{mín}}{60s}\right) * \left(\frac{1000m}{1km}\right) = 25m/s$$

Ejemplo 3.4. *Un cuerpo se desplaza del punto A al punto B en 35 segundos. Y del punto B al punto C en 30 segundos. Considerando velocidad uniforme en AB y en BC. Calcular:*

a) El desplazamiento
b) La velocidad
c) Grafica $t, x(t)$ *y* $t, v(t)$ *en el intervalo* $[0, 65]$ *segundos.*

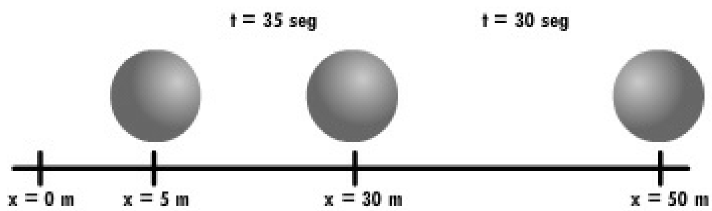


Figura 3.4: Ilustración para el Ejemplo 3.4.

Desplazamiento y velocidad para el trayecto AB.

$$|\textbf{Desplazamiento}| = |\textbf{Posición final}| - |\textbf{Posición inicial}| = \textbf{30m} - \textbf{5m} = \textbf{25m}$$

$$|\textbf{Velocidad}| = \frac{|\textbf{Desplazamiento}|}{\textit{tiempo}} = \frac{25m}{35s} = 0{,}714m/s$$

Desplazamiento y velocidad para el trayecto BC.

$$|\textbf{Desplazamiento}| = |\textbf{Posición final}| - |\textbf{Posición inicial}| = \textbf{50m} - \textbf{30m} = \textbf{20m}$$

$$|\textbf{Velocidad}| = \frac{|\textbf{Desplazamiento}|}{\textit{tiempo}} = \frac{20m}{30s} = 0{,}667m/s$$

Recordemos que los parámetros desplazamiento, velocidad y aceleración son vectores, por lo que también debe definirse la dirección para cada caso. El desplazamiento y la velocidad se definen como: $\mathbf{r} = 25\mathbf{i}\ m$, $\mathbf{v} = 0{,}714\mathbf{i}\ m/s$, señalando que el movimiento es en el eje de las abscisas o eje "x".

La *Figura 3.5* muestra la cinemática de la partícula considerando que la velocidad es uniforme en los trayectos AB y BC y que el cambio de velocidad fue instantáneo.

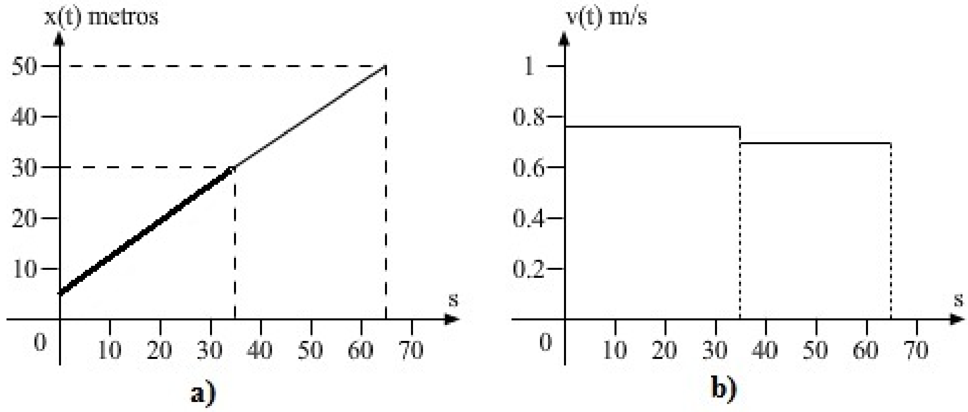


Figura 3.5: Gráficas de la posición y la velocidad dependientes del tiempo.

Ejercicios de Taller:

1.- De acuerdo a un sistema de referencia, la posición inicial de un cuerpo es de 200 m y la final de 300 m. ¿Cuál fue su desplazamiento?

2.- Una partícula se mueve en línea recta a una velocidad de 50 millas/hr. ¿Cuántos metros recorrerá en 5 minutos?

3.- Una partícula se desplaza a velocidad constante de 50 km/hr. ¿Cuál será su aceleración después de 10 segundos?

4.- Un cuerpo recorre una distancia de 320 kilómetros en 4 horas. Calcula la velocidad constante en m/s.

5.- El gráfico de la Figura 3.6 corresponde al de una partícula que se desplaza con velocidad uniforme. Determina:

a) La velocidad de la partícula

b) ¿Cuál será su posición para un tiempo $t = 12\ s$*?*

c) ¿En cuánto tiempo la partícula se desplazará $535\ m$*?*

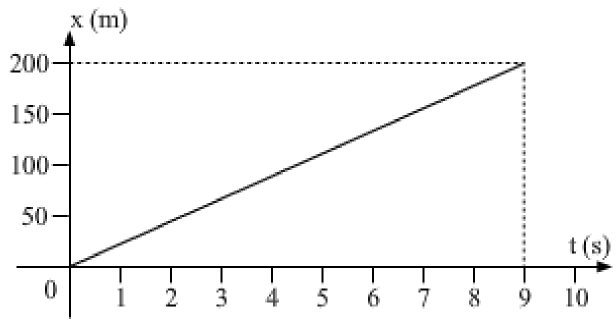


Figura 3.6: Gráfica de la posición con respecto al tiempo para el problema 5.

Ejemplo 3.5. Analicemos el desplazamiento y la velocidad de un alumno que finalizó su clase y va hacia su casa. Mientras el alumno se encuentra sentado en su mesabanco la posición que tiene es fija, por lo que su movimiento y desplazamiento son nulos. Al finalizar la clase el alumno tiene que caminar para llegar a su automóvil o al paradero del autobús, veamos el caso en el que se desplaza en autobús. Al llegar al paradero tendrá que esperar su camión. Y al abordarlo recorrerá su trayecto para después de cierto tiempo bajar y caminar hasta su casa. La *Figura 3.7* muestra la velocidad del estudiante con respecto a la posición. El tiempo de trayecto es de 1 hora y el punto que corresponde a 0 kilómetros es su lugar en el mesabanco, la distancia que hay a su casa es de 20 km.

Para analizar detenidamente el trayecto del alumno se divide su desplazamiento en cuatro etapas de interés.

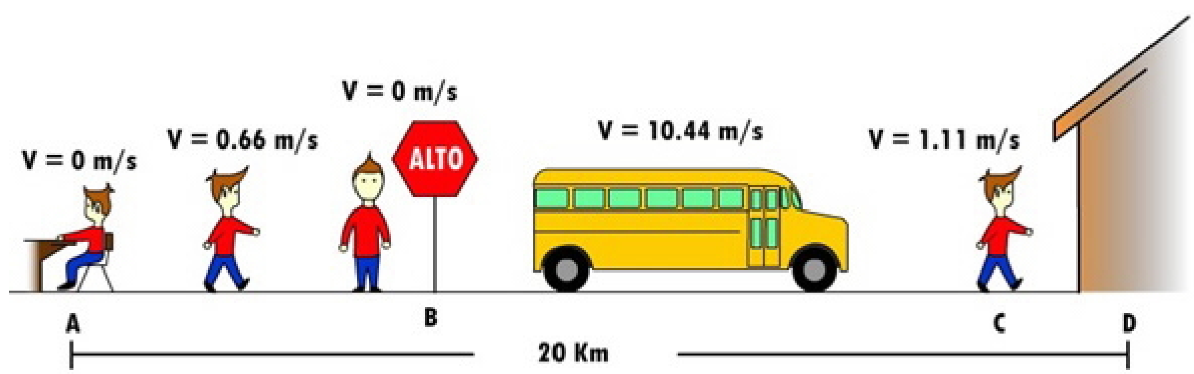


Figura 3.7: Cinemática de un estudiante que se desplaza de la escuela a su casa.

Primera etapa. *Trayecto salón de clase-parada de autobús.* La distancia recorrida AB fue de 200 m en un tiempo de 5 minutos. Se puede calcular la velocidad que llevó durante el trayecto.

$$v = \frac{d}{t} = \frac{200m}{5\,\text{mín}} = 40m/\,\text{mín}$$

Si se efectúa la conversión a m/s:

$$40m/\,\text{mín} * \left(\frac{1\,\text{mín}}{60s}\right) = 0{,}66m/s$$

Como la velocidad es considerada constante, la aceleración durante el trayecto es cero.

Segunda etapa. *Esperando el autobús.* El desplazamiento es igual a cero. En el tiempo de espera de 10 minutos tal vez hubo movimiento, cuando una persona espera un camión suele moverse un poco de un lado a otro pero sin alejarse del punto de espera. Por tanto en este caso se concluye que el desplazamiento, la velocidad y la aceleración son iguales a cero.

Tercera etapa. *Trayecto autobús- cerca de casa.* El desplazamiento efectuado por el alumno en autobús (BC) fue de 18,8 km en un tiempo de 30 min. Se aproxima que el autobús lleva velocidad constante. Sin embargo eso implicaría que el alumno debió haber subido y bajado del camión mientras éste estaba en movimiento y que además todos los semáforos los encontró en verde. La velocidad del autobús es:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{18800m}{30\,\text{mín}} = 626{,}67m/\,\text{mín}$$

O bien, efectuando las conversiones se tiene:

$$626{,}67m/\,\text{mín} * \left(\frac{1\,\text{mín}}{60s}\right) = 10{,}44m/s$$

$$626{,}67m/\,\text{mín} * \left(\frac{60\,\text{mín}}{1hr}\right) * \left(\frac{1km}{1000m}\right) = 37{,}6km/hr$$

Cuarta etapa: *Parada de autobús cerca de casa- a casa.* El desplazamiento que corresponde a una distancia de $1km$ (CD), lo realizó caminando en un tiempo de $15min$. Por lo tanto, se calcula la velocidad constante:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{1000}{15\,\text{mín}} = 66{,}66m/\,\text{mín} * (\frac{1\,\text{mín}}{60s}) = 1{,}11m/s$$

Las *Figuras 3.8 y 3.9* muestran la posición y la velocidad del alumno respectivamente en el trayecto escuela-casa.

Posición:

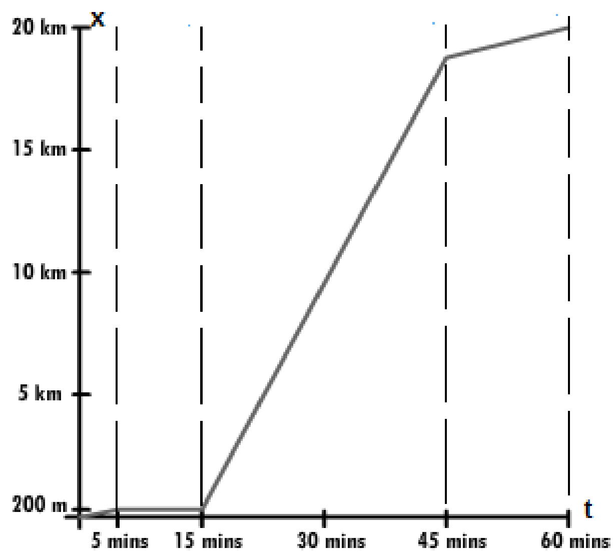


Figura 3.8: Posición del estudiante con respecto al tiempo.

Velocidad:

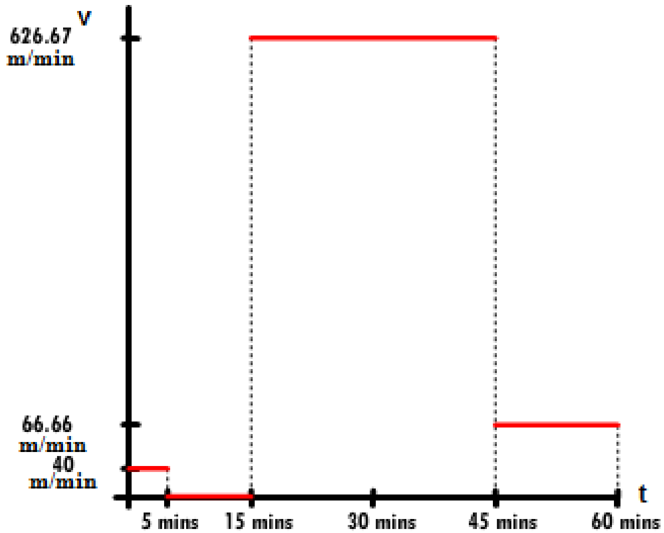


Figura 3.9: Velocidad a la que viaja el estudiante
con respecto al tiempo.

Ejercicio de Taller.

1.- La Figura 3.10 corresponde a la posición de un cuerpo que se desplaza en una dimensión en un intervalo de tiempo $[0, 10]seg$. *Calcula:*

a) El desplazamiento para los siguientes intervalos de tiempo: Recuerda que:

$$Desplazamiento = posición\ final - posición\ inicial.$$

a.1) $[0, 2]seg$
a.2) $[2, 5]seg$
a.3) $[5, 8]seg$
a.4) $[8, 10]seg$
a.5) $[0, 10]seg$

b) ¿Cuál es la interpretación de un desplazamiento negativo?

c) La velocidad a la que desplaza el cuerpo para los intervalos $[0, 2]seg$, $[2, 5]seg$, $[5, 8]seg$, $[8, 10]seg$.

d) Realiza el gráfico t,v(t) para el cuerpo

e) ¿Cómo se interpreta una velocidad negativa?

f) Con el gráfico de la posición y la velocidad describe el movimiento del cuerpo.

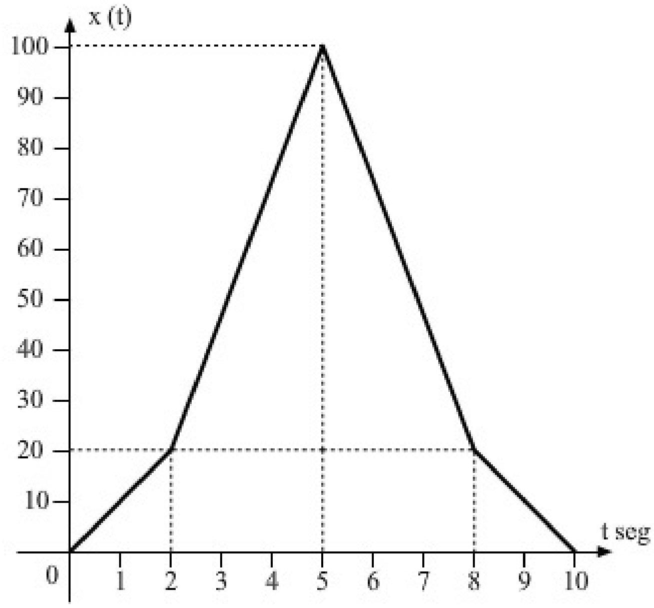


Figura 3.10: Posición de una partícula con respecto al tiempo. Problema 1

2.- La Figura 3.11 corresponde a la posición de un cuerpo que se desplaza en una dimensión en un intervalo de tiempo $[0, 10]seg$. *Calcula:*

a) El desplazamiento para los siguientes intervalos de tiempo:

a.1) $[0, 3]seg$

a.2) $[3, 6]seg$

a.3) $[6, 10]seg$

a.4) $[0, 10]seg$

b) La velocidad a la que desplaza el cuerpo para los intervalos $[0, 3]seg$, $[3, 6]seg$, $[6, 10]seg$, $[0, 10]seg$.

c) Realiza el gráfico t,v(t) para el cuerpo.

d) Con el gráfico de la posición y la velocidad describe el movimiento del cuerpo.

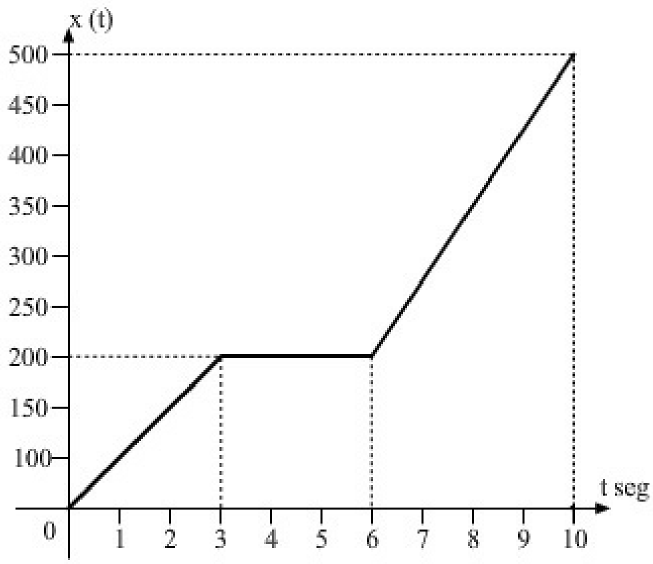


Figura 3.11: Posición de una partícula con respecto al tiempo. Problema 2.

Los movimientos de los cuerpos generalmente son en las tres dimensiones espaciales. Sin embargo, analizar el movimiento en una sola dimensión es el paso inicial para comprender la dinámica de una partícula en las tres dimensiones.

Ejercicios de Tarea

1.-¿Qué es la cinemática?

2.- ¿Qué es el movimiento en una dimensión?

3.- ¿Cuáles son los parámetros con los que puedo modelar el movimiento de un cuerpo o partícula?

4.- ¿Qué es el desplazamiento?

5.- ¿Qué es la velocidad?

6.- ¿Qué es la aceleración?

7.- ¿Cuál es la velocidad de un cuerpo que no varía su posición con respecto al tiempo?

8.- *¿Cuál es la aceleración de un cuerpo que no varía su velocidad con respecto al tiempo?*

9.- Una partícula se desplaza en una dimensión espacial (eje "x"), como se muestra en la Figura 3.12. Considera velocidad constante de AB, de BC y de CD, así como cambios de velocidad instantáneos. Calcular:

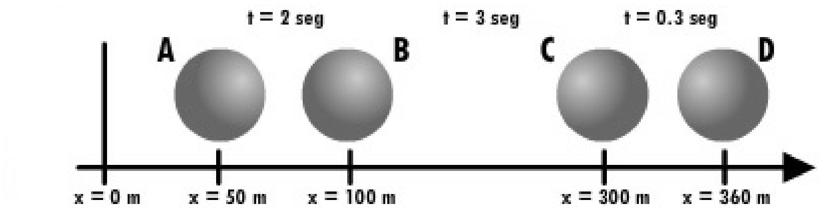


Figura 3.12: Desplazamiento unidimensional de una partícula.

a) La velocidad en el trayecto AB

b) La velocidad en el trayecto BC

c) La velocidad en el trayecto CD

e) Grafica t, v(t)

10.*El siguiente gráfico (Figura 3.13) corresponde a la posición de un cuerpo que se desplaza en una dimensión en un intervalo de tiempo* $[0,5]seg$. *Calcula:*

a) ¿Cuál es la posición inicial del cuerpo? ¿Cuál es la posición final?

b) El desplazamiento para los siguientes intervalos de tiempo:

b.1) $[0,1{,}5]seg$

b.2) $[1{,}5,3]seg$

b.3) $[3,4]seg$

b.4) $[4,5]seg$

b.5) $[0,5]seg$

c) La velocidad a la que desplaza el cuerpo para los intervalos $[0,1{,}5]seg$, $[1{,}5,3]seg$, $[3,4]seg$, $[4,5]seg$.

d) Realiza el gráfico t,v(t) para el cuerpo.

e) Con el gráfico de la posición y la velocidad describe el movimiento del cuerpo.

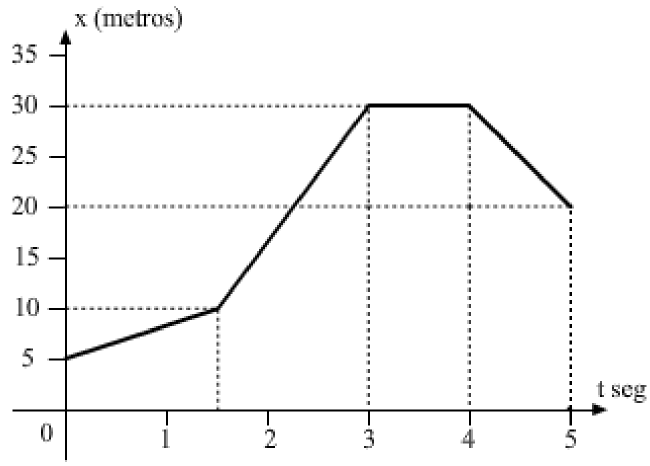


Figura 3.13: Posición con respecto al tiempo.
Problema 10.

11.*El gráfico de la Figura 3.14 corresponde a la velocidad de un cuerpo que se desplaza en una dimensión en un intervalo de tiempo* $[0, 10]seg$. *Calcula:*

a) El desplazamiento para los siguientes intervalos de tiempo:

a.1) $[0, 3]seg$

a.2) $[3, 7]seg$

a.3) $[7, 10]seg$

a.4) $[0, 10]seg$

b) Grafica t,x(t) para el cuerpo.

c) Con el gráfico de la posición y la velocidad describe el movimiento del cuerpo.

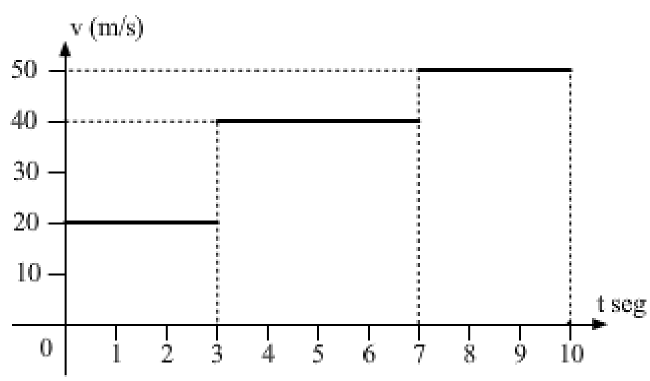


Figura 3.14: Velocidad con respecto al tiempo.
Problema 11.

10.2. Cinemática de una partícula y velocidad promedio e instantánea

Si viajamos en automóvil de Mexicali a Ensenada, la velocidad no será uniforme en todo el trayecto, ya que en ocasiones aceleramos, desaceleramos, nos detenemos en el semáforo, disminuimos la velocidad en zona escolar o nos detenemos en un autoservicio por nuestra bebida favorita. De tal forma que se puede tener una velocidad distinta para cada instante de tiempo. Así, si elijo algunos instantes de tiempo para monitorear la velocidad ésta puede ser de 80 km/hr, 33 km/hr o de 0 km/hr; para cada instante de tiempo se puede monitorear la velocidad. (Ver *Figura 3.15*)

La velocidad promedio se calcula con el cociente de la distancia total recorrida entre el tiempo total de recorrido. Si el trayecto a Ensenada dura 180 min y considerando una distancia recorrida de 245 km, la velocidad promedio se calcula como:

$$Velocidad\ promedio = \frac{Dis\tan cia\ total\ recorrida}{Tiempo\ total\ de\ recorrido} = \frac{245\ km}{3\ \mathrm{hr}} = 81{,}67\frac{km}{hr}$$

Si el cuerpo viajara a velocidad constante de $81{,}67\dfrac{km}{hr}$ también llegaría a su destino en 3 hr.

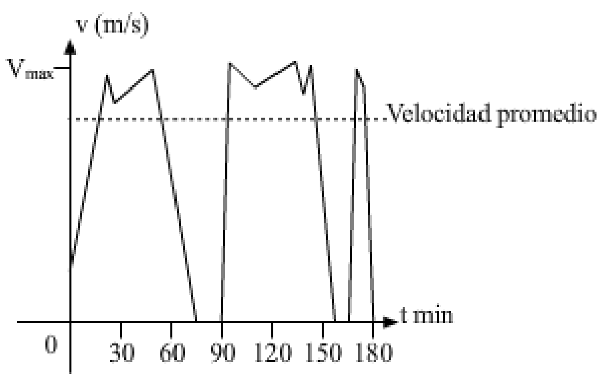


Figura 3.15 : Velocidad instantánea con respecto al tiempo de un automovilista.

Ejemplo 3.6. *Un automóvil se desplaza en línea recta con velocidad constante* $v_a = 60km/hr$ *durante 30 min. Después frena "bruscamente"hasta mantener una velocidad constante de* $v_b = 50km/hr$ *y viaja a esa velocidad por 20 minutos.*

Calcular:

a) La distancia recorrida cuando se desplaza a $v_a = 60km/hr$

b) La distancia recorrida cuando se desplaza a $v_b = 50km/hr$

c) La velocidad promedio del automóvil en los 50 minutos de viaje.
La *Figura 3.16* muestra la posición del automóvil con respecto al tiempo.

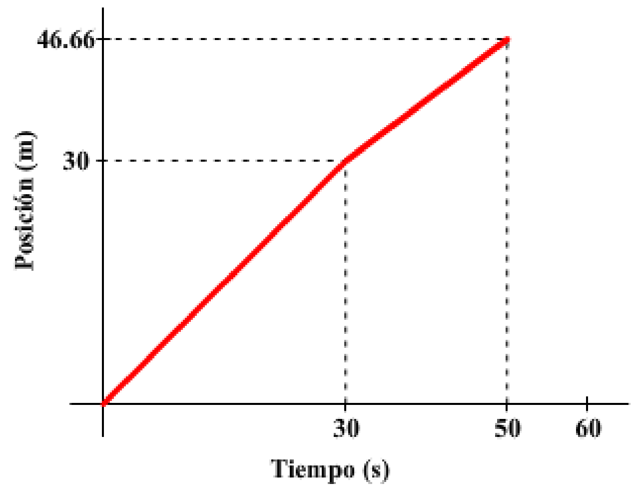


Figura 3.16: Posición con respecto al tiempo.

Para calcular la distancia recorrida cuando lleva una velocidad $v_a = 60km/hr$, se tiene:

$$d_a = v_a t = (60km/hr)(0{,}5hr) = 30km$$

Cuando disminuye la velocidad, recorre en los 20 minutos una distancia de:

$$d_b = v_b t = (50km/hr)(0{,}333hr) \approx 16{,}66km$$

Por tanto la distancia total recorrida es de $d_T = d_a + d_b = 30 + 16{,}66 = 46{,}66km$

Dicha distancia se recorre en un lapso de 50 min, equivalentes a 0.833 horas. Por lo que la velocidad promedio es de

$$v = \frac{d_T}{t_T} = \frac{46{,}66km}{0{,}833hr} = 56{,}01km/hr$$

Si el resultado se quiere expresar en m/s, se efectúa la conversión correspondiente:

$$56{,}01km/hr * \left(\frac{1000m}{1km}\right) * \left(\frac{1hr}{3600s}\right) = 15{,}55m/s$$

Si el automóvil viaja a su velocidad promedio $v = 56{,}01 km/hr$ durante los 50 min, recorrerá la misma distancia que en el caso donde viaja a dos velocidades en su trayecto.

Ejemplo 3.7 *La Figura 3.17 muestra el desplazamiento de una partícula con respecto al tiempo. Calcular:*

a) La velocidad de la partícula en la región 1

b) La velocidad de la partícula en la región 2

c) La velocidad de la partícula en la región 3

d) La velocidad promedio de la partícula

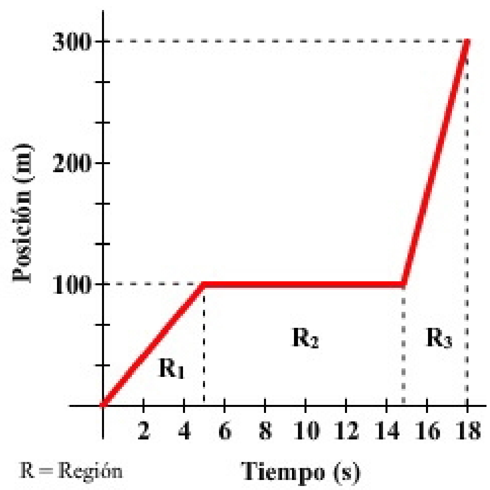


Figura 3.17: Posición con respecto al tiempo.

a) En la primera etapa la partícula recorre una distancia de 100 m en un tiempo de 5 segundos por lo que su velocidad es:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{100m}{5s} = 20m/s$$

b) En la segunda etapa se tiene un lapso de 10 segundos en los que la partícula tiene la misma posición de 100 m. Como no cambió su posición la velocidad es de 0 m/s.

c) En la tercera etapa se recorre una distancia de 200 m en lapso de tiempo de 3 segundos. La velocidad es:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{200m}{3s} \approx 66{,}66m/s$$

d) La velocidad promedio se calcula como la distancia total recorrida entre el tiempo total. Para este caso:

$$v = \frac{d_T}{t_T} = \frac{300m}{18s} \approx 16{,}66m/s$$

La *Figura 3.18* muestra la velocidad instantánea con respecto al tiempo y también la velocidad promedio con una línea punteada.

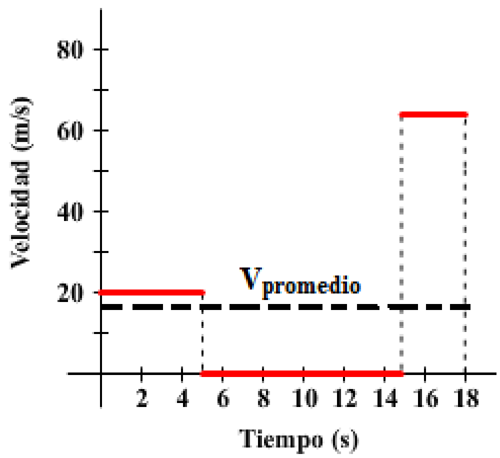


Figura 3.18: Velocidad con respecto al tiempo.

Ejercicios de Taller.

1.- Un cuerpo se desplaza en una dimensión con una velocidad constante de $v = 12{,}5m/s$. Calcular su desplazamiento para un tiempo:

a) $t = 5s$

b) $t = 10s$

c)$t = 13s$

2.- Una persona corre 400 metros en 48.89 segundos. Calcula su velocidad.

3.- Una partícula se desplaza a una velocidad $v = 30m/s$ en dirección al Oeste. ¿En cuánto tiempo se desplazará 570m?

4.- Una lancha viaja a velocidad constante de $v = 30millas/hr$ en dirección al Este. Calcular:

a) Su desplazamiento a los 10 minutos de iniciado el movimiento.

b) Su desplazamiento después de 2 horas.

c) ¿En cuánto tiempo se desplazará 90 kilómetros?

5.- Las siguientes gráficas muestran la posición de una partícula con respecto al tiempo. Encontrar la velocidad a la que se desplaza cada una.

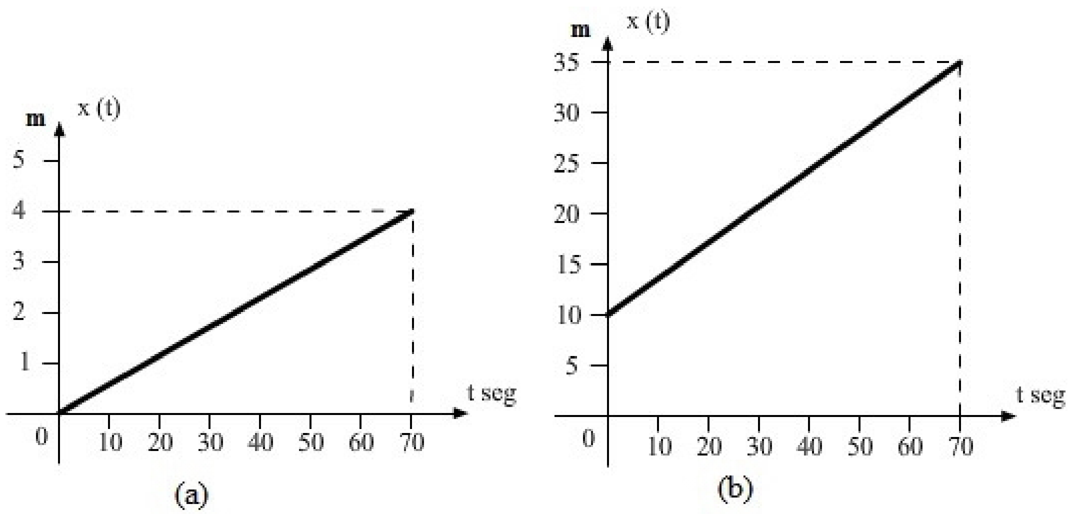


Figura 3.19: Posición con respecto al tiempo. Problema 5.

6.- De la Figura 3.11, calcular la velocidad promedio de la partícula.

7.-De la Figura 3.12, calcular la velocidad promedio de la partícula.

10.3. Movimiento en una dimensión con aceleración constante

Pregunta para analizar y discutir

1.-Todo cuerpo en movimiento, ¿está acelerado?

....

Para que el cuerpo esté en movimiento requiere que su velocidad sea distinta de cero, dicho de otra forma debe de estar cambiando de posición con respecto al tiempo. Sin embargo, esta velocidad puede ser constante. Un cuerpo se encuentra acelerado cuando su velocidad cambia con respecto al tiempo. Si un automóvil se desplaza a velocidad constante de $50km/hr$ se puede asegurar que hay movimiento. Sin embargo, para saber si el vehículo está acelerando o desacelerando debo monitorear su velocidad y ver si ésta ha sufrido un cambio.

Si verifico el velocímetro después de un tiempo determinado Δt y la velocidad que se registra sigue siendo de $50km/hr$, se puede concluir que en ese lapso de tiempo el vehículo no estaba acelerado.

Si después del lapso de tiempo Δt, la velocidad registrada es de $70km/hr$, indica que hay una aceleración, ya que la velocidad ha variado. En este caso indica que el conductor piso el acelerador, ya que la velocidad se ha incrementado.

Para calcular cual es la aceleración del cuerpo se emplea la ecuación:

$$a = \frac{V_f - V_i}{\Delta t}$$

Ejemplo 3.8. Si consideramos que $\Delta t = 70s$, indicando que el vehículo pasó de 50 km/hr a 70km/hr en 70 segundos. Se tiene una aceleración de:

$$a = \frac{70km/hr - 50km/hr}{0{,}01944hr} = 1028{,}8km/hr^2$$

Generalmente la aceleración se expresa en m/s^2, efectuando la conversión se tiene:

$$1028{,}8km/hr^2 * \left(\frac{1000m}{1km}\right)\left(\frac{1hr}{3600s}\right)\left(\frac{1hr}{3600s}\right) = 0{,}0794m/s^2$$

Si la aceleración es positiva indica que la velocidad del cuerpo se incrementó.

Estudiemos ahora el caso en el que el vehículo se desplaza a 50 km/hr pero después de 70 segundos la velocidad registrada es de 42 km/hr. En este caso el vehículo experimenta una desaceleración, lo que indica que el conductor frenó o que la fricción está deteniendo el vehículo. Para calcular el valor de la aceleración se tiene:

$$a = \frac{42km/hr - 50km/hr}{0{,}01944hr} = -411{,}52km/hr^2$$

En m/s^2, se tiene

$$-411{,}52km/hr^2 * \left(\frac{1000m}{1km}\right)\left(\frac{1hr}{3600s}\right)\left(\frac{1hr}{3600s}\right) = -0{,}03175m/s^2$$

El signo negativo indica que se trata de una desaceleración.

En un cuerpo acelerado, no se recorren distancias iguales en tiempos iguales. En la *Figura 3.20* se concluye que la partícula está acelerada.

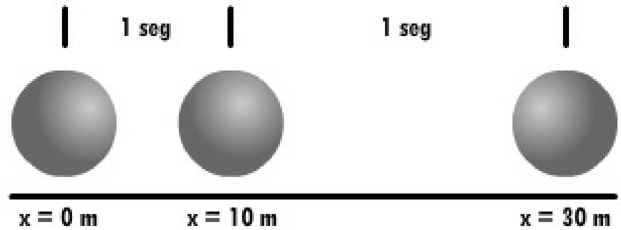


Figura 3.20: Partícula acelerada.

Ejemplo 3.9. *Una partícula en movimiento unidimensional se acelera a* $3m/s^2$. *Analiza aceleración, velocidad y posición de la partícula si parte del reposo.*

Recordemos que si un cuerpo está acelerado, su velocidad está variando con respecto al tiempo. En este caso como la aceleración es positiva la velocidad incrementa $3m/s$ cada segundo. Para un $t = 0s$ la velocidad es $v = 0m/s$, para $t = 1s$ se tendrá una velocidad de $v = 3m/s$; para $t = 2s$, $v = 6m/s$; para $t = 3s$, $v = 9m/s$; y así sucesivamente.

Si la velocidad está incrementando quiere decir que el cuerpo está cambiando de posición con una mayor rapidez.

La *Figura 3.21* muestra la posición, la velocidad y la aceleración con respecto al tiempo.

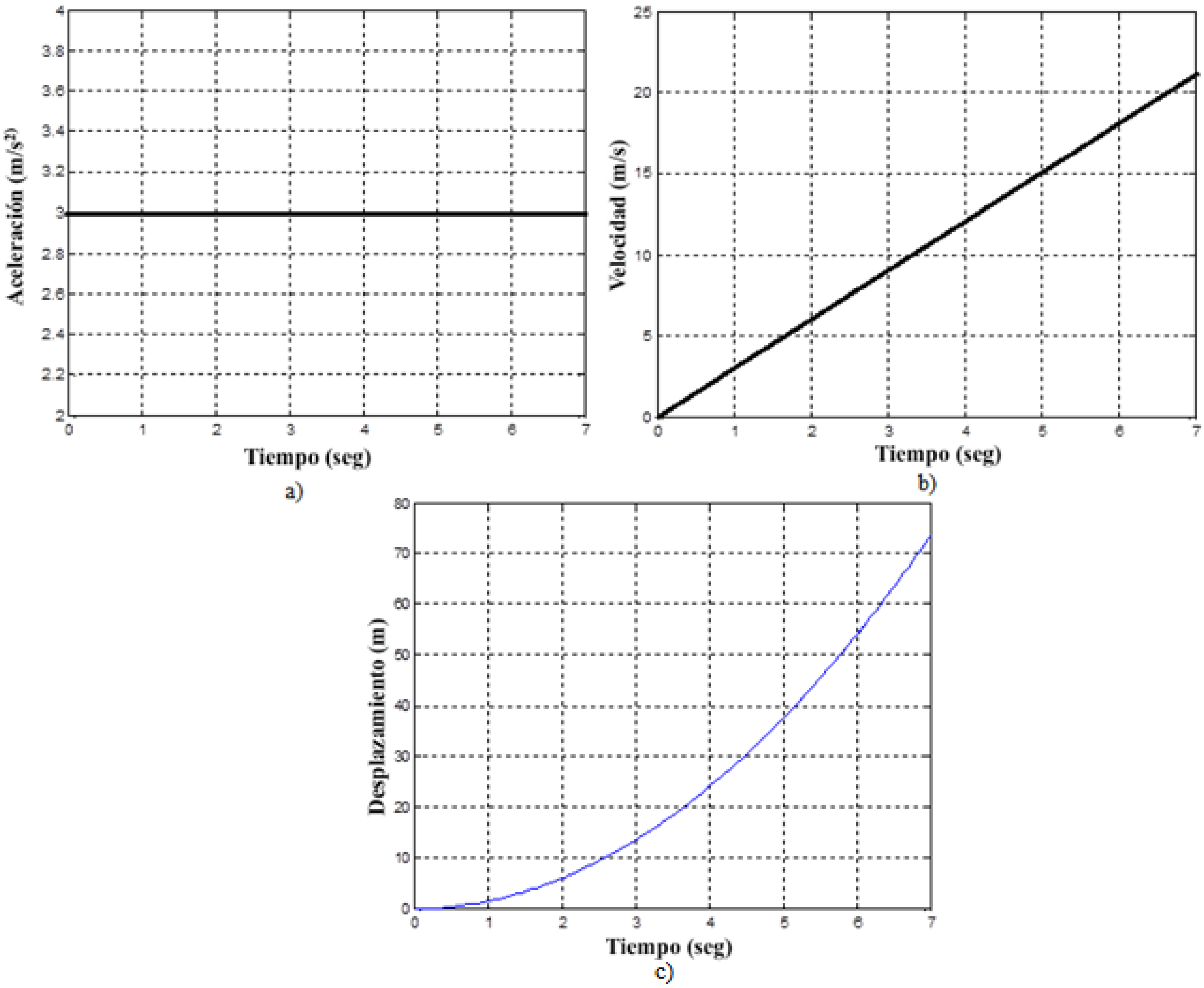


Figura 3.21: Aceleración, velocidad y posición de una partícula con respecto al tiempo.

Ejemplo 3.10. *Una partícula tiene una velocidad de 50 m/s, experimenta una aceleración constante que la lleva a incrementar su velocidad a 110 m/s en un tiempo de 25 segundos.*

a)¿Cuál fue la aceleración de la partícula?

b) Calcula la velocidad de la partícula después de 10 segundos de iniciada la aceleración constante.

La partícula incrementó su velocidad de 50 m/s a 100 m/s. Para calcular la aceleración se emplea la ecuación:

$$a = \frac{V_f - V_i}{t}$$

Sustituyendo los datos, se tiene:

$$a = \frac{110m/s - 50m/s}{25s} = 2{,}4m/s^2$$

Lo que implica que la partícula incrementó su velocidad 2,4 m/s cada segundo. La *Figura 3.22* muestra la velocidad de la partícula con respecto al tiempo.

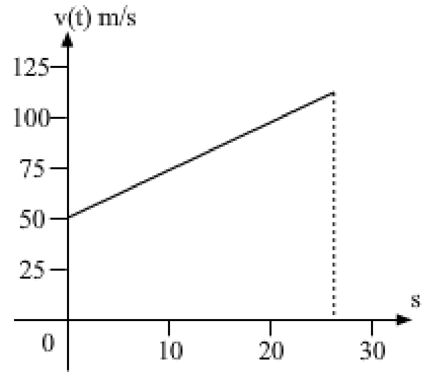


Figura 3.22: Velocidad de la partícula con respecto al tiempo.

b) Calcula la velocidad de la partícula después de 10 segundos de iniciada la aceleración constante. Para hacer el cálculo se requiere despejar la ecuación anterior:

$$V_f = V_i + at$$

Sustituyendo los datos:

$$V_f = 50m/s + (2{,}4m/s^2)(10s) = 74m/s$$

Ejemplo 3.11. *Una partícula se desplaza con una aceleración constante de* $2{,}5m/s^2$*. Calcula el tiempo que requiere para que se desplace una distancia de 425 m. Considere que la velocidad inicial de la partícula es de* $2m/s$*.*

La velocidad de la partícula es la siguiente

$$V_f = 2 + 2{,}5t$$

Y para el cálculo del desplazamiento se tiene:

$$d = V_i t + \frac{at^2}{2}$$

Sustituyendo los datos, se tiene:

$$d = 2t + 1{,}25t^2$$

El tiempo en el que la partícula recorre una distancia de 425 m, es:

$$1{,}25t^2 + 2t - 425 = 0$$

Se tiene una ecuación de segundo grado. Se resuelve por fórmula general:
$a = 1{,}25, b = 2, c = -425$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1{,}25)(-425)}}{2(1{,}25)} = \frac{-2 \pm 46{,}14}{5}$$

Las raíces de la ecuación cuadrática son:

$$t_1 = \frac{-2 + 46{,}14}{2{,}5} = 17{,}66s$$

$$t_2 = \frac{-2 - 46{,}14}{2{,}5} = -19{,}26s$$

En este caso, el valor t_2 es espurio ya que el análisis de nuestro problema inicia en $t = 0s$, por lo que un tiempo negativo no puede corresponder a nuestra solución. El tiempo que tardará la partícula en recorrer una distancia de 425 m cuando tiene una aceleración de 2,5 m/s^2 y una velocidad inicial de 2 m/s es de 17,66 s.

En la *Figura 3.23*, se muestran las gráficas que representan la aceleración, la velocidad y la posición de la partícula con respecto al tiempo.

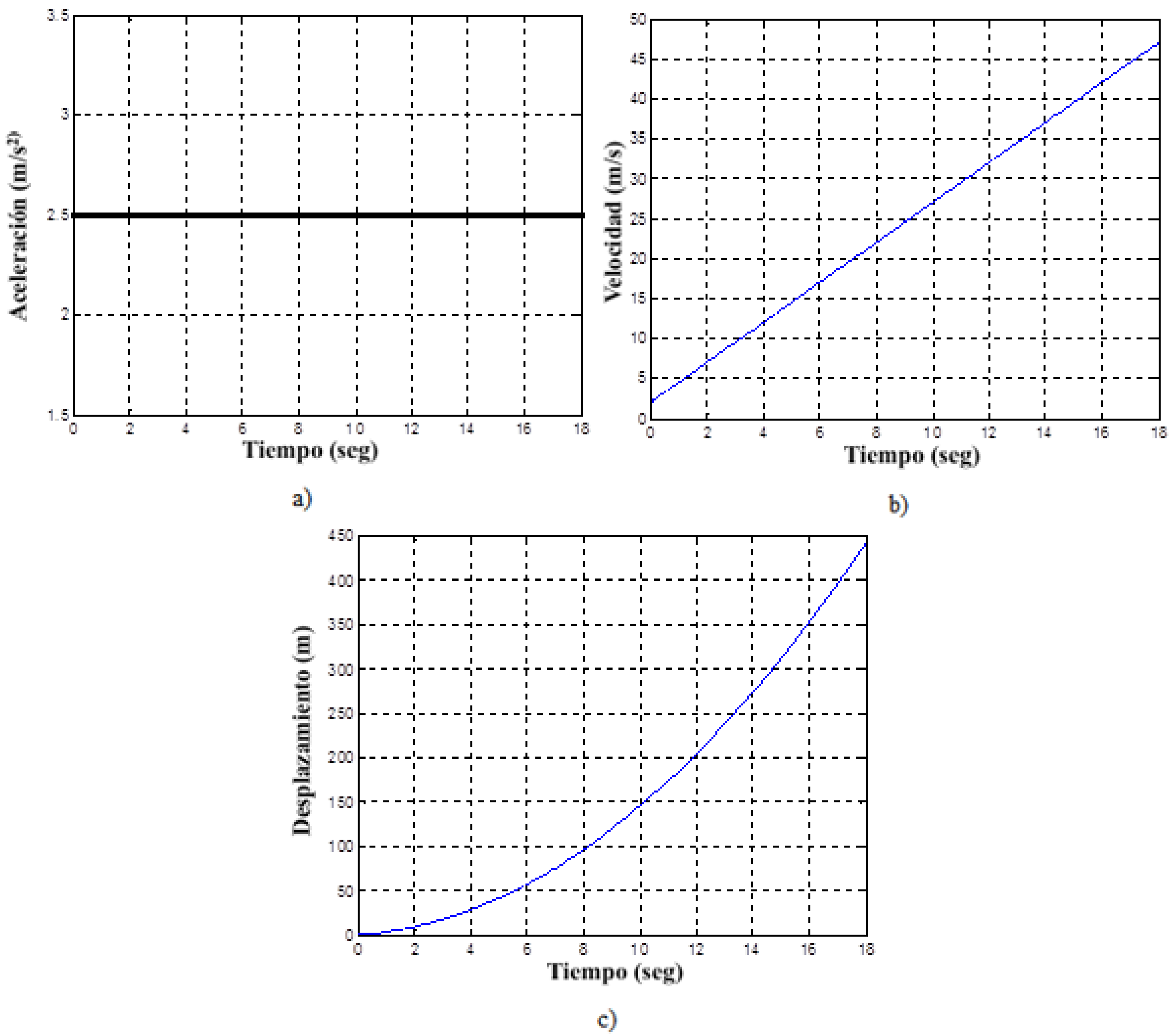


Figura 3.23: Desplazamiento, velocidad y aceleración de la partícula.

Ejercicios de Taller:

1.- Una partícula se desplaza a una velocidad inicial $v = 10m/s$, *y en un tiempo de 45 segundos incrementa su velocidad a* $v = 28{,}2m/s$. *Calcula la aceleración que experimentó la partícula.*

2.- Un cuerpo se encuentra uniformemente acelerado. Su aceleración es de $5{,}2m/s^2$. *En un tiempo determinado se desplaza con una velocidad de* $3{,}3m/s$. *¿Cuál será su velocidad después de 12 segundos?*

3.-Una partícula se desplaza con una velocidad inicial de $v = 80m/s$, *y después de 3,2seg su velocidad es de* $v = 2m/s$,*. a) Calcula el valor de la aceleración, si ésta es constante. b) ¿Cuál es su velocidad y su desplazamiento a los 2 seg?*

4.- Las siguientes gráficas corresponden a la velocidad de un cuerpo con respecto al tiempo. Calcular:

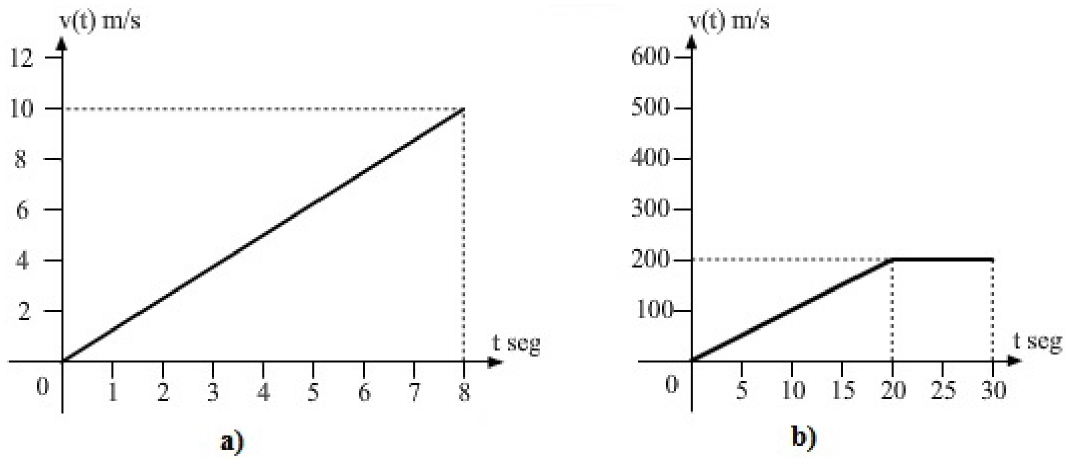


Figura 3.24: Velocidad de la partícula con respecto al tiempo. Problema 4.

Para la figura (a)

a) La aceleración del cuerpo.

b) ¿Cuál es su desplazamiento a los 4 seg?

c) Si continúa con su aceleración uniforme. ¿Cuál será la velocidad del cuerpo a los $15 seg$*?*

Para la figura (b)

a) La aceleración en el intervalo [0,20]seg

b) La aceleración en el intervalo [20,30]seg

c)¿Cuál es su desplazamiento a los 10 segundos?

Ejercicios de Tarea

1.- Un cuerpo parte del reposo y experimenta aceleración constante de 3 m/s^2*.¿Cuál es su velocidad después de 5 segundos de iniciar su movimiento?, ¿Cuál es su desplazamiento?*

2.- Una partícula se mueve con una aceleración de $12m/s^2$*. Graficar para un intervalo de tiempo* $[0, 12]s$:

a) t, a(t)

b) t, v(t)

c) t, x(t)

3.- Un cuerpo se desplaza a una velocidad uniforme de $v = 100\ m/s$*. ¿En cuánto tiempo se detendrá instantáneamente si experimenta una desaceleración de* $-2{,}3\ m/s^2$*?.*

10.4. Movimiento en caída libre

La fuerza de gravedad provoca la caída de los cuerpos. La aceleración con la que caen puede considerarse constante aunque en realidad disminuye cuando el cuerpo está más lejos de la Tierra, y su valor en el Sistema Internacional de Unidades es de $9{,}81 m/s^2$, indicando que un cuerpo que cae incrementa la magnitud de su velocidad 9,81 m/s cada segundo.

La caída simultánea de los cuerpos fue observada y estudiada por el científico Galileo Galilei y concluyó que los cuerpos en caída libre caerán al mismo tiempo independientemente de su masa. Una bola de acero caerá al mismo tiempo que una de plástico siempre y cuando estén al vacío, esto es, en ausencia de aire ya que provoca fricción en los cuerpos.

Si no se consideran fuerzas de fricción en caída libre no es necesario conocer la masa del cuerpo ni su geometría, para conocer su dinámica de caída en la Tierra sólo es necesario saber la altura h en la que se ubica.

Las ecuaciones que modelan el movimiento en caída libre son las siguientes:

$$a = -9{,}81 m/s^2$$

$$v = -9{,}81t - v_o$$

$$h = -4{,}9t^2 - v_o t + h_o$$

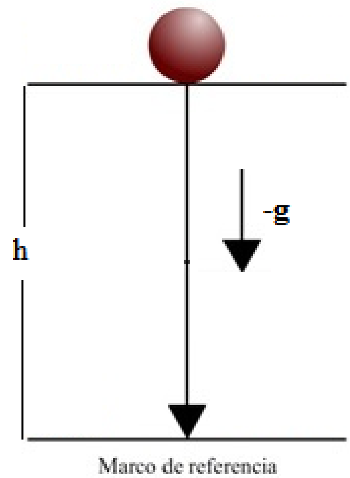


Figura 3.25 : Un cuerpo en caída libre experimenta una aceleración.

Ejemplo 3.12. *Un libro cae de un edificio desde una altura de 60 m. Calcular:*
a) La velocidad que lleva el libro 2 segundos después de caer.
b) La altura del libro a los 3 segundos de su caída.
c) ¿En cuánto tiempo tocará piso el libro?
d) Si se considera la fricción. ¿Tardaría más o menos tiempo en caer el libro?

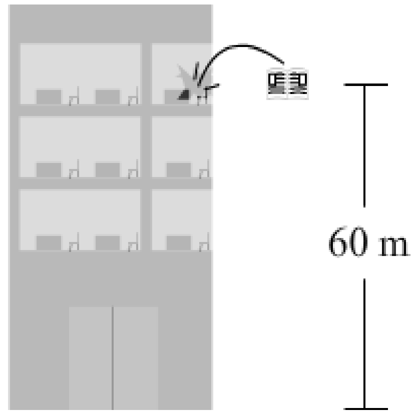


Figura 3.26. Ilustración para el ejemplo 3.12.

Solución:

a) Considerando $V_o = 0m/s$, la velocidad del libro a los 2 segundos es de:

$$V = -9{,}81t - V_o = -9{,}81(2) - 0 = -19{,}62m/s$$

Si el cuerpo se mueve hacia arriba la velocidad es positiva.

b) Para calcular la altura a los 3 segundos, considerando una posición inicial $h_o = 60m$, se usa la siguiente ecuación:

$$h = -4{,}9t^2 - V_ot + h_o = -4{,}9(3)^2 - (0)(3) + 60 = -44{,}1 + 60 = 15{,}9m$$

c) Del inciso .$^{a\,\prime\prime}$ se determinó que en 3 segundos el cuerpo cayó 44.1 m. Se busca en este problema el tiempo en el que la altura del cuerpo será de 0 m. Si se sustituyen los datos en la ecuación de la altura, se tiene:

$$-4{,}9t^2 - V_ot + h_o = 0$$

$$-4{,}9t^2 - (0)t + 60 = 0$$

Despejando la ecuación se obtiene:

$$t = \sqrt{\frac{60}{4{,}9}} = \pm 3{,}5s$$

El tiempo negativo también satisface la ecuación, sin embargo es espurio ya que se estudia el movimiento a partir de $t \geq 0s$. Por lo que el libro tardará $3{,}5s$ en tocar el piso.

d) La fuerza de fricción, en este caso provocada por el aire, se opone al movimiento por lo que el tiempo de caída es mayor.

Ejemplo 3.13. *¿A qué altura debe posicionarse un cuerpo en caída libre para que tarde 10 segundos en caer?*

El cuerpo debe tener una altura inicial h_o y después de un tiempo $t = 10s$ su altura debe ser igual a $0\ m$. Se considera que el cuerpo caerá del reposo $(V_o = 0m/s)$. La ecuación empleada para determinar la altura del cuerpo es:

$$h = -4{,}9t^2 - V_o t + h_o$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$0 = -4{,}9(10)^2 - (0)t + h_o$$

Despejando

$$h_o = 4{,}9(10)^2 = 490m$$

El cuerpo debe posicionarse a $490m$ de altura para que tarde $10s$ en caer.

Ejemplo 3.14. *La siguiente gráfica indica la altura de un cuerpo con respecto al tiempo.*

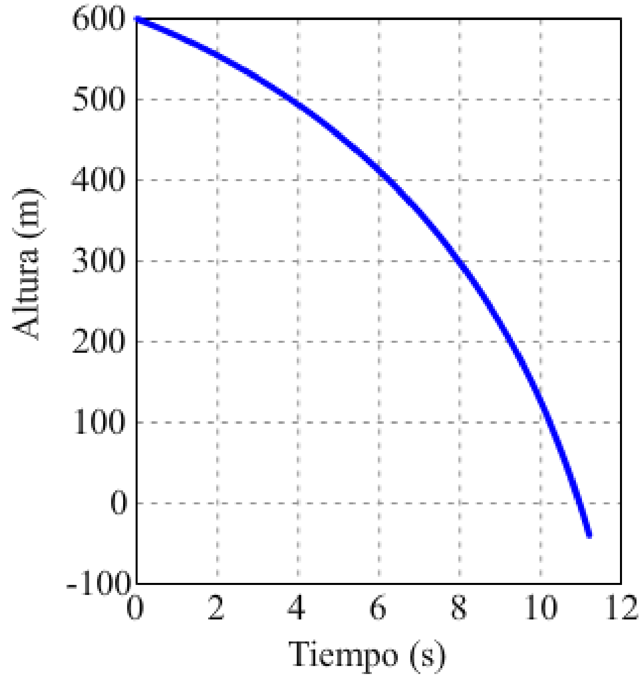


Figura 3.27 : Altura con respecto al tiempo de un cuerpo en caída libre.

Determinar:
a) La altura inicial de la partícula
b) La velocidad promedio en el intervalo de [2,4] segundos
c) La velocidad promedio en el intervalo de $[8, 10]$ *segundos*
d) ¿Se encuentra acelerado el cuerpo?

Solución.

a) Gráficamente se puede notar que la altura para $t = 0s$ es de aproximadamente $600m$

b) En $t = 2s$ la altura de la partícula es de aproximadamente $575m$, para $t = 4s$ la altura es de $520m$ aproximadamente.

Por lo que el desplazamiento de la partícula fue de $\Delta h = 575 - 520 = 55m$, en un periodo de tiempo $\Delta t = 4s - 2s = 2s$. La velocidad promedio de la partícula es:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{55m}{2s} = 27{,}5m/s$$

c) En t=8s la altura de la partícula es de aproximadamente 290 m, para t=10s la altura es de 100 m aproximadamente.

Por lo que el desplazamiento de la partícula fue de $\Delta h = 290 - 100 = 190m$, en un periodo de tiempo $\Delta t = 10s - 8s = 2s$. Por tanto la velocidad promedio de la partícula es:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{190m}{2s} = 95m/s$$

d) El cuerpo está acelerado, ya que su velocidad está cambiando con respecto al tiempo.

Ejercicios de Taller.

1.- Un cuerpo de masa m=30kg se encuentra en caída libre a una altura de 220m. Calcular:

a) La altura al segundo después de caer.

b) La velocidad al segundo después de caer.

c) El tiempo de caída.

2.- ¿Cuál debe ser la altura a la que se debe posicionar un cuerpo para que en caída libre tarde 5 seg. en caer?

10.5. Movimiento en un plano

Recordemos que el movimiento puede ser en las tres direcciones espaciales. El movimiento de caída libre, por ejemplo, se considera unidimensional. En esta sección estudiaremos el movimiento en dos dimensiones (bidimensional) o también llamado movimiento en un plano.

La *Figura 3.28* ilustra como una pelota se mueve en dos direcciones. Algunos ejemplos sencillos de este movimiento son: el de una pelota de golf o el lanzamiento de proyectiles.

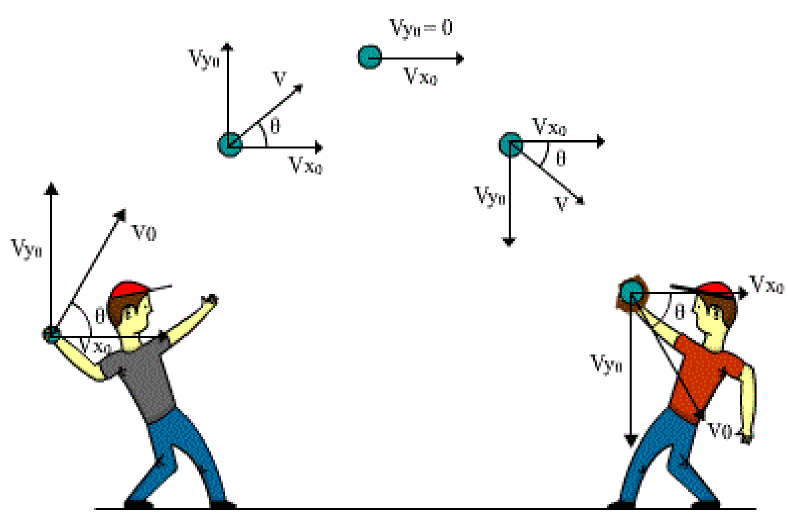


Figura 3.28 : Movimiento en un plano.

10.6. Desplazamiento, Velocidad y Aceleración en un plano

El desplazamiento en una dimensión siempre tiene una trayectoria rectilínea. En el caso de los movimientos en el plano y el espacio se pueden tener trayectorias diversas, como parabólicas, circulares, elípticas o algunas sin una geometría regular. La trayectoria en la que se mueve el cuerpo puede ser aleatoria o regida por alguna fuerza que experimenta.

Para estudiar el movimiento en un plano debemos proponer un marco de referencia mediante un plano cartesiano.

Los movimientos que se han estudiado hasta el momento han sido en una sóla dirección. Sin embargo, el análisis que se hace para una dimensión es el mismo que para dos o tres dimensiones, sólo que dependiendo del sistema dinámico que se analice en ocasiones habrá fuerzas que aceleren en una dirección o en las dos direcciones.

Los parámetros para definir el movimiento son los mismos. Sin embargo, en movimiento en un plano se deben definir la posición, desplazamiento, velocidad y aceleración en la dirección "x" y en la dirección "y".

Ejemplo 3.15. *En la Figura 3.29 se muestra el movimiento de una partícula en el plano. Calcular:*
a) El desplazamiento AB
b) El desplazamiento BC
c) La velocidad en el trayecto AB
d) La velocidad en el trayecto BC

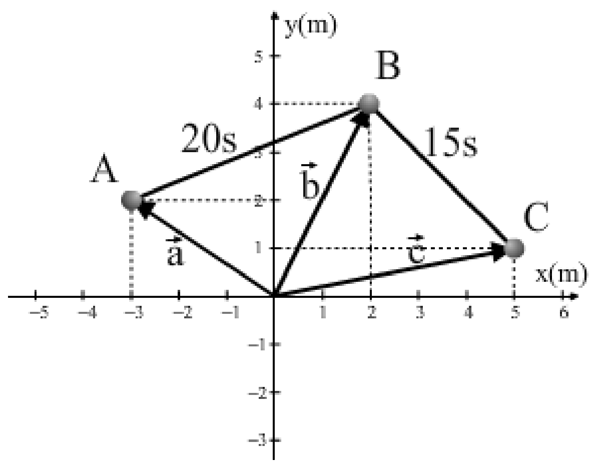


Figura 3.29 : Desplazamiento de una partícula en el plano.

Para el desplazamiento AB, se definen los vectores de posición $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. El desplazamiento se calcula como el vector de posición final menos el inicial

$$\mathbf{r}_{AB} = b - a = [2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}] - [-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}] = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = 5\mathbf{i}+2\mathbf{j}m$$

Indicando que el desplazamiento fue de 5m en el eje "x" y 2m en el eje "y".
Y para la velocidad se tiene:

$$\textbf{Velocidad} = \frac{\textbf{Desplazamiento}}{tiempo} = \frac{5\mathbf{i}+2\mathbf{j}m}{20s} = 0{,}25\mathbf{i}+0{,}1\mathbf{j}m/s$$

En el desplazamiento BC, los vectores de posición son $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Por tanto:

$$\mathbf{r}_{BC} = c - b = [5\mathbf{i} + \mathbf{j}] - [2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}] = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = 3\mathbf{i} - \mathbf{3j}m$$

Y para la velocidad se tiene:

$$\textbf{Velocidad} = \frac{\textbf{Desplazamiento}}{tiempo} = \frac{3\mathbf{i} - \mathbf{3j}m}{15s} = 0{,}2\mathbf{i}+0{,}2\mathbf{j}m/s$$

Ejercicio de Taller: *En la Figura 3.30 se muestra el movimiento de una partícula en el plano. Calcular:*

a) El desplazamiento AB
b) El desplazamiento BC
c) *El desplazamiento CD*
d) La velocidad (vector) en el trayecto AB
e) La velocidad (vector) en el trayecto BC
f) La velocidad (vector) en el trayecto CD
g) Grafica $t, |v|(t)$ en el intervalo $[0, 30]s$.

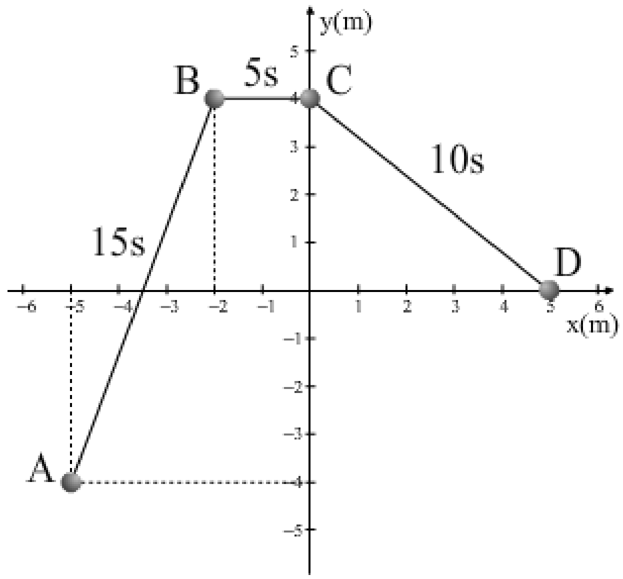


Figura 3.30: Movimiento de un cuerpo en dos dimensiones.

10.7. Movimiento de proyectiles

El movimiento de proyectiles es un movimiento en el plano. En este caso, en el movimiento dirigido en "x" no hay ninguna fuerza que modifique la velocidad, por tanto no hay aceleración en el eje "x". Sin embargo, en el movimiento en dirección z.^{a}ctúa la fuerza de gravedad, la aceleración es de $9{,}8 m/s^2$ y por tanto la velocidad en el eje z.^{es} variable.

La *Figura 3.31* muestra la trayectoria en el plano de una bola lanzada por un cañón. Algunos aspectos relevantes de la trayectoria son la altura máxima y el alcance. Estos parámetros dependerán directamente del vector velocidad con el que se dispara la bola, dicho de otra forma del módulo de la velocidad y del ángulo de disparo.

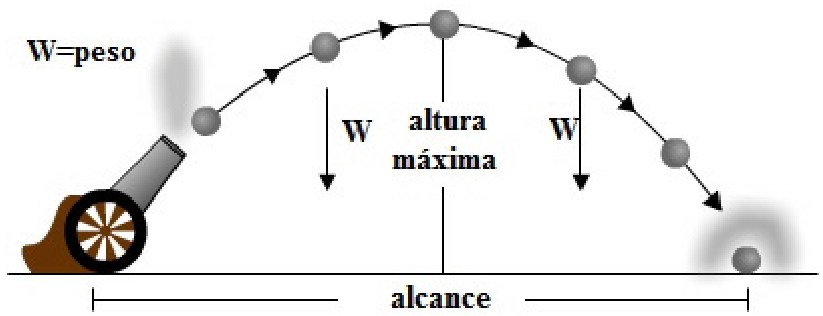


Figura 3.31: Una bola se desplaza en el plano.

Las ecuaciones que modelan la dinámica de un cuerpo en movimiento de proyectiles son las siguientes:

Para el movimiento en "x":

$$a = 0m/s^2$$

$$V_x = V_o \cos(\theta)$$

$$x = V_x t$$

Para el movimiento en z":

$$a = -g = -9{,}8m/s^2$$

$$V_y = -gt + V_o sen(\theta)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_o sen(\theta)t$$

Ejemplo 3.16. *Un cañón lanza una bola con una velocidad inicial* $\mathbf{V} = (45, 30^o)$ m/s. *Calcular:*
a) La altura máxima
b) El alcance de la bola

Mientras la bola va subiendo, la velocidad en "y" disminuye por la aceleración de la gravedad, hasta llegar a cero, es en ese momento cuando alcanza su altura máxima.

Por tanto se debe conocer el tiempo en el que la velocidad en "y" es igual a cero.

$$-gt + V_o sen(\theta) = 0$$

Sustituyendo los datos:

$$-9{,}81t + 45sen(30) = 0$$

Despejando

$$t = \frac{45sen(30)}{9{,}81} = 2{,}29s$$

Calculando la altura para el tiempo de $2{,}29s$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_o sen(\theta)t = -\frac{1}{2}(9{,}8)(2{,}29)^2 + 45sen(30)(2{,}29) = 77{,}22m$$

b) Para el cálculo del alcance:

El alcance de la bola se refiere a la distancia en "x" que recorre cuando se intercepta con el suelo. El mismo tiempo que tarda la bola en subir lo hace en bajar. Por lo que el tiempo total de trayecto es de $2 * 2{,}29s = 4{,}58s$, para conocer la posición en "x"para dicho tiempo se emplea la ecuación:

$$x = V_o \cos(\theta)t$$

Sustituyendo:

$$x = 45\cos(30)(4{,}58) = 178{,}48m$$

Ejemplo 3.17. *Un proyectil es lanzado con una velocidad de 40 m/s. ¿Cuál debe de ser el ángulo de lanzamiento para que dé en el blanco que se encuentra a 82 metros de distancia.*

La posición en "x" está dada por la ecuación:

$$x = V_o \cos(\theta)t$$

donde $x = 82m$ y $V_o = 40m/s$, y t_a es el tiempo en el aire. Sustituyendo:

$$82 = 40\cos(\theta)t_a$$

Se sabe que para $t_a/2$ se llega a la altura máxima y la velocidad en z.^{es} igual a cero.

$$V_y = -gt + V_o sen(\theta)$$

Por lo que:

$$0 = -(9{,}81)\frac{t_a}{2} + 40sen(\theta)$$

Se tienen dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, se efectúa el despeje y en caso de requerirlo se utilizan identidades trigonométricas para solucionar el sistema. Los valores aproximados que dan solución son:

$$\theta = 15{,}09^o, t_a = 2{,}12seg$$

Ejercicios de Taller:

1.- Describe la trayectoria de un proyectil de 3 kg, que se lanza con una velocidad de 10 m/s con un ángulo respecto a la horizontal de 15^o.

2.- Una bola es lanzada por un cañón con una velocidad $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$ m/s. *Calcular:*

a) La altura máxima

b) El alcance

c) El tiempo en el aire.

3.- Un proyectil es lanzado con un ángulo de 30^o. ¿Cuál debe de ser el módulo de la velocidad para que su altura máxima sea de 200m?

Ejercicios de Tarea:

1.- Simula algunos de los ejercicios de tiro parabólico y caída libre en el software NEWTON-1.

Escribe un reporte con las conclusiones de la simulación.

Capítulo 11

Dinámica y Estática.

La estática estudia los cuerpos cuando están en reposo, ya que la fuerza neta que experimentan es nula. La dinámica estudia el movimiento de los cuerpos y las causas que lo producen.

Todo se encuentra en movimiento, los átomos que conforman la materia vibran, los electrones se desplazan en las inmediaciones del núcleo, los planetas giran alrededor del sol, el sistema solar también orbita el centro galáctico. El Universo se encuentra en movimiento.

Sin embargo, el vaso de café que está sobre mi mesa está inmóvil y aparentemente todo lo que se encuentra a mi alrededor también lo está, si todos los elementos se desplazan a la misma velocidad en un sistema, su velocidad relativa entre ellos es cero.

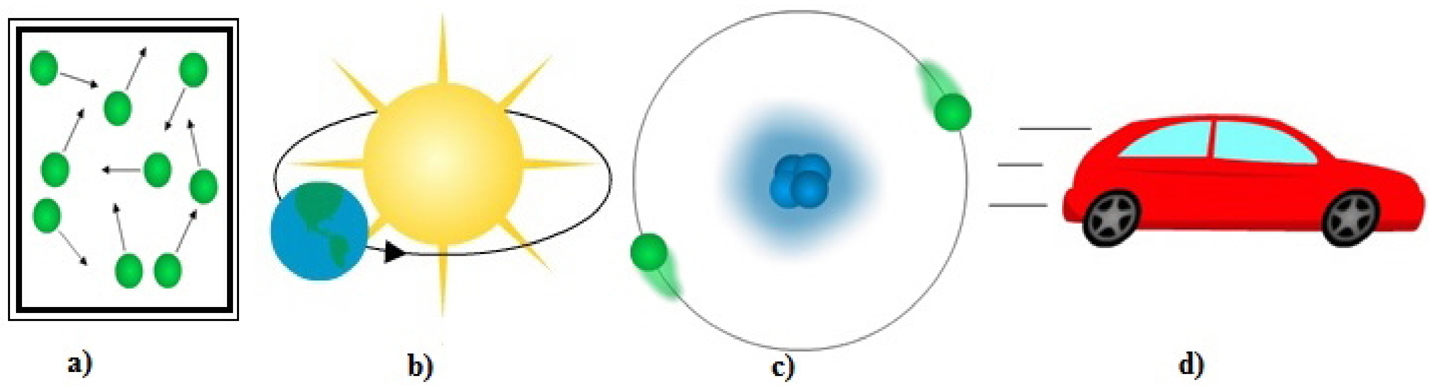


Figura 4.1: Ejemplos en los que las partículas o cuerpos están en movimiento.

Si dos automovilistas se desplazan en el mismo sentido y a la misma velocidad, su velocidad relativa entre ellos es igual a cero y parecerá que no se están desplazando. Desde la perspectiva de una persona que los observa en la calle, ellos se estarán alejando.

El movimiento de los cuerpos o las partículas puede ser aleatorio o regido por alguna fuerza. Las partículas de un gas que se encuentran en un contenedor se están desplazando dentro del volumen, ese movimiento es aleatorio, no hay algo que rija la trayectoria que sigue una molécula de gas en el contenedor. Otros movimientos son regidos por una fuerza, por ejemplo, el movimiento de la Tierra alrededor del Sol se debe a la Fuerza de atracción gravitacional que experimentan. La dirección del movimiento de los electrones a través de un conductor puede determinarse con la aplicación de una diferencia de potencial.

Para entender el movimiento de los cuerpos y predecirlos se deben entender las Leyes de Newton, a través de estas Leyes es posible determinar la dinámica de los cuerpos de acuerdo a las fuerzas que experimentan.

11.1. Leyes de Newton.

Primera Ley de Newton (Ley de la inercia): *"Todo cuerpo permanece en estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme (MRU) a menos de que una fuerza actúe sobre él"*

Cuando hacemos rodar una canica llega un momento en el que se detiene, ya que existe una fuerza de fricción que se opone al movimiento y es debida a la rugosidad de la superficie. Si logramos tener un ambiente controlado, es decir, sin aire y una superficie totalmente lisa la canica nunca se detendrá. Por el contrario si un cuerpo se encuentra inmóvil continuará en ese estado a menos de que se le aplique una fuerza que lo ponga en movimiento. Pensemos en un libro sobre el escritorio; dicho libro estará en reposo a menos de que el profesor lo empuje con su mano, aplicando así una fuerza de contacto que lo pone en movimiento.

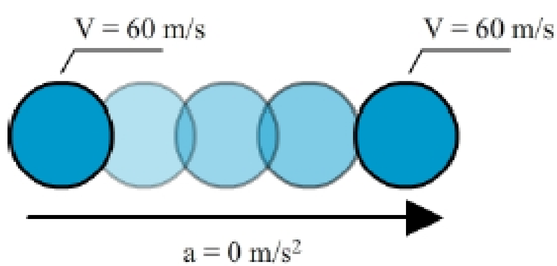


Figura 4.2: Cuerpo en movimiento
rectilíneo uniforme.

La **inercia** es la oposición que presenta un cuerpo para cambiar su estado de reposo o de movimiento. Imagina que quieres mover dos objetos con diferente masa que inicialmente se encuentran estáticos. ¿A qué objeto le puedes cambiar su estado de reposo con mayor facilidad?. Efectivamente, el objeto que tiene menor masa es aquel que puedes desplazar más fácilmente, es por eso que la masa es una medida de la inercia del cuerpo. Lo mismo aplica para dos cuerpos que están en movimiento, será más sencillo detener aquel que posee una masa inferior.

Al viajar en un automóvil y frenar en "seco"nos desplazamos hacia delante, esto debido a que llevamos una inercia, y como no hay una fuerza que nos detenga la tendencia es a continuar con el movimiento, por tanto nos seguimos desplazando por la inercia que poseemos.

La **trayectoria** es el lugar geométrico que describe en el espacio el cuerpo en movimiento. La *Figura 4.3* muestra diferentes trayectorias. La trayectoria "a" corresponde a un movimiento rectilíneo, en los otros casos los cuerpos experimentan una fuerza en una dirección distinta a la de su movimiento rectilíneo.

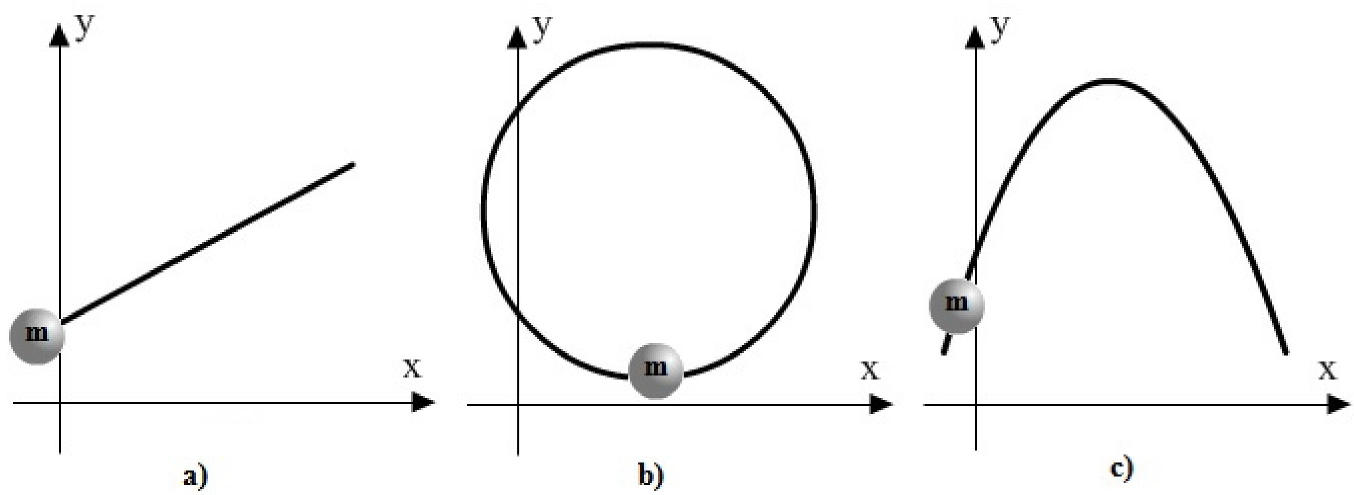


Figura 4.3: Trayectorias de partículas.

Ahora bien, podemos asegurar que el cuerpo a se desplaza en una trayectoria rectilínea. ¿Cómo podemos saber si su movimiento es uniforme?. Un movimiento uniforme se da a velocidad constante, esto significa que se recorre la misma distancia para un intervalo de tiempo determinado. Según esta Ley el cuerpo a continuará con su trayectoria rectilínea y su velocidad constante a menos de que experimente una fuerza que lo acelere o modifique su trayectoria.

Segunda Ley de Newton (Ley de la aceleración): *"La aceleración que adquiere un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza aplicada e inversamente proporcional a su masa"*

Un cuerpo en reposo es aquel que no cambia su posición con respecto al tiempo. Al aplicársele una fuerza este cuerpo experimentará una aceleración que puede calcularse con la segunda Ley de Newton.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

dónde:

a es la aceleración que experimentará el cuerpo (m/s^2)

F es la fuerza aplicada al cuerpo (N)

m es la masa del cuerpo (kg)

Si el cuerpo estaba inicialmente en reposo experimentará una aceleración en la misma dirección y sentido que la fuerza aplicada. Si el cuerpo se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme y la fuerza experimentada va en la misma dirección el cuerpo se encontrará en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Sin embargo, si la fuerza aplicada va en una dirección diferente, la trayectoria del cuerpo dejará de ser rectilínea (*Figura 4.4b*).

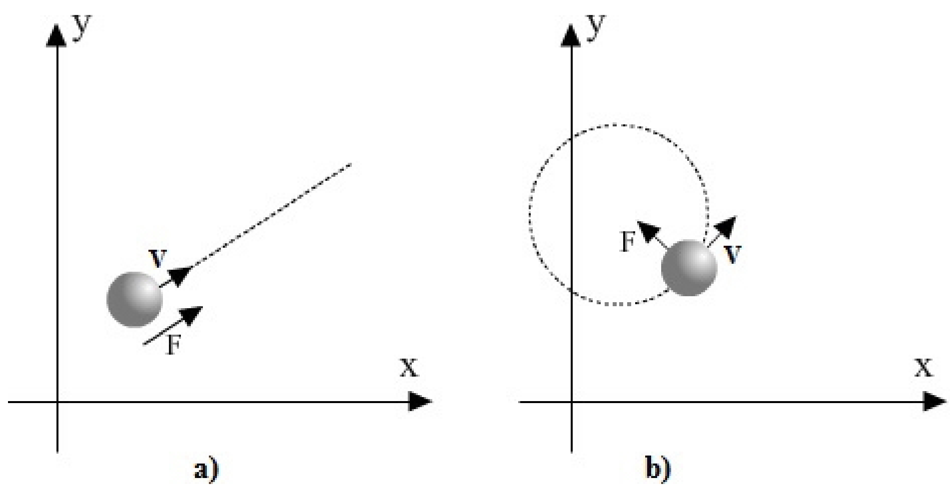


Figura 4.4: Una fuerza acelera la partícula. a) Trayectoria rectilínea b) Cambia la trayectoria rectilínea.

Ejemplo 4.1. *Calcular la aceleración que experimenta un cuerpo de 10 kg si se le aplica una fuerza de* 15**i** *N.*

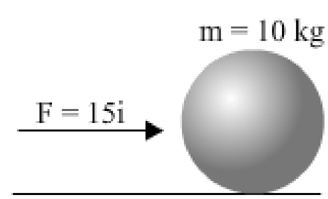


Figura 4.5: Ilustración para el Ejemplo 4.1.

De acuerdo a la segunda ley de Newton la aceleración será:

$$\mathbf{a} = \frac{15\mathbf{i}}{10} = 1{,}5\mathbf{i} m/s^2$$

La aceleración implica que el cuerpo incrementará su velocidad 1,5 m/s cada segundo en dirección de las abscisas positivas.

Ejercicios de Taller.

1. *A partir del Ejemplo 4.1, calcula:*

a) La velocidad del cuerpo después de 15 segundos de iniciar su proceso de aceleración.

b) La distancia recorrida después de 10 segundos de iniciar su aceleración.

2.- Un cuerpo de $2{,}4kg$ *experimenta una aceleración constante de* $3{,}5\mathbf{i}m/s^2$. *Calcular:*

a) La fuerza que provoca dicha aceleración

b) Graficar t, $|v(t)|$

c) Graficar t, $|x(t)|$

3.- A un cuerpo de 25kg se le aplica una fuerza de $35\mathbf{i} + 22\mathbf{j}$ N. *Calcular:*

a) La aceleración del cuerpo

b) La velocidad en "x" después de 5 segundos.

c) La velocidad en "y" después de 10 segundos.

d) El desplazamiento en "y" después de 8 segundos.

5.- Mediante NEWTON-1 simula el movimiento de un cuerpo acelerado.

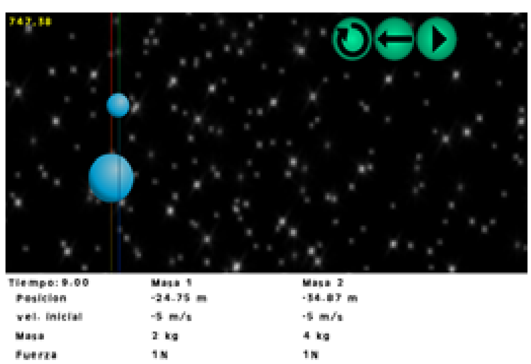


FIGURA- Ambiente NEWTON-1

Tercera Ley de Newton (Ley de la acción-reacción): *"Para cada acción existe una reacción con la misma magnitud y dirección, pero en sentido contrario"*

Las fuerzas siempre están en pares, no existe una fuerza aislada. Por ejemplo, en la *Figura 4.6* se puede observar un par de fuerzas entre un libro y una mesa, una de ellas corresponde al peso del libro. El sistema está en equilibrio, la mesa reacciona con una fuerza conocida como normal y es en magnitud igual al peso.

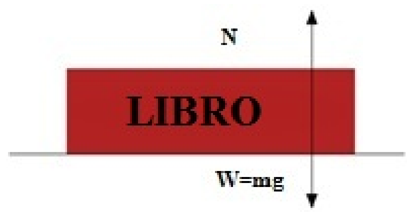


Figura 4.6: La mesa ejerce una fuerza de reacción sobre el cuerpo debido a su peso.

Ley de gravitación universal. La ley de gravitación universal señala:
"La magnitud de la fuerza de atracción entre dos masas es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa ". Dicha Ley se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La constante de proporcionalidad para la ley de gravitación universal es $G = 6{,}67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$
Por lo que la ecuación se escribe:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

Ejemplo 4.2. *Calcula la magnitud de la fuerza de atracción entre la Tierra y la Luna. Ver Figura 4.7*

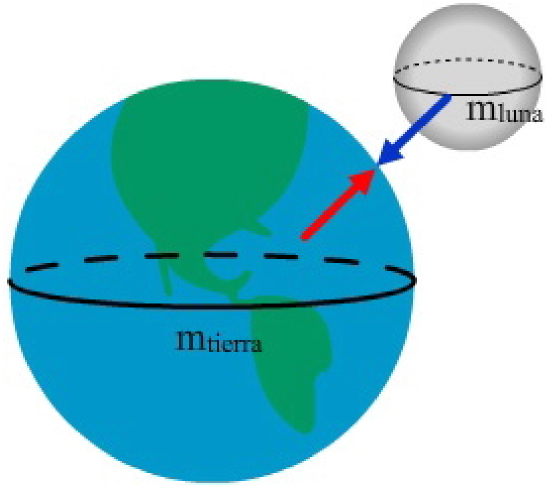


Figura 4.7: Fuerza de atracción
gravitacional entre la Tierra y la Luna.

Los datos necesarios para resolver el problema son los siguientes:
Distancia de la Tierra a la Luna : 384 405 km
Masa de la Tierra: $5{,}98 \times 10^{24} kg$
Masa de la Luna: $7{,}3477 \times 10^{22} kg$
Sustituyendo los datos en la ecuación de la Ley de Gravitación Universal de Newton, se tiene:

$$|\mathbf{F}| = \frac{(6{,}67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2)(5{,}98 \times 10^{24} kg)(7{,}3477 \times 10^{22} kg)}{384405000^2} = 1{,}983 \times 10^{20} N$$

Ejemplo 4.3. *Calcular el valor de la aceleración de la gravedad de la Tierra empleando la siguiente ecuación:*

$$|\mathbf{g}| = \frac{G m_T}{r_T^2}$$

donde:
m_T es la masa de la Tierra
$r_T = 6{,}37 \times 10^6 m$ es el radio de la Tierra
Sustituyendo los datos se tiene:

$$g_T = \frac{(6{,}67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2)(5{,}98 \times 10^{24} kg)}{(6{,}37 \times 10^6 m)^2} = 9{,}8 m/s^2$$

Ejemplo 4.4. *a) Calcular el valor de la aceleración de la gravedad de la Luna.*
b) Calcula el peso de una persona de 70 kg en la tierra y en la Luna.
c) ¿Cuántas veces más pesa la persona en la Tierra comparado con la Luna?
Solución:
a) Para la gravedad de la Luna se emplea la siguiente ecuación:

$$|\mathbf{g}| = \frac{Gm_L}{r_L^2}$$

donde:
m_L es la masa de la Luna
$r_L = 1{,}73 \times 10^6 m$ es el radio de la Luna
Sustituyendo los datos se tiene:

$$g_L = \frac{(6{,}67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2)(7{,}3477 \times 10^{22} kg)}{(1{,}73 \times 10^6 m)^2} = 1{,}69 m/s^2$$

b) Para calcular el peso se tiene
$W_T = mg_T = (70kg)(9{,}8m/s^2) = 686N$
$W_L = mg_L = (70kg)(1{,}69m/s^2) = 118{,}3N$
c) Para comparar se usa una razón:

$$\frac{W_T}{W_L} = \frac{686N}{118{,}3N} = 5{,}79 \ veces$$

Recordemos que la masa de la persona es la misma en la Tierra y en la Luna. Sin embargo, por ser una fuerza dependiente de la masa del astro en el que se encuentra, el peso de la persona es 5.79 veces más en la Tierra comparado con la Luna.

Ejercicios de Taller:

1.- ¿Cuál es la fuerza de atracción entre dos personas separadas una distancia de 10 m. La masa de una persona es de 55 kg y de la otra 60 kg?

2.- ¿ Cuál es la fuerza de atracción gravitacional entre dos átomos de Hidrógeno si hay una separación de 1 nm entre ellos.

3.- *¿Cuál es la fuerza de atracción gravitacional entre Mercurio y el Sol?*

4.- ¿Cuál es la separación que existe entre dos cuerpos de 50 kg, si su fuerza de atracción gravitacional es de $4{,}17 \times 10^{-8} N$.

Ejercicios de Tarea:

a) Calcula el valor de la aceleración de la gravedad del planeta Júpiter *b) Calcula la fuerza de atracción gravitacional entre la Tierra y Júpiter en su punto más cercano.*

11.2. Aplicaciones de las Leyes de Newton

Mencionamos que las Leyes de Newton rigen el movimiento o equilibrio de los cuerpos. Las aplicaciones de las Leyes de Newton van desde el estudio de la dinámica del Universo (movimiento de planetas, cometas, sistemas solares, galaxias); el análisis del equilibrio de los cuerpos, tales como estructuras, edificios, puentes; así como el estudio de la dinámica de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. De tal manera que podemos determinar una trayectoria para el cuerpo, su posición, velocidad y aceleración para cualquier tiempo.

11.2.1. Diagrama de cuerpo libre.

El diagrama de cuerpo libre consiste en bosquejar las fuerzas que experimenta un cuerpo para comprender su dinámica. Estas fuerzas pueden deberse al peso, fricción, tensión, compresión, electromagnéticas, entre otras. La *Figura 4.8* muestra un ejemplo de diagrama de cuerpo libre para una masa que se sostiene de una cuerda.

Recordemos que la masa es la medida de la inercia de un cuerpo y el peso es una fuerza de atracción que experimenta debido a la gravedad.

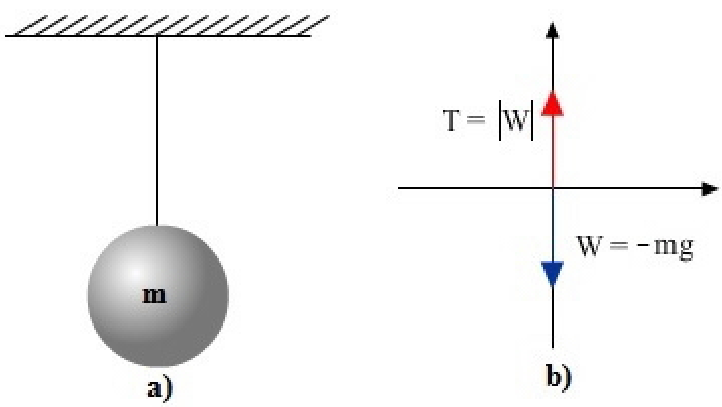


Figura 4.8: Diagrama de cuerpo libre de un cuerpo que pende de una cuerda.

La fuerza que se bosqueja hacia abajo corresponde al peso del cuerpo y se calcula multiplicando la masa por la gravedad, para la tierra es de 9.81 m/s^2. La fuerza dirigida hacia arriba es la de tensión de la cuerda. Como el sistema se encuentra en equilibrio, dicho de otra forma, la fuerza neta es igual a cero, la fuerza de tensión es de la misma magnitud que el peso. Si se corta la cuerda, ya no existirá una fuerza neta nula, sino que la fuerza de gravedad actuará directamente en el cuerpo llevándolo a la caída libre. Las leyes de fuerza con las que se rigen los cuerpos fueron planteadas por Isaac Newton y podemos entender muchos fenómenos físicos con estas Leyes.

Ejemplo 4.5: *Calcula la tensión de la cuerda de la Figura 4.8, si el cuerpo tiene una masa de 11 kg.*

Se calcula el peso del cuerpo.

$$|W| = mg = (11kg)(9{,}81m/s^2) = 107{,}91N$$

Como el sistema está en equilibrio la tensión es en magnitud igual al peso, aunque en sentido contrario.

$$|T| = 107{,}91N$$

Ejemplo 4.6.- *Realiza el diagrama de cuerpo libre para el cuerpo de la Figura 4.9 que se encuentra en equilibrio.*

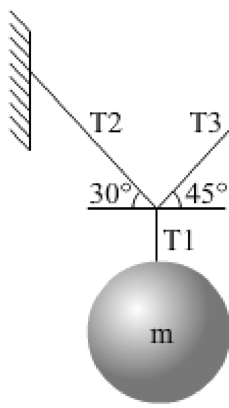


Figura 4.9:
Ilustración para el
Ejemplo 4.6

La tensión T_1 es en magnitud igual al peso del cuerpo de masa m. Las tensiones T_2 y T_3 dependerán de las posiciones que tengan las cuerdas en las paredes. Un diagrama de cuerpo libre puede ser útil para conocer las fuerzas de tensión. La *Figura 4.10* muestra el diagrama de cuerpo libre.

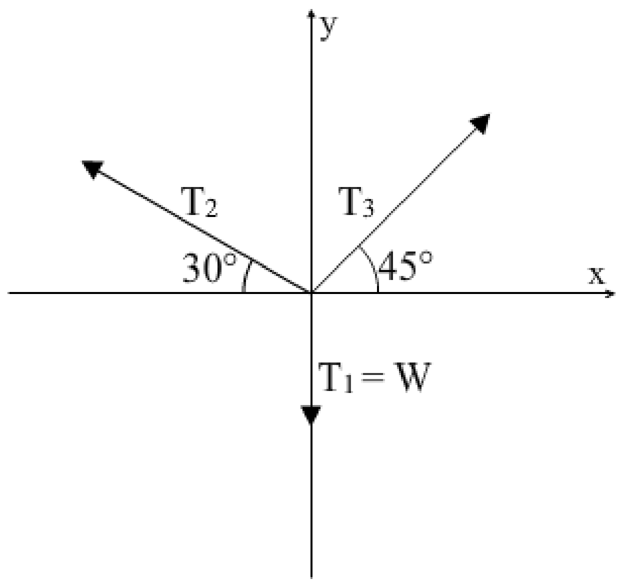


Figura 4.10: Diagrama de cuerpo libre.

Ejercicio de Taller: *Encontrar T_2 y T_3 si la masa que pende de la cuerda es de 30 kg.*

11.2.2. Equilibrio de cuerpo rígido.

Un cuerpo rígido es aquel que no se deforma por la acción de fuerzas que se ejercen sobre él, para que se encuentre en equilibrio deben cumplirse que la sumatoria de fuerzas y de momentos sea igual a cero.

$$\sum \mathbf{F}_i = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_i = 0$$

11.2.3. Momento de una fuerza con respecto a un punto.

El momento de una fuerza es una medida de la tendencia a rotar con respecto a un punto que un cuerpo rígido tiene por la aplicación de una fuerza, su magnitud se calcula con la ecuación:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{d}|\,sen\theta$$

dónde:

M es el momento de la fuerza.
d es el vector posición (donde se aplica la fuerza).
θ es el ángulo que se forma entre el vector de posición y la fuerza.

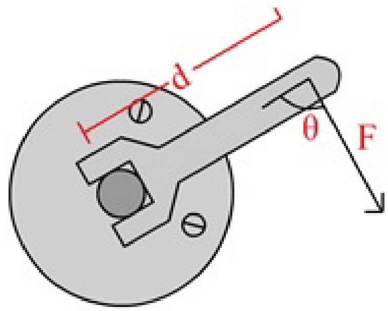


Figura 4.11: Momento de una fuerza

Ejemplo 4.7.- *Calcula el módulo del momento del caso anterior si se aplica una fuerza de 30 N, la longitud de la llave es de 15 cm y* $\theta = 90^o$.

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{d}|\,sen\theta = (30)(,15)\sin(90^o) = 4{,}5Nm$$

11.3. Fuerzas de fricción.

Las fuerzas de fricción se oponen al movimiento y son debidas a la rugosidad de una superficie o al aire. Estas fuerzas disminuyen la aceleración del cuerpo y pueden incluso llegar a frenarlo.

En los análisis de movimiento de proyectiles se puede considerar la fricción del aire. El aire puede cambiar significativamente la trayectoria del cuerpo, por lo que, la altura máxima y el alcance pueden dar valores muy distintos de los calculados en vacío. En caída libre la fricción provoca que el cuerpo tarde más tiempo en caer o modifica su trayectoria rectilínea.

La *Figura 4.12* ilustra la fuerza de fricción provocada por la rugosidad de la superficie.

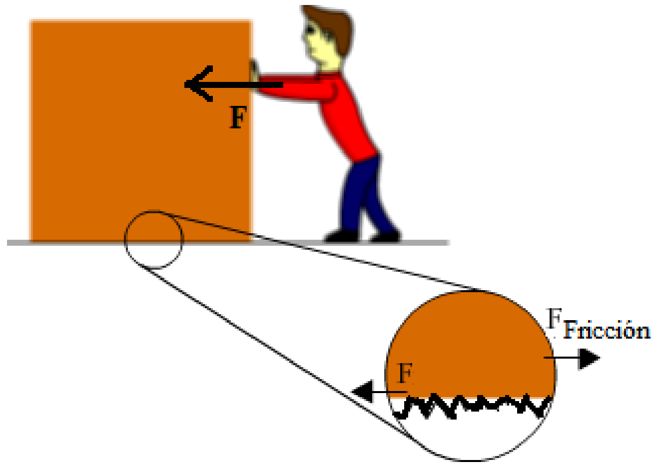


Figura 4.12: Fuerza de fricción debida a la rugosidad de la superficie.

La fuerza de fricción que experimenta un cuerpo cuando se desplaza sobre la superficie es proporcional al área de contacto, es por eso que cuando se colocan llantas es mucho más sencillo desplazar un cuerpo ya que la fuerza disminuye considerablemente.

Algunas superficies presentan poca oposición al movimiento. Al patinar sobre hielo, por ejemplo, las fuerzas de fricción son pequeñas y esto permite que la persona pueda desplazarse trayectorias más largas con un mismo impulso. Si se busca reducir los efectos de la fuerza de fricción sobre los cuerpos se deben desplazar sobre superficies lisas.

La razón por la que una hoja de papel no cae al mismo tiempo que una pelota es porque los sistemas no se encuentran al vacío y en el caso del papel, la fricción es mayor.

Ejemplo 4.8.- *En la Figura 4.13 se ilustra un objeto que cae de un plano inclinado.*

a) Bosqueja el diagrama de cuerpo libre considerando la fricción.

b) Calcula la fuerza normal.

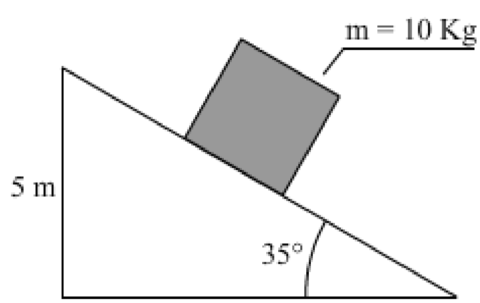


Figura 4.13: Un cuerpo cae por un plano inclinado.

Las fuerzas que experimenta el cuerpo son el peso, la fuerza normal y la fuerza de fricción. El diagrama de cuerpo libre para el movimiento del bloque se muestra en la *Figura 4.14(a)*. El sistema de referencia puede rotarse para que la fuerza normal quede exactamente en el eje de las ordenadas (Ver *Figura 4.14(b)*).

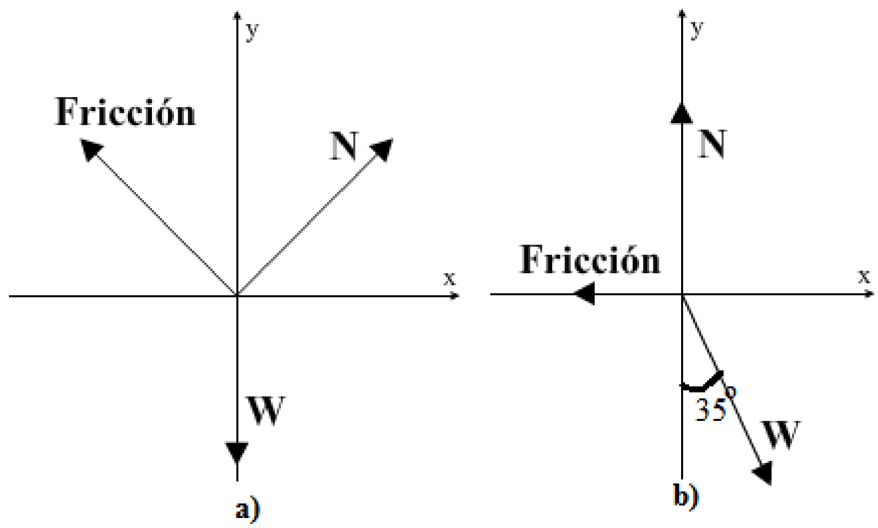


Figura 4.14: Diagrama de cuerpo libre con diferentes sistemas de referencia.

La Tabla siguiente desglosa las fuerzas y sus componentes, considerando el sistema de referencia de la *Figura 4.14(b)*.

Fuerza	Componente en "x"$F_x = \|\mathbf{F}\|\cos(\theta)$	Componente en ¿"$F_y = \|\mathbf{F}\|\, sen(\theta)$
$\mathbf{N} = (\|\mathbf{N}\|, 90^o)$	$N_x = \|\mathbf{N}\|\cos 90^o = 0$	$N_y = \|\mathbf{N}\|\, sen90^o = \|\mathbf{N}\|$
$\mathbf{W} = (98{,}1, 305^o)$	$W_x = 98{,}1\cos 305^o = 56{,}27$	$W_y = 98{,}1 sen305^o = -80{,}36$
$\mathbf{F}_{fricción} = (\|\mathbf{F}_f\|, 180^o)$	$F_{fx} = \|\mathbf{F}_f\|\cos 180 = -\|\mathbf{F}_f\|$	$F_{fy} = \|\mathbf{F}_f\|\, sen180^o = 0$
	$\sum F_x = 56{,}27 - \|\mathbf{F}_f\|$	$\sum F_y = \|\mathbf{N}\| - 80{,}36$

Tabla IX: Descomposición de Fuerzas

La sumatoria de fuerzas en "x" es :
$\sum \mathbf{F}_x = 56{,}27 - |\mathbf{F}_f|$
El desplazamiento se da en el eje "x" de acuerdo al sistema de referencia empleado y la fuerza neta en "y" es igual a $0\ N$ por lo tanto:

$$\sum F_y = |\mathbf{N}| - 80{,}36 = 0$$

$$|\mathbf{N}| = 80{,}36 \; Newtons$$

Ejercicio de Taller:
1. *De acuerdo a la sumatoria de fuerzas en "y". Analiza los siguientes casos:*
a) $\left|\mathbf{F}_f\right| = 56{,}27$
b) $\left|\mathbf{F}_f\right| > 56{,}27$
c) $\left|\mathbf{F}_f\right| < 56{,}27$
2.- *a) Realiza el diagrama de cuerpo libre para el sistema de la Figura 4.15 en el cuerpo m_1.*

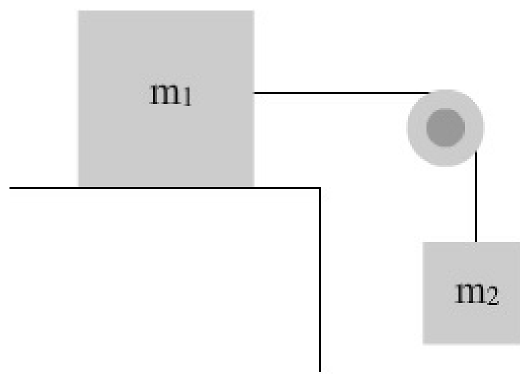


Figura 4.15: Ilustración para el Problema 2.

b) Calcula la fuerza normal en m_1 y la tensión de la cuerda.
c) Realiza un análisis de fuerzas en m_1.
d) ¿Cuál será la aceleración de m_1 si la fuerza de fricción es 10 veces menor que la fuerza de tensión de la cuerda?

11.4. Trabajo.

Una de las fuerzas naturales es la atracción gravitacional, que dirige a los cuerpos a la superficie de la Tierra. Cuando nosotros levantamos un objeto aplicamos una fuerza equivalente a su peso, se dice entonces que se efectúa trabajo. Cuando se aplica una fuerza constante el trabajo se calcula con la ecuación:

$$W = \mathbf{F} \bullet \mathbf{d} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{d}| \cos\theta$$

Donde:
W es el trabajo en Joules
$\mathbf{F}$ es la fuerza
$\mathbf{d}$ es el vector desplazamiento
θ es el ángulo formado entre el vector de fuerza y el vector desplazamiento.

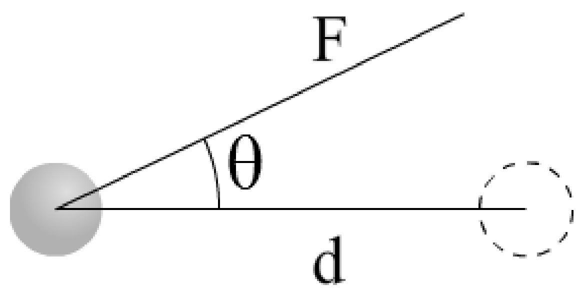


Figura 4.16: Parámetros involucrados en el trabajo.

Si el desplazamiento se efectúa en la misma dirección de la fuerza, la ecuación se simplifica a:

$$W = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{d}|$$

En este caso se analizó el trabajo efectuado sobre la fuerza de gravitación. Sin embargo, la naturaleza de la fuerza puede ser eléctrica, nuclear o de cualquier otro tipo.

Ejemplo 4.9.- *Una persona aplica una fuerza constante de 60N para jalar un cuerpo una distancia de 30 m. a) ¿Cuánto trabajo realizó la persona?*

b) *Calcula la potencia si el trabajo se realizó en un tiempo de 5 minutos.*

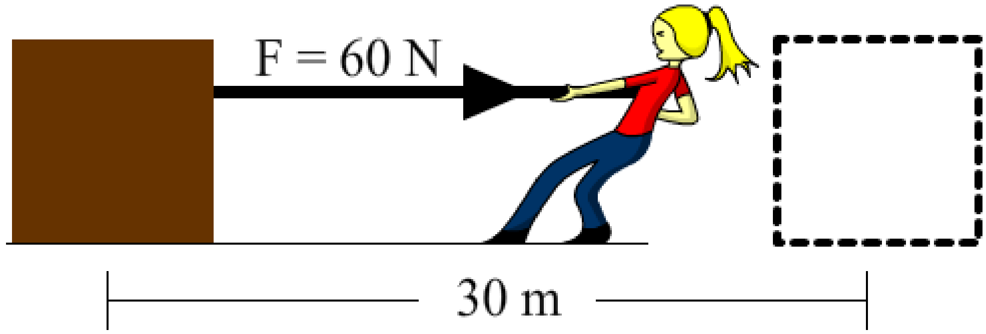


Figura 4.17: Ilustración para el Ejemplo 4.9.

Sustituyendo los datos en la ecuación de trabajo, se tiene:

$$W = Fd = (60N)(30m) = 1800Joules$$

La potencia es una medida de la rapidez con la que se hace el trabajo y se calcula como:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1800Joules}{300seg} = 6Watts$$

Ejemplo 4.10.- *Un cuerpo de 40 kg se mueve a las posiciones A, B y C. Calcular:*

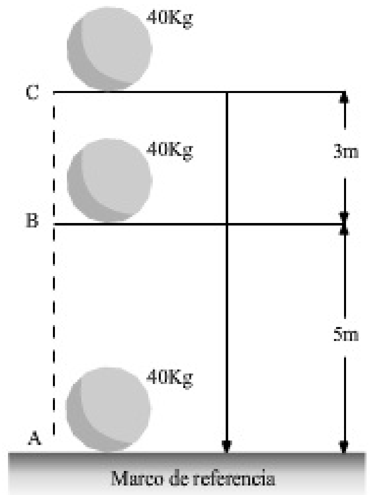


Figura 4.18: Trabajo requerido para levantar un cuerpo.

a) *¿Cuánto trabajo se requiere para mover el cuerpo de la posición A hacia la posición B?*
b) *¿Cuánto trabajo se requiere para moverlo del punto B al C?*
c) *¿Cuánto trabajo es necesario para mover el cuerpo del punto A al C?*

a) La fuerza que se requiere para levantar el cuerpo es la correspondiente a su peso. El peso está dado por:

$$F = Peso = mg = (40kg)(9{,}81m/s^2) = 392{,}4N$$

El trabajo necesario para desplazar el cuerpo 5 m, es:

$$W = Fd = (392{,}4N)(5m) = 1569{,}6Joules$$

b) Considerando la fuerza constante pero un desplazamiento de 3m, se tiene:

$$W = Fd = (392{,}4N)(3m) = 1177{,}2Joules$$

c) El trabajo necesario para mover del punto A al punto C, puede calcularse como:

$$W = W_{AB} + W_{BC} = 1569{,}6 + 1177{,}2 = 2746{,}8Joules$$

Ejercicios de Taller:
1.- Se levanta un cuerpo de 15 kg. a una altura de 15 ft. ¿Cuánto trabajo se efectúo?
2.- ¿A qué altura se elevó un cuerpo de 22.5 kg. si se realizó un trabajo de 800 Joules?
3.- De la Figura 4.16, calcular el trabajo si:
$|F| = 200N$, $|d| = 200m$ *y* $\theta = 15^o$.

11.5. Energía cinética y potencial.

La **energía** es la capacidad para realizar un trabajo. El Sol es una de las fuentes de energía más importantes en la Tierra. También se aprovecha la energía fósil, eólica, geotérmica, nuclear, mareomotriz, hidráulica, para su conversión en energía eléctrica que es la que requieren nuestros aparatos eléctricos y electrónicos para funcionar. Nosotros mismos tenemos energía que hemos adquirido de la energía química que hay en los alimentos.

La energía puede ser cinética o potencial.

Cuando un cuerpo se encuentra en movimiento se dice que posee **energía cinética**. Por ejemplo, si viajas en tu vehículo llevas una energía de este tipo y la puedes calcular con la siguiente ecuación:

$$E_{cinética} = \frac{1}{2} m \left| \mathbf{v} \right|^2$$

donde m es la masa del cuerpo y $\mathbf{v}$ es la velocidad a la que viaja.

Ejemplo 4.11.- *a)Calcula la energía que tiene un automóvil que viaja a una velocidad de 60 millas/hr, si su masa es de 3000 libras.*

b) Calcula el módulo del momento lineal del vehículo.

La energía que posee es cinética ya que es un cuerpo en movimiento. Para efectuar el cálculo las magnitudes deben de estar en un solo Sistema de Unidades. Se empleará el Sistema Internacional y se efectúan las conversiones respectivas.

$$60 \frac{millas}{hr} * \left(\frac{1609 metros}{1 milla} \right) * \left(\frac{1 hr}{3600 seg} \right) = 26{,}81 m/s$$

Para la masa:

$$3000 libras * \left(\frac{0{,}453 kg}{1 libra} \right) = 1359 kg$$

Por lo que la energía cinética es:

$$E = \frac{1}{2}(1359kg)(26{,}81m/s)^2 = 488408{,}36Joules$$

El **momento lineal** también conocido como cantidad de movimiento es una magnitud física que tiene la propiedad de conservación y es altamente aplicable en el análisis de fenómenos físicos. Y se calcula con la siguiente ecuación:

$$|p| = m\,|v| = (1359kg)(26{,}81m/s) = 36434{,}79\frac{kgm}{s}$$

Ejercicio de Taller:

Una partícula con una masa de 0.0032 kg se desplaza a una velocidad constante de 34.56 m/s. Calcula:

a) Su energía cinética

b) Su momento lineal

c) La velocidad que debe llevar para que duplique su energía cinética

La **energía potencial** la poseen los cuerpos que se encuentran en reposo debido a su estado o posición. Este tipo de energía se encuentra en las presas, al jalar la flecha en un arco, al comprimir un resorte o incluso al levantar un objeto, también en la interacción de átomos, iones y subpartículas.

La ecuación para calcular la energía potencial gravitacional que posee un cuerpo que se encuentra a una altura h es la siguiente:

$$E_p = mgh$$

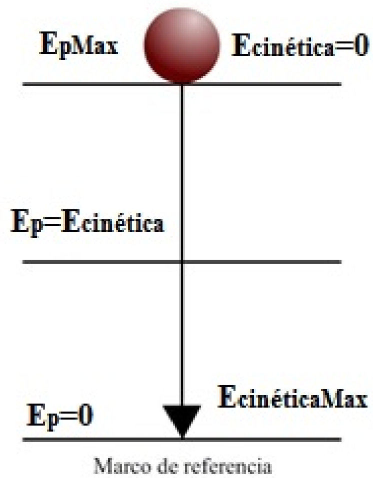


Figura 4.19: Energía
potencial gravitacional.

Ejemplo 4.12.- *Una persona levanta un cuerpo de 25kg a una altura de 2m. ¿Cuál es la energía potencial del cuerpo?*

$$E_p = mgh = (25kg)(9{,}81m/s)(2m) = 490{,}5Joules$$

11.6. Conservación de la energía.

En los fenómenos que existen en la naturaleza y en las interacciones de la materia y la energía en el espacio-tiempo siempre se conserva la energía del sistema. Esto se enuncia en una de las Leyes de la Termodinámica:

"La energía no se crea ni se destruye solo se transforma"

En la montaña rusa hay cambios entre la cantidad de energía cinética y potencial. Sin embargo, la cantidad total de energía es constante. Cuando los carros se encuentran en la parte más alta poseen energía potencial, misma que se transforma en cinética al ir cayendo. En las reacciones químicas o nucleares, ya sean endotérmicas o exotérmicas también se conserva la cantidad de energía del sistema.

Ejemplo 4.13: *Calcula la energía potencial y cinética del patinador en los puntos A, B y C.*

¿Cuál es la velocidad del patinador cuando ha descendido un metro?.

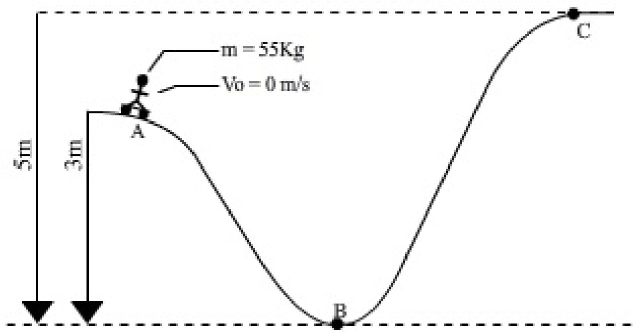


Figura 4.20: La suma de la energía cinética y potencial es constante.

Se observa que el cuerpo tiene energía potencial en el punto A y debido a que su velocidad inicial es igual a $0m/s$ su energía cinética es nula.

Entonces:

$$E_{pA} = mgh = (55kg)(9{,}81m/s^2)(3m) = 1618{,}65Joules$$

Y

$$E_{cA} = 0Joules$$

Conforme el patinador desciende pierde energía potencial, de acuerdo a la Ley de conservación de la energía se sabe que ésta se transforma en energía cinética y se incrementa la velocidad del patinador. Cuando desciende un metro su energía potencial es:

$$E_{pA} = mgh = (55kg)(9{,}81m/s^2)(2m) = 1079{,}1Joules$$

La diferencia de energía potencial corresponde a la energía cinética que lleva el cuerpo. Ya que:

$$E_T = E_p + E_c$$

Despejando se tiene:

$$E_c = E_T - E_p = 1618{,}65 - 1079{,}1 = 539{,}55Joules$$

Para calcular la velocidad que lleva el patinador en el momento en el que descendió un metro, se despeja la ecuación de la energía cinética:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2(539{,}55)Joules}{55kg}} = 19{,}22m/s$$

En el punto B el patinador no tiene energía potencial gravitacional ya que está a una altura de 0 metros, por lo tanto, la energía cinética es:

$$E_c = E_T - E_p = 1618{,}65 - 0 = 1618{,}65Joules$$

Antes de analizar el punto C debemos cuestionarnos sobre la cantidad de energía que tiene el patinador. ¿Tiene suficiente energía para llegar al punto C? Sin hacer un cálculo observamos que el patinador no llegará a un punto más alto que A, requiere más energía. Calcularemos la energía necesaria para que llegue al punto C.

La altura es de 5 m y la energía potencial que debe tener el patinador es de:

$$E_p = mgh = (55kg)(9{,}81m/s)(5m) = 2697{,}75Joules$$

Podemos observar que no se cuenta con la energía suficiente para llegar al punto C.

Ejercicios de Taller:

a) Del problema anterior calcula la velocidad que lleva el patinador en el momento en el que desciende 2m

b) ¿Cuál debe ser la velocidad inicial del patinador para que logre llegar al punto C?

Ejercicios de Tarea:

1.- **"Para investigar"**

Investiga las tres Leyes de Kepler.

2.- Un cuerpo de 15.2 kg. se levanta a una altura de 11m. Calcular:

a) El trabajo que se aplicó para levantarlo.

b) Su velocidad al caer tres metros

c) Su velocidad al caer siete metros.

d) La máxima velocidad que adquiere el cuerpo.

3.- Un cuerpo de 5kg. se desliza de la rampa como se muestra en la Figura 4.21. Calcular:

a) Su energía potencial en A.

b) Su velocidad en el punto B.

c) El tiempo que tardará en desplazarse 10 m a partir del punto B, suponiendo que no existe fricción.

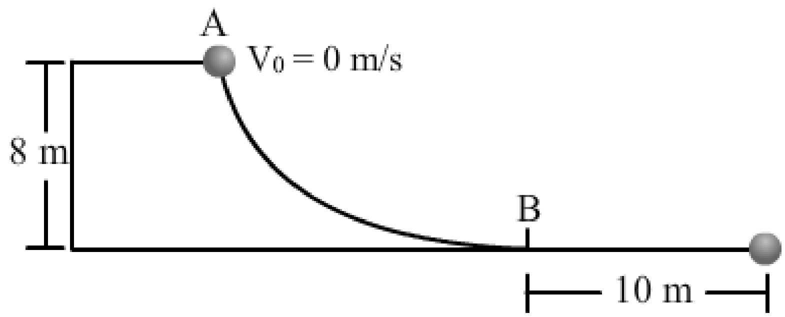


Figura 4.21: Conservación de la energía de un cuerpo que se desliza por una rampa.

Capítulo 12

Electricidad.

Una de las manifestaciones de los fenómenos eléctricos que podemos observar es la descarga cuando se frota un globo con el cabello o en la alfombra. La materia está constituida por átomos, los cuales tienen un núcleo formado de protones y neutrones rodeado de una nube de electrones. Los protones y electrones además de tener masa poseen otra propiedad conocida como carga eléctrica. Los electrones tienen carga eléctrica negativa y los protones tienen carga positiva. La *Figura 5.1* es un modelo de Bohr del átomo de Helio, pueden observarse las diferentes partículas que lo constituyen. El Helio tiene número atómico 2, indicando que el átomo contiene 2 protones y 2 electrones por lo que es neutro.

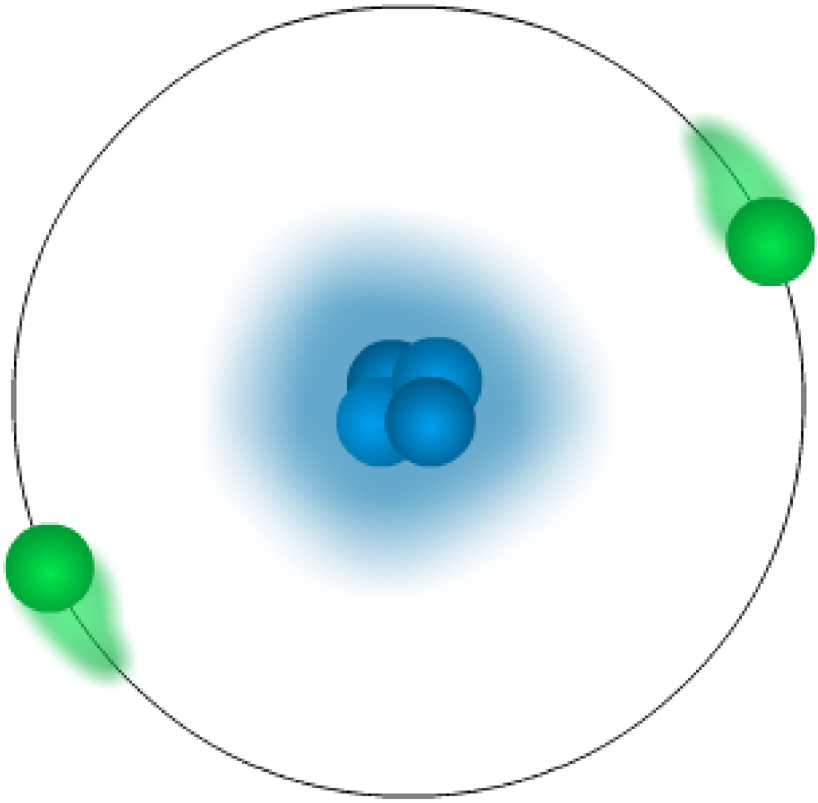


Figura 5.1: Átomo de Helio

12.1. Carga y fuerza eléctrica.

La materia generalmente se encuentra neutra, por la compensación de carga positiva y negativa. Sin embargo, algunos fenómenos permiten la acumulación y el movimiento de las cargas. Una forma sencilla de cargar un cuerpo es por el frotamiento, que permite que algunos electrones de un material se transfieran a otro, quedando cargados, aquel que quedó con electrones en exceso posee carga negativa, y al que le hacen falta electrones queda cargado positivamente. Otros mecanismos que permiten cargar los cuerpos son por contacto e inducción. Los cuerpos cargados experimentan fuerzas. La fuerza eléctrica puede ser tanto de atracción como de repulsión, entre cargas de signo contrario la fuerza es de atracción, para cargas del mismo signo la fuerza eléctrica es de repulsión.

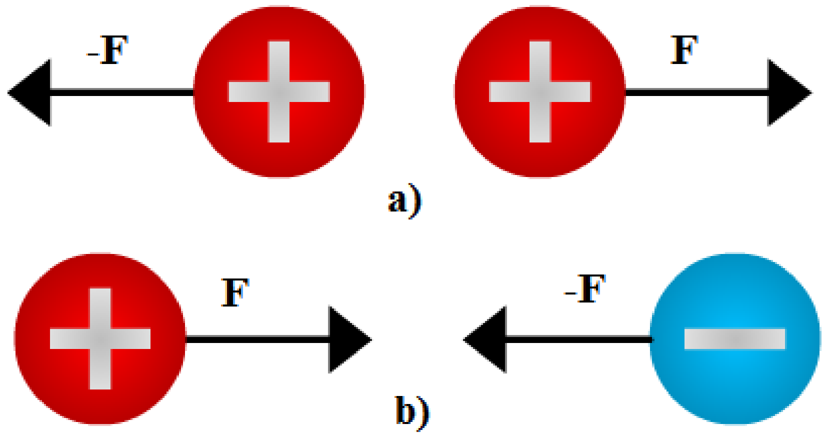


Figura 5.2: Las fuerzas eléctricas pueden ser de atracción y de repulsión.

La carga tiene la propiedad de conservación y de cuantización. La conservación nos indica que sin importar las interacciones de un sistema su carga neta siempre será constante. El principio de cuantización de la carga señala que la mínima cantidad de carga que puede tener una partícula corresponde a la de un electrón y el siguiente valor es discreto, correspondiendo a dos electrones. De tal forma que la magnitud de la carga siempre es múltiplo de la carga del electrón.

$$|q| = ne; \; donde \; n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...$$

Indicando que el valor mínimo de carga es entonces $q = 1 * e = 1{,}602 \times 10^{-19}C$. Los Coulomb son las unidades de la magnitud de la carga eléctrica en honor a Charles Coulomb quien trabajó en la cuantificación de la fuerza eléctrica empleando una balanza de torsión.

Según el principio de cuantización el segundo valor mínimo posible para la carga es $q = 2 * e = 2 * 1{,}602 \times 10^{-19}C = 3{,}204 \times 10^{-19}C$. Todos los valores entre $(1{,}602 \times 10^{-19}C, 3{,}204 \times 10^{-19}C)$ no son posibles o permitidos.

Ejercicios de Taller:

a) ¿ Cuánta carga positiva hay en el núcleo de un átomo de Oro? y ¿Cuánta negativa?

b) ¿Cuál es el valor de carga posible para n=3? y ¿para n=38?

c) ¿ Cuántos electrones en exceso debe poseer un cuerpo para que tenga una carga aproximada de $q = -5{,}7496 \times 10^{-16}C$ *?*

12.1.1. Conductores y aislantes.

Los materiales se pueden clasificar de acuerdo a la facilidad con la que la carga eléctrica pude fluir a través de ellos. El parámetro empleado para medir esa facilidad es la conductividad, así los materiales con alta conductividad son conocidos como **conductores**, como ejemplo se tienen los metales: el oro, la plata, el cobre, el zinc. Estos materiales pueden ser útiles en las instalaciones eléctricas de casa. Los materiales con baja conductividad se llaman **aislantes o dieléctricos**, algunos ejemplos son: el papel, el foam, la mica, la madera, el cartón, el concreto, entre otros.

12.2. Ley de Coulomb

La ley de Coulomb enuncia que *"la fuerza de atracción o de repulsión entre dos cargas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancia que las separa"*. Se representa por la siguiente ecuación:

$$|F| = \frac{k\,|q_1|\,|q_2|}{r^2}$$

donde k es la constante eléctrica y tiene un valor aproximado en el vacío de:

$$k = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$$

Ejemplo 5.1. *a) Calcula la fuerza eléctrica entre dos protones que se encuentran separados una distancia de 1m.*

b) Empleando la segunda Ley de Newton, calcula la aceleración instantánea del protón.

Como se trata de partículas cargadas con el mismo signo la fuerza eléctrica es de repulsión. Para calcular la magnitud de la fuerza se emplea la Ley de Coulomb. El valor de la carga del protón es de $1{,}602 \times 10^{-19}$C. Ver *Figura 5.3*.

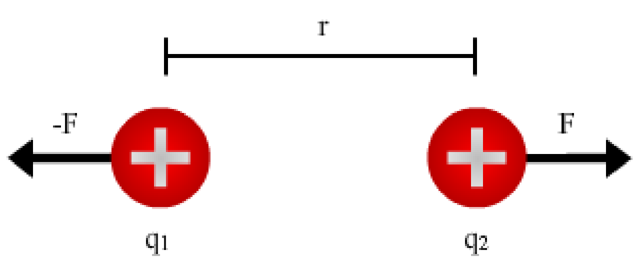


Figura 5.3: Repulsión eléctrica entre dos protones.

$$|F| = \frac{k\,|q_1|\,|q_2|}{r^2} = \frac{9\times 10^9(1{,}602\times 10^{-19}C)\left(1{,}602\times 10^{-19}C\right)}{(1m)^2} = 2{,}31\times 10^{-28}N$$

La masa del protón es de $1{,}67\times 10^{-27}kg$, empleando la Segunda Ley de Newton se obtiene la aceleración instantánea:

$$|a| = \frac{|F|}{m} = \frac{2{,}31\times 10^{-28}N}{1{,}67\times 10^{-27}kg} = 0{,}138m/s^2$$

Ejemplo 5.2.- *De acuerdo a la Figura 5.4. Calcula:*
a) La fuerza de atracción que experimenta la carga de -3nC debida a la de 6nC
b) La fuerza de repulsión que experimenta la carga de -3nC debida a la de -5nC
c) La fuerza resultante en la carga de -3nC
d) La aceleración instantánea que experimenta la carga de -3nC si su masa es de 2.3 kg.
e) La fuerza de atracción que experimenta la carga de -5nC debida a la de 6 nC

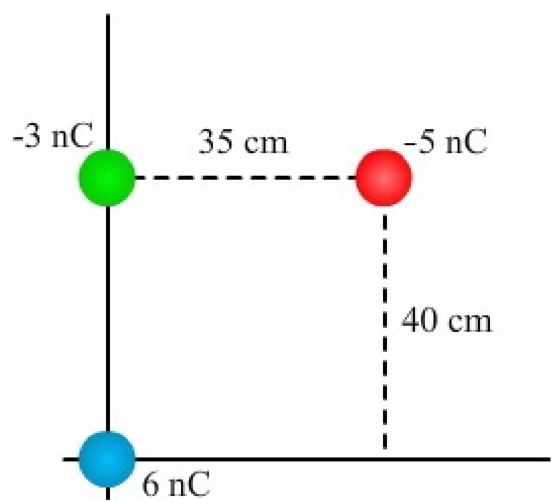


Figura 5.4: Cargas en el plano

Solución:
La siguiente imagen ilustra las fuerzas eléctricas que experimenta cada una de las cargas.

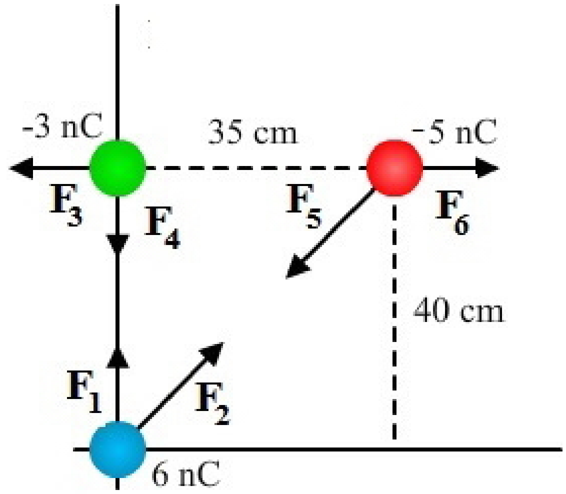


Figura 5.5: Fuerzas eléctricas que experimentan las partículas cargadas.

a) La fuerza de atracción que experimenta la carga de -3nC debida a la de 6nC. $[F_4]$
Para calcular la magnitud de la Fuerza se usa la Ley de Coulomb:

$$|\mathbf{F}| = \frac{k\,|q_1|\,|q_2|}{r^2} = \frac{9\times10^9\left|-3\times10^{-9}C\right|\left|6\times10^{-9}C\right|}{(0{,}4m)^2} = 1{,}013\times10^{-6}N$$

El vector de fuerza queda definido de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_4 = (1{,}013\times10^{-6}, 270^o)N = -1{,}013\times10^{-6}\mathbf{j}N$$

b) La fuerza de repulsión que experimenta la carga de -3nC debida a la de -5nC

$$|\mathbf{F}| = \frac{k\,|q_1|\,|q_2|}{r^2} = \frac{9\times10^9\left|-3\times10^{-9}C\right|\left|-5\times10^{-9}C\right|}{(0{,}35m)^2} = 1{,}102\times10^{-6}N$$

El vector fuerza es:

$$\mathbf{F}_3 = (1{,}102\times10^{-6}, 180^o)N = -1{,}102\times10^{-6}\mathbf{i}N$$

c) La fuerza resultante en la carga de -3nC

$$\mathbf{F}_R = -1{,}102\times10^{-6}\mathbf{i} - 1{,}013\times10^{-6}\mathbf{j}N$$

Para expresar la fuerza en su forma polar:

$$|\mathbf{F}_R| = \sqrt{|-1{,}102 \times 10^{-6}|^2 + |-1{,}013 \times 10^{-6}|^2} = 1{,}497 \times 10^{-6} N$$

$$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{-1{,}013 \times 10^{-6}}{-1{,}102 \times 10^{-6}}\right) = 42{,}59^o$$

Como el vector de fuerza se encuentra en el tercer cuadrante, el sentido de la fuerza es:

$$\theta = 42{,}59^o - 180^o = -137{,}41^o$$

Considerando un ángulo positivo, la fuerza es:

$$\mathbf{F}_R = (1{,}497 \times 10^{-6}, 222{,}59^o)N$$

d) La aceleración instantánea que experimenta la carga de -3nC si su masa es de 2.3 kg.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{(1{,}497 \times 10^{-6}, 222{,}59^o)N}{2{,}3} = (6{,}51 \times 10^{-7}, 222{,}59^o)m/s^2$$

e) La fuerza de atracción que experimenta la carga de -5nC debida a la de 6 nC.
El módulo de la fuerza es:

$$|\mathbf{F}_5| = \frac{k\,|q_1|\,|q_2|}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \left|-5 \times 10^{-9}C\right| \left|6 \times 10^{-9}C\right|}{(0{,}531m)^2} = 9{,}57 \times 10^{-7} N$$

El ángulo de la fuerza se calcula a partir de la posición espacial de las cargas de acuerdo a la *Figura 5.6.*

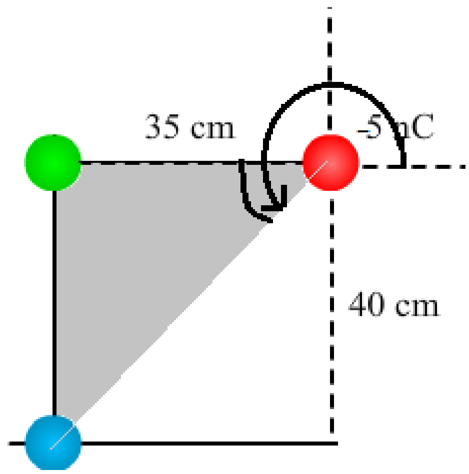


Figura 5.6: Ángulo de la fuerza de atracción entre las cargas de -5nC y 6 nC.

Por lo tanto:

$$\theta_{F5} = 180 + \tan^{-1}\left(\frac{0{,}4}{0{,}35}\right) = 228{,}81^o$$

Por lo tanto la fuerza $\mathbf{F}_5$ en su forma polar es:

$$\mathbf{F}_5 = \left(9{,}57 \times 10^{-7}, 228{,}81^o\right) N$$

Ejercicio de Taller:

1.-*Calcula la fuerza resultante en la carga de -5 nC de la Figura 5.5.*

2.- *Compara la magnitud de la fuerza gravitacional con la eléctrica de dos protones.*

3.- Calcular la fuerza eléctrica que experimenta una carga positiva de 5mC que se ubica en el punto P para cada caso de la Figura 5.7.

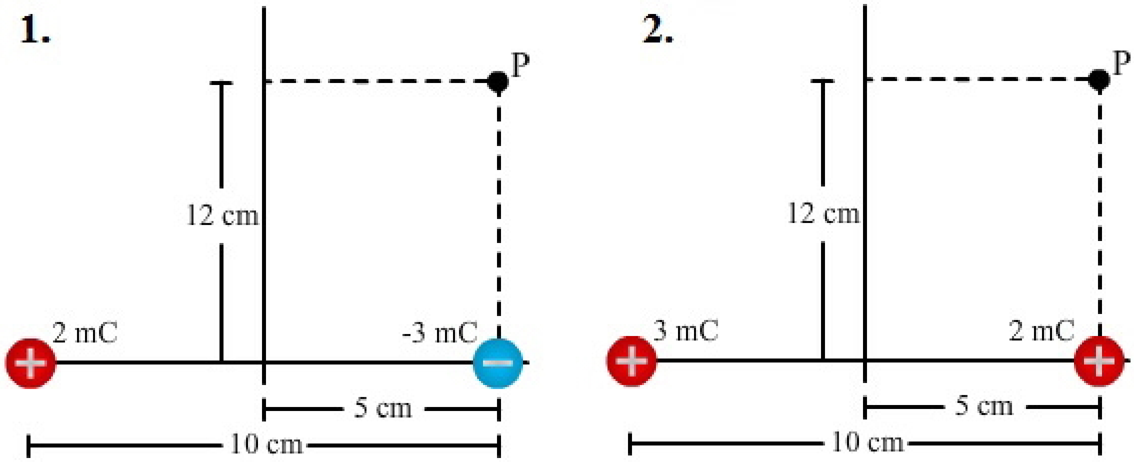
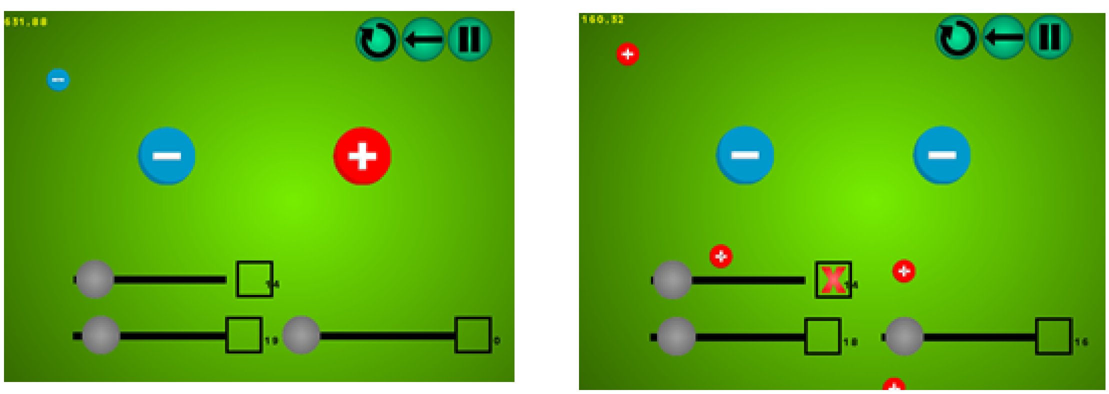


Figura 5.7: Cargas eléctricas. Problema 3

4.- Simula en NEWTON-1 la interacción entre cargas. Escribe conclusiones.



(a) (b)

FIGURA- Ambiente de NEWTON-1

12.3. Capacitores.

Los capacitores son dispositivos que almacenan energía mediante cargas eléctricas. Una configuración sencilla de un capacitor consiste en un par de placas metálicas separadas por vacío o por un material aislante, papel, por ejemplo. Cuando se conecta una batería entre sus terminales, los electrones que se encuentran en la lámina conectada al potencial más alto se transfieren a la otra lámina, quedando cargadas. La capacitancia (C) es una medida de que tanta carga (q) puede almacenar el capacitor al conectarle una diferencia de potencial (V). (Ver *Figura 5.8*)

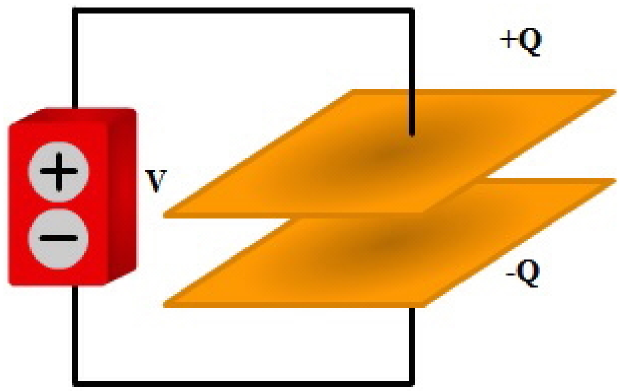


Figura 5.8: Un capacitor de placas paralelas conectado a una batería.

La relación entre la carga que almacena un capacitor y el voltaje aplicado es la siguiente:

$$q = CV$$

donde C es la capacitancia del dispositivo.
Para un capacitor de placas paralelas la capacitancia se puede calcular mediante la ecuación:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$$

donde:
A es el área de las placas.
ε_0 es la permitividad eléctrica del vacío y su magnitud es de $8{,}85 \times 10^{-12} F/m$.
ε_r es la permitividad del dieléctrico (aislante) que se encuentra entre las placas.
d es la distancia de separación entre las placas.

Ejemplo 5.3.- *a) Calcula la capacitancia de un capacitor de placas paralelas, si las dimensiones de las placas son de* $20cm x 30cm$ *y la distancia de separación entre ellas es de* $0{,}5cm$.
b) Calcula la carga que almacenará el capacitor si se conecta a una batería de 12 V.
c) La energía que almacena el capacitor.

Solución:

a) El área debe estar en metros cuadrados:

$$A = (0{,}2m)(0{,}2m) = 0{,}04m^2$$

Y la distancia de separación en metros $d = 0{,}5cm = 0{,}5 \times 10^{-2}m = 0{,}005m$.

Considerando que no existe dieléctrico entre las placas ($\varepsilon_r = 1$), la capacitancia es:

$$C = \frac{(8{,}85 \times 10^{-12})(1)(0{,}04)}{(0{,}005)} = 70{,}8 \times 10^{-12}F$$

El orden de magnitud de la capacitancia en los capacitores empleados en aparatos electrónicos va desde los mF hasta los pF.

b) Para la magnitud de la carga se tiene:

$$q = CV = (70{,}8 \times 10^{-12}F)(12V) = 849{,}6 \times 10^{-12}C$$

c) Para calcular la energía almacenada se emplea la ecuación:

$$E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(70{,}8 \times 10^{-12}F)(12V)^2 = 5{,}09 \times 10^{-9}J = 5{,}09nJ$$

Ejercicios de Taller:

1.-a) Calcula la capacitancia de un capacitor de placas paralelas, si sus dimensiones son de (15cmx19cm) y su separación es de 2mm.

b) ¿Cuál es su carga si se conecta a una diferencia de potencial de 14 V?

c) ¿Cuánta energía almacena?

12.4. Corriente y resistencia eléctrica.

Algunos materiales permiten el flujo de electrones a través de ellos cuando se les conecta una diferencia de potencial (batería). La función de la batería es la de proporcionar la energía para efectuar el trabajo necesario para posicionar a los electrones en un potencial más alto y que estos fluyan a través de un circuito.

El número de electrones por unidad de tiempo que fluyen depende de la resistencia del material. La resistencia eléctrica disminuye cuando el área del conductor es más grande y se incrementa con la longitud del conductor. A mayor resistencia menor el flujo de electrones.

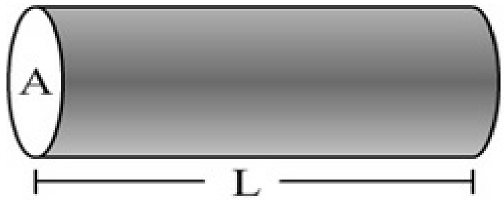


Figura 5.9: Parámetros geométricos de un conductor cilíndrico.

Las unidades para medir la corriente eléctrica son los Amperes.

$$1Ampere = \frac{1Coulomb}{1seg}$$

Indicando que en un segundo circulará un Coulomb de carga.

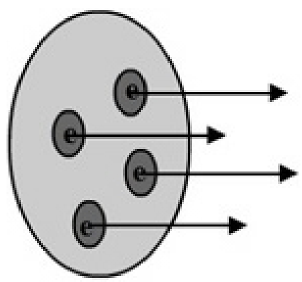


Figura 5.10: Vista transversal de un conductor, donde fluyen electrones.

La ecuación para calcular la resistencia de un material es la siguiente:

$$R = \frac{L}{\sigma A}$$

dónde:

σ es la conductividad del material. La Tabla que se muestra a continuación, contiene los valores de conductividad para algunos metales.

A es el área transversal del conductor

L es la longitud.

Material Conductor	Conductividad $(\sigma) S/m$
Oro	$4{,}55 \times 10^7$
Plata	$6{,}30 \times 10^7$
Cobre	$5{,}96 \times 10^7$

Conductividades para diferentes materiales conductores.

Ejemplo 5.4.- *¿Cuál es la resistencia de un conductor de Cobre de calibre 12 (0.081 pulgadas de diámetro) y una longitud de 3 pulgadas?*

El área y la longitud en metros son $3{,}325 \times 10^{-6} m^2$ y $0{,}076m$ respectivamente. Sustituyendo, se tiene:

$$R = \frac{L}{\sigma A} = \frac{0{,}076m}{5{,}96 \times 10^7 S/m * (3{,}325 \times 10^{-6} m^2)} = 3{,}835 \times 10^{-4} \Omega$$

Ejercicio de Taller:

1.- ¿Cuál debe ser el área de un conductor de plata para que con una longitud de 15 cm tenga una resistencia eléctrica de $5 \times 10^{-3} \Omega$?

2.- Calcula la resistencia del conductor si el material es Cobre. (Ver Figura 5.11).

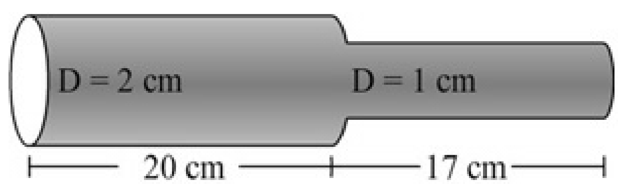


Figura 5.11: Ilustración para el Problema 2.

12.5. Ley de Ohm.

Cuando activamos el interruptor para encender una lámpara, se le aplica una diferencia de potencial que inyecta energía para que los electrones fluyan a través del conductor y de la lámpara. La cantidad de carga, número de electrones, que fluyen depende de la diferencia de potencial (el voltaje aplicado) y de la resistencia del material o del dispositivo.

Es común en el análisis de circuitos eléctricos emplear esquemas que indiquen las conexiones entre los dispositivos. Para cada dispositivo se tiene un símbolo, en la *Figura 5.12* se observa la conexión entre una batería y un foco, éste se representa como un resistor que en este caso absorbe la energía de la fuente y la transforma en luz y en calor. La corriente se representa con una flecha e indica el sentido contrario al flujo de los electrones.

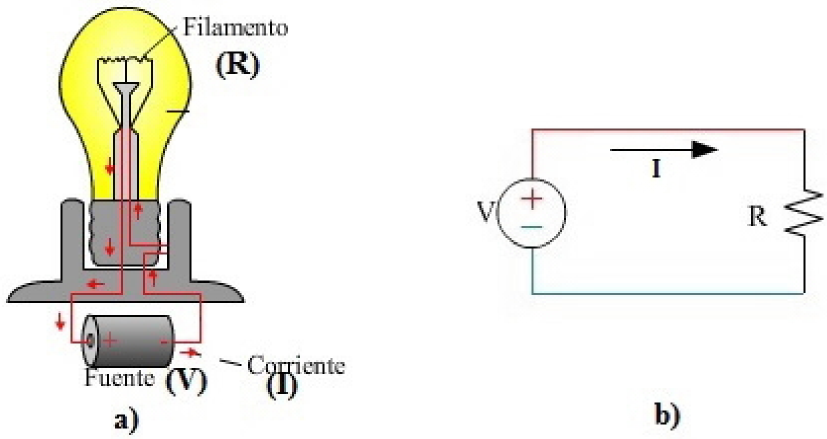


Figura 5.12: (a) Un foco conectado a una batería. (b) Un circuito que esquematiza las conexiones.

La ley que establece la relación entre los parámetros mencionados es la Ley de Ohm que enuncia:

"La intensidad de corriente en un circuito es directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicada e inversamente proporcional a la resistencia entre las terminales".

La ecuación que representa dicha relación es:

$$I = \frac{V}{R}$$

Dónde:

I es la intensidad de corriente en Amperes

V es el voltaje aplicado o diferencia de potencial en Volts

R es la Resistencia del circuito en Ohms Ω

Otro parámetro es la potencia eléctrica que se calcula con la siguiente ecuación:

$$P = VI$$

E indica la rapidez con la que se entrega o absorbe la energía eléctrica.

Ejemplo 5.5.- *Para el siguiente circuito. Calcular:*

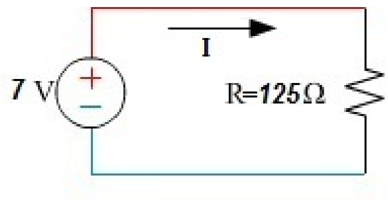


Figura 5.13: Ilustración para el Ejemplo 5.5.

a) La corriente que fluye a través del circuito.
b) La potencia que absorbe el resistor
c) La potencia que entrega la fuente
d) ¿Cuál debe ser el valor de la resistencia para que la fuente entregue el doble de potencia?

La corriente se calcula con la Ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{7V}{125\Omega} = 0{,}056A = 56mA$$

Para la potencia que absorbe el resistor:

$$P = VI = (7V)(0{,}056A) = 0{,}392Watt$$

La potencia que absorbe el resistor es la misma que suministra la fuente, por lo que $P_{fuente} = P_{resistor} = 0{,}392Watt$.

Para el doble de la potencia se calcula la corriente que debe circular por el resistor:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{2 * 0{,}392}{7} = 0{,}112A$$

Por lo tanto el valor de resistencia que permite esa corriente es:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{7V}{0{,}112A} = 62{,}5\Omega$$

Ejercicio de Taller: *Calcula los parámetros eléctricos solicitados.*

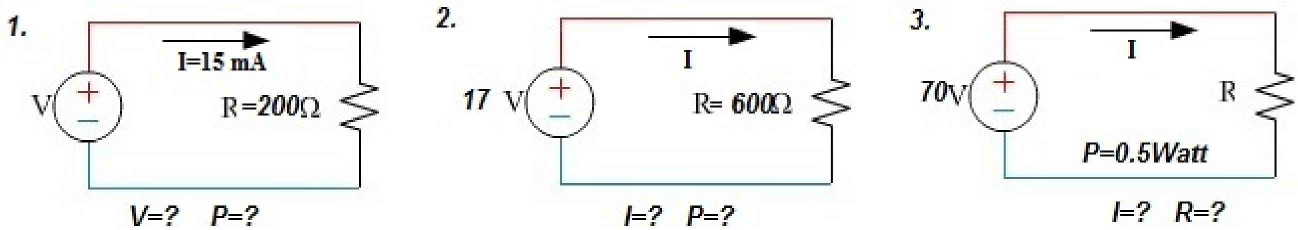


Figura 5.14: Circuitos para la sección de ejercicios Taller.

12.6. Resistencias en serie y paralelo.

Existen dos tipos de conexiones principales: la conexión en serie y en paralelo. Las luces que utilizamos en navidad tienen una conexión de tipo serie, si uno de los elementos se daña el circuito queda abierto y la corriente ya no puede circular. Los aparatos electrónicos que utilizamos en nuestro hogar tienen una conexión en paralelo, de esa forma todos ellos tienen la misma diferencia de potencial y cada uno puede demandar cierta intensidad de corriente.

Ejemplo 5.6.- *El siguiente circuito consta de una conexión en serie de los 3 resistores. Calcula el voltaje, corriente y potencia en cada resistor.*

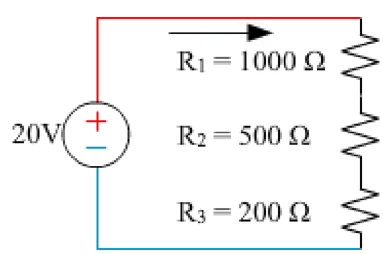


Figura 5.15: Resistores conectados en serie.

En una conexión en serie:

A través del circuito circula sólo una corriente.

El voltaje de la fuente se distribuye entre los resistores. (Hay caídas de tensión en cada resistor)

La sumatoria de voltajes de cada resistor debe ser igual a Va. En este caso 20V.

La resistencia equivalente se calcula como:

$$Req = R1 + R2 + R3 \ldots + Rn$$

Se simplifica el circuito mediante el cálculo de una resistencia equivalente.

$$Req = 1000\Omega + 500\Omega + 200\Omega = 1700\Omega$$

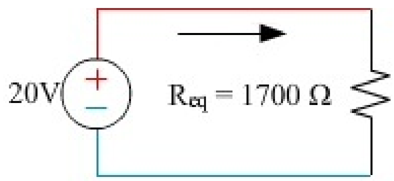


Figura 5.16: Resistor equivalente de la conexión en serie.

Se calcula la corriente que circula por el resistor equivalente. Como conocemos dos parámetros de este circuito, voltaje y resistencia, podemos utilizar la Ley de Ohm para calcular la corriente que circula por los resistores.

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{20V}{1700\Omega} = 0{,}01176A = 11{,}76mA$$

En un circuito en serie la corriente que atraviesa cada resistor es la misma, por lo que:

$$V_1 = R_1 I = (11{,}76mA)(1000\Omega) = 11{,}76V$$

$$V_2 = R_2 I = (11{,}76mA)(500\Omega) = 5{,}88V$$

$$V_3 = R_3 I = (11{,}76mA)(200\Omega) = 2{,}35V$$

Notemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} V_i \approx Va$$

$$11{,}76V + 5{,}88V + 2{,}35V = 19{,}99V \approx Va$$

Se calcula la potencia de cada resistor.

$$P_1 = V_1 I = (11{,}76V)(11{,}76mA) = 0{,}1368watts$$

$$P_2 = V_2 I = (5{,}88V)(11{,}76mA) = 0{,}06914watts$$

$$P_3 = V_3 I = (2{,}35V)(11{,}76mA) = 0{,}02749watts$$

Realizando la sumatoria de potencias concluimos que la fuente entrega:

$$0{,}23343watts = 233{,}43mW$$

Ejercicios de Taller: *Calcular para cada resistor, voltaje, corriente y potencia absorbida; así como la potencia que entrega la fuente.*

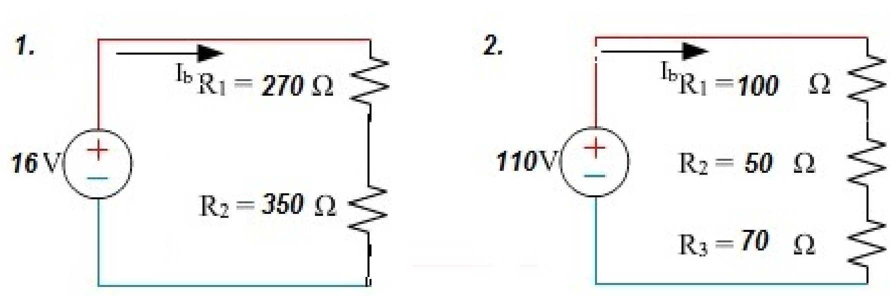


Figura 5.17: Circuitos para los ejercicios de Taller.

Ejemplo 5.7.- *Considera el siguiente circuito en paralelo de los 3 resistores y calcula la corriente que circula por cada resistencia.*

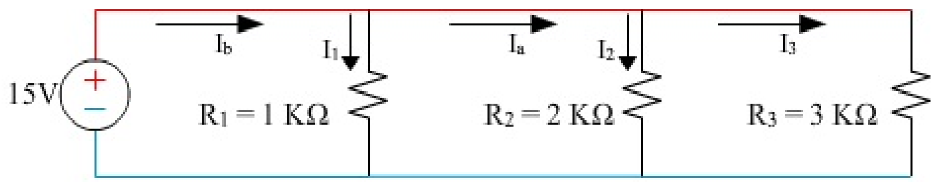


Figura 5.18: Conexión en paralelo.

En un circuito en paralelo:

La corriente que suministra la fuente se distribuye entre los resistores. De tal forma que:

$$I_b = I_1 + I_2 + I_3$$

La caída de tensión (voltaje) es la misma en cada dispositivo.

La resistencia equivalente se calcula:

$$Req = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots \frac{1}{Rn}}$$

Se simplifica el circuito mediante el cálculo de la resistencia equivalente:

$$Req = \frac{1}{\frac{1}{1000\Omega} + \frac{1}{2000\Omega} + \frac{1}{3000\Omega}} = 545{,}45\Omega$$

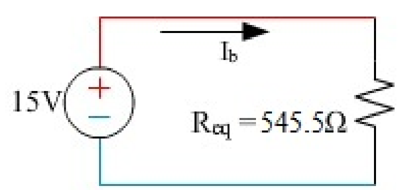


Figura 5.19: Resistencia equivalente de una conexión en paralelo.

Se calcula la corriente que circula por el resistor equivalente (I_b).

Como se conocen los parámetros de voltaje y resistencia del circuito, se puede utilizar la Ley de Ohm para calcular la corriente que circularía por el resistor equivalente y que también corresponde a la corriente que entrega la fuente.

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{15V}{545{,}45\Omega} = 0{,}0275A = 27{,}5mA$$

Como todos los resistores tienen la misma diferencia de potencial se puede calcular la corriente que fluye a través de cada uno:

$$I_1 = \frac{15V}{1000} = 15mA$$

$$I_2 = \frac{15V}{2000} = 7{,}5mA$$

$$I_3 = \frac{15v}{3000} = 5mA$$

Para la potencia eléctrica que absorbe cada resistor, se tiene:

$$P_1 = (15V)(15mA) = 25mW$$

$$P_2 = (15V)(7{,}5mA) = 112{,}5mW$$

$$P_3 = (15V)(5mA) = 75mW$$

Por tanto, la potencia que entrega la fuente es:

$$\sum_{i=1}^{3} P_i = 212{,}5mW$$

Ejercicios de Taller: *Calcular la corriente y la potencia en cada resistor; así como la corriente que entrega la fuente de energía.*

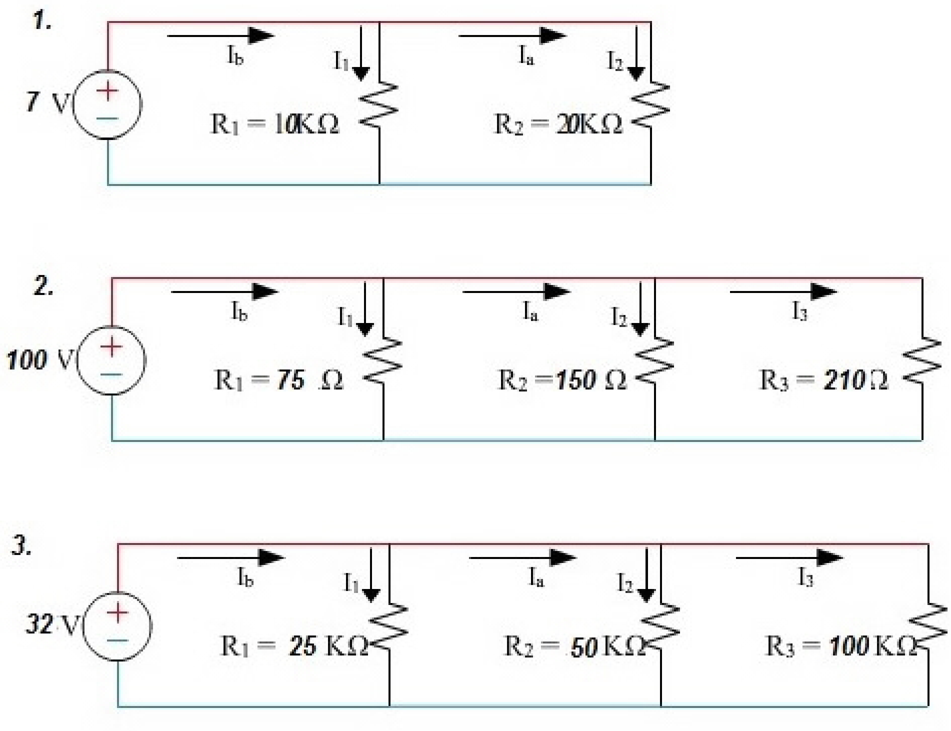
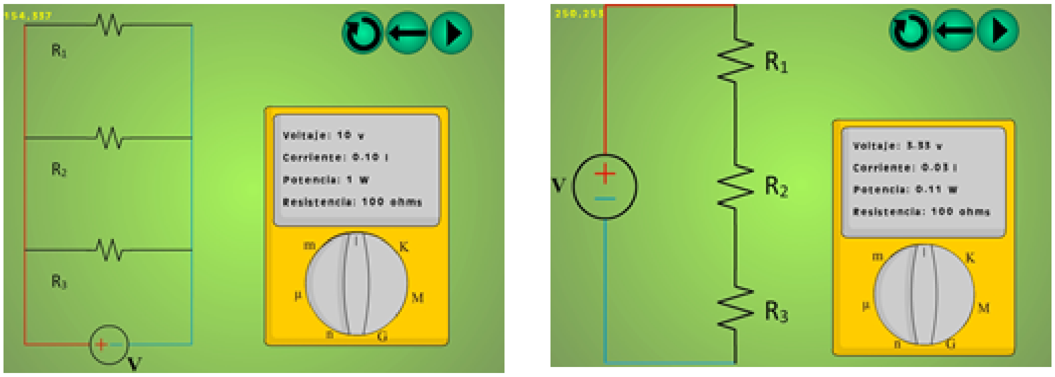


Figura 5.20: Circuitos para los Ejercicios de Taller.

Ejercicios de Tarea:

4.- Simula en NEWTON-1 los circuitos serie y paralelo. Escribe conclusiones.



(a) (b)

FIGURA- Ambiente de NEWTON-1

Capítulo 13

Apéndices

Apéndice A

Examen Diagnóstico de Aritmética

Instrucciones. Responda correctamente lo que se pide en cada reactivo sin el uso de calculadora. Auxíliese del material audiovisual del sitio web YouTube: buscar nuestro canal de nombre C*urso Propedeutico UABC*, en la lista de reproducción de nombre *Conocimientos básicos*

1. Realice la siguiente operación $3 + 2 - 10 + 4 - 1 =$

   $A) -2 \quad B) -5 \quad C)\ 2 \quad D)\ 5$

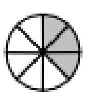
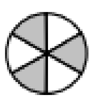
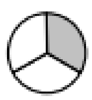
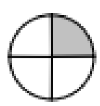
2. Realice la siguiente operación $4 + 10 \div 2 - 3 \times 5 + 7$

   $E)\ 27 \quad F)\ -27 \quad G)\ 1 \quad H)\ 8$

3. De los siguientes números: 0, $1/2$, $-1{,}5$, -2, ¿cuál es el menor?

   $A)\ 0 \quad B)\ 1/2 \quad C)\ -1{,}5 \quad D) -2$

4. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene la misma fracción sombreada que el rectángulo de la figura A.1?

   $E)$  $F)$  $G)$  $H)$ 

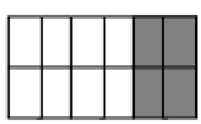


Figura A.1. Problema 4.

5. ¿Cuál de las siguientes relaciones es correcta?

   $A)\ \dfrac{3}{7} > \dfrac{7}{3} \quad B)\ \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{4} \quad C)\ \dfrac{-2}{5} > 0 \quad D)\ 0 < \dfrac{1}{20}$

6. Realice la operación $2(3)^2 + 4(-2) =$

   E) 10   *F*) -44   *G*) 4   *H*) 28

7. Realice la operación $\frac{1}{8} - \frac{1}{2} =$

   A) $\frac{3}{-8}$ *B*) $\frac{8}{3}$ *C*) $\frac{1}{6}$ *D*) $\frac{3}{5}$

8. Resolver para x de la siguiente ecuación: $(2x-3)^2 = 49$

   E) 7   *F*) 7.5   *G*) 4   *H*) 5

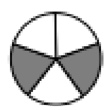
9. Si un alumno obtiene una calificación aprobatoria en 2 de cada 7 examenes, ¿cuántas calificaciones aprobatorias puede esperar obtener en 28 examenes?

   A) 4   *B*) 14   *C*) 8   *D*) 7

10. Si una secretaria puede mecanografiar 5 páginas de texto en 3 minutos ¿cuántas paginas puede procesar en 1 hora?

    E) 15   *F*) 100   *G*) 180   *H*) 300

11. ¿Que porcentaje del círculo está sombreado?



    A) 16 %   *B*) 25 %   *C*) 30 %   *D*) 40 %

12. Usualmente 6 de los 28 pacientes citados para un día cualquiera faltan a su cita. ¿Aproximadamente que porcentaje de los paciente asiste en un día?

    E) 22 %   *F*) 85 %   *G*) 79 %   *H*) 100 %

13. El largo de un rectánculo es 3 pies mayor que su ancho. Si L representa su largo, ¿cuál de las siguientes expresiones representa su ancho?

    A) $\frac{L}{3}$ *B*) $L-3$ *C*) $3L$ *D*) $L+3$

14. Realice la sigueinte operación $\frac{3}{5} + 2\frac{3}{4} =$

    E) $\frac{70}{20}$ *F*) $\frac{67}{20}$ *G*) $\frac{54}{20}$ *H*) $\frac{3}{20}$

15. Realice la operación $\left(\frac{3}{8}\right)\left(1\frac{3}{2}\right) =$

$A)\ \frac{15}{16} \quad B)\ \frac{3}{16} \quad C)\ \frac{8}{16} \quad D)\ \frac{9}{16}$

16. Realice la operación $\left(\frac{9}{5}\right)\left(\frac{3}{6}\right) =$

$E)\ \frac{9}{10} \quad F)\ \frac{27}{16} \quad G)\ \frac{5}{16} \quad H)\ \frac{1}{2}$

17. Realice la operación $\frac{6}{8} \div \frac{4}{7} =$

$A)\ 3\frac{1}{4} \quad B)\ \frac{21}{16} \quad C)\ \frac{13}{23} \quad D)\ \frac{24}{56}$

18. Realice la operación $1\frac{5}{7} \div \frac{-5}{6} =$

$E)\ 2\frac{3}{4} \quad F)\ 3 \quad G)\ \frac{-6}{7} \quad H)\ \frac{3}{7}$