Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería, Campus Mexicali

Curso Propedéutico

22 de julio de 2012

# Índice

# 1. Sistema de los números reales

En este capítulo abordaremos de manera breve las notaciones que se utilizan en el estudio y tratamiento de los conjuntos, ya que estos juegan un papel importante en el análisis de las matemáticas, puesto que proporcionan las bases para comprender algunos de los aspectos de la teoría de la probabilidad, además se tratará con especial atención el conjunto de los números reales.

## 1.1. Definición y notación de conjuntos

En las matemáticas podemos definir a un conjunto, como una colección o listado de objetos con características bien definidas que lo hace pertenecer a un grupo determinado.

A los conjuntos se les representa con letras mayúsculas A, B, C, y a los elementos con letras minúsculas a, b, c, entendiendo por elementos de un conjunto a todos aquellos objetos que forman a dicho conjunto.

Un conjunto generalmente se describe listando todos sus elementos entre llaves { }, como se muestra en el Ejemplo 1.1. Otra forma de denotar un conjunto es con una regla entre llaves, como el Ejemplo 1.2, generalmente esta segunda notación se utiliza cuando los elementos del cunjunto son demasiados.

**Ejemplo 1.1** *Definamos el conjunto $B$ cuyos elementos son el* 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \tag{1}$$

Para describir si un elemento pertenece a un conjunto se utiliza el símbolo de pertenencia $\in$, en caso contrario se emplea el símbolo $\notin$. Por ejemplo, para el conjunto (1) se puede establecer:

$2 \in B$ (Significa "2 es un elemento del conjunto $B$").

$7 \notin B$ (Significa "7 no es un elemento del conjunto $B$").

**Ejemplo 1.2** *Definamos al conjunto $A$, cuyos elementos son los dias del fin de semana, y su regla encerrada entre llaves de acuerdo a la figura 1 se lee de la siguiente manera:*

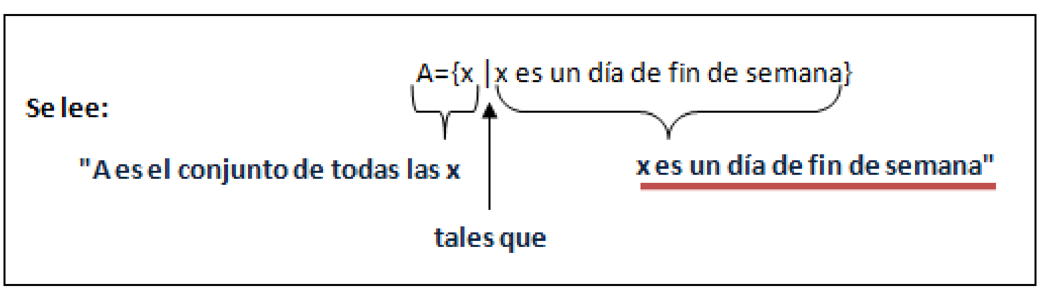


Figura 1: Notación de un conjunto.

Se busca aquellos elementos que cumplan con la regla: $x$ es un día de fin de semana, por lo cual los elementos del conjunto $A$ son {Sábado, Domingo}.

**Ejemplo1.3** *Otra forma de como definir un conjunto $A$, cuya regla se encuentra encerrada entre llaves, de acuerdo a la figura 2:*

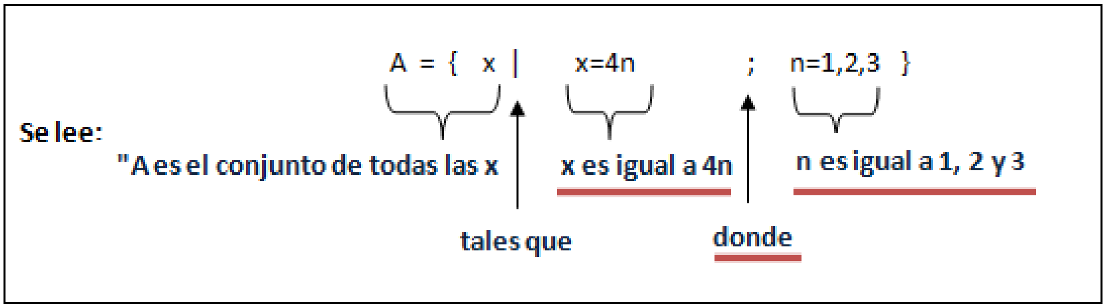


Figura 2: Notación de un conjunto.

¿Cuál es la diferencia que se observa entre el Ejemplo 1.2 y Ejemplo 1.3?. En este ejemplo se buscan aquellos elementos que cumplan con la regla: $x = 4n$; $n = 1, 2, 3$, que a diferencia del ejemplo anterior, en este caso, la regla debe cumplir la conidición para $n$, por tanto los elementos del conjunto $A$ son $\{4,\ 8,\ 12\}$ ya que $4\,(1) = 4$, $4\,(2) = 8$ y $4\,(3) = 12$.

**Ejercicios de Taller**

1. Liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

*a) El conjunto* $C = \{x \mid x\ es\ un\ municipio\ de\ Baja\ California\}$

*b) El conjunto* $A = \{x \mid x\ es\ un\ número\ entero\ entre\ 1\ y\ 5\}$

*c) Sea el conjunto $A$ definido como:* $A = \{1, 5, 6, 7, 8\}$.

*Determine si las siguientes proposiciones son correctas:*

*i.* $2 \in A$

*ii.* $20 \in A$

*iii.* $5 \notin A$

*2. Utilice la notación de los conjuntos para expresar el conjunto dado.*

*d) El conjunto de los enteros negativos mayores que -4.*

*e) El conjunto de los enteros pares.*

*f) El conjunto de los enteros múltiplos de 6.*

*3. Use el método de la regla para describir el conjunto de los números impares negativos.*

### 1.1.1. Tipo de Conjuntos

**Conjunto Vacío o Nulo:** Es aquel que no tiene elementos y se simboliza por $\phi$ ó { }. Por ejemplo;

$B$={ } y $B$=$\phi$, significan que el conjunto $B$ no tiene elementos.

**Nota** *Es común atribuir las notaciones B={0} ó B=0, a un conjunto vacío, lo cual es incorrecto. En el caso B={0}, establece que el conjunto B consta de un sólo elemento, siendo el número 0, en el segundo caso B=0, no se podría afirmar que hablamos de un conjunto.*

**Conjunto Universal:** Es el conjunto de todos los elementos del contexto al que se hacer referencia, se denota con $U$.

**Ejemplo 1.4** Sea el conjunto universal $U = \{Animales\ vertebrados\}$, defina cuatro conjuntos cuyos elementos formen parte de este universo.

$A = \{Aves\}$, $B = \{Peces\}$, $C = \{Conejos\}$ y $D = \{Monos\}$.

Un conjunto que no cumple esta condición es $E = \{Gusanos\}$.

**Ejercicios de Taller**

*1. Sean los conjuntos A y B definidos como:* $A = \{Mercurio,\ Venus,\ Marte\}$ *y* $B = \{Tierra,\ Saturno,\}$*, determine lo siguiente.*

*i. ¿Cuál es el conjunto Universal en este contexto?*

*ii. Defina un conjunto con los elementos restantes del Universo propuesto.*

### 1.1.2. Relaciones entre Conjuntos

**Igualdad de Conjuntos:** Se tienen dos conjuntos $A$ y $B$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3, 1, 4\}$, si ambos tienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento que pertenece a $A$ también pertenece a $B$ y si cada elemento que pertenece a $B$ pertenece también a $A$. Se dice que ambos conjuntos son iguales y se denota de la forma:

$$A = B$$

**Nota** *No importa el orden de los elementos si no que ambos conjuntos tengan los mismos elementos. Además, en teoría de conjuntos no es necesario repetir los elementos, por ejemplo:*

$$\textit{El conjunto } \{b, b, b, d, d\} \textit{ se escribe } \{b, d\}.$$

**Subconjunto:** Se tiene dos conjuntos $A$ y $B$, donde $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si todo elemento de un conjunto $A$ es también elemento de un conjunto $B$, entonces se representa

$$A \subset B, \text{ donde se lee } .^{\text{el}} \text{ conjunto } A \text{ es un subconjunto del conjunto } B".$$

**Nota** *De acuerdo con esta definición se puede decir que:*

•*Un conjunto es subconjunto de sí mismo*

•*El conjunto vacio es un subconjunto de todo conjunto, ya que no podemos encontrar elementos en el conjunto vacío que no estén en A.*

**Ejemplo 1.5** *Dado los siguientes conjuntos :*

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 7,\ 3,\ 3\}$

$B = \{1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 3,\ 7\}$

$C = \{1,\ 2,\ 5\}$

$D = \{\phi\}$

*Determine cual de las siguientes proposiciones es correcta.*

*i. El conjunto* $A = B$. *(Correcta)*

*ii. El conjunto* $C = A$. *(Falsa)*

*iii. El conjunto* $C \subset A$. *(Correcta)* *iv. El conjunto $C \subset C$.* *(Correcta)*

*v. El conjunto $D \subset C$.* *(Correcta)*

**Ejercicios de Taller**

*1. Dados los siguientes conjuntos determine, ¿cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?*

*a)* $A = \{1,\ 3\}$.

*b)* $B = \{x \mid x \text{ es un número de un dado}\}$.

*c)* $C = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$.

*d)* $D = \{x \mid x \text{ es el número de caras que se obtiene al lanzar } 6 \text{ monedas}\}$.

### 1.1.3. Operaciones con conjuntos

Las operaciones de conjuntos se pueden representar gráficamente en un plano mediante Diagramas de Venn. En dichos diagramas el conjunto universal U se representa por un rectángulo, cualquier otro conjunto se representa con un círculo. Una operación se representa mediante el sombreado de los elementos del conjunto, ver figura 3.

**Unión de Conjuntos:** La unión de dos conjuntos cualesquiera $A$ y $B$, expresada por $A\cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a $A$ ó pertenecen a $B$. En forma simbólica:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

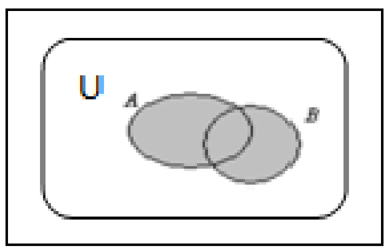


Figura 3: Diagrama de Venn de la unión de dos conjuntos.

**Ejemplo 1.6** *Se tiene los siguientes conjuntos:* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ y $C = \{5, 9, 1\}$ *entonces:*

*Realice las siguientes operaciones:*

*i.* $A \cup B$ $\quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

*ii.* $A \cup C$ $\quad A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 9\}$.

*iii.* $\{x \mid x \in B \text{ ó } x \in C\}$ $\quad B \cup C = \{1, 4, 5, 6, 9\}$.

**Intersección de Conjuntos:** La intersección de dos conjuntos cualesquiera $A$ y $B$, expresada por $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a $A$ y a $B$ simultáneamente. En forma simbolica:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\},$$

**Ejemplo 1.7** *Se tienen los siguientes conjuntos:* $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B = \{2,\ 2,\ 4,\ 9\}$ *y* $C = \{9\}$, *entonces:*

*Realice las siguientes operaciones:*

*a)* $A \cap B$. $\quad A \cap B = \{2, 4\}$

*b)* $B \cap C$. $\quad B \cap C = \{9\}$

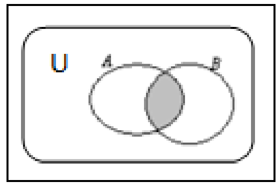


Figura 4: Diagrama de Venn de la intersección de dos conjuntos.

*c)* $\{x \mid x \in A \text{ y } x \in C\}$. $\quad A\cap C = \{\phi\}$ *(Conjunto Vacio)*

**Ejercicios de Taller**

*1. Dados los siguientes conjuntos:* $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ , $B = \{0, 2, 6, 8, 10\}$*y* $C = \{1, 3, 5, 7, 11\}$ *determine:*

*a)* $A\cup B$.

*b)* $A \cap B$.

*c)* $A \cup C$.

*d)* $B\cap C$.

**Ejercicios de Tarea**

*1. Liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:*

*a) El conjunto de números enteros que se encuentran entre* 2 *y* 30*, y que son divisibles por* 7*.*

*b) El conjunto* $A = \{x \mid 2x - 1 = 5\}$.

*c) El conjunto* $B = \left\{x \mid x^2 + 4x - 5 = 0\right\}$.

*d) Sean los conjuntos* $A$ *y* $B$ *definidos como:* $A = \{1, 5, 6, 7, 8\}$ *y* $B = \{1, 1, 6, 7, 10, 20\}$*. Determine lo siguiente:*

*i. ¿Cuáles son los elementos que pertenecen al conjunto* $A$ *y al conjunto* $B$*?*

*ii. Establezca si la proposición* $10 \notin B$ *es correcta.*

*2. Utilice la notación de los conjuntos para expresar el conjunto dado.*

*a) El conjunto de los números reales cuyo cuadrado es* 25*.*

*b) El conjunto de los enteros positivos impares.*

*3. Sean los conjuntos* $A$ *y* $B$ *definidos como:* $A = \{Domingo, Lunes\}$ *y* $B = \{Martes, Jueves, Viernes\}$*, determine lo siguiente.*

*a) ¿Cuál es el conjunto Universal en este contexto?.*

*b). ¿Cuál es la intersección de los conjuntos* $A$ *y* $B$*?.*

*c). ¿Cuál es la unión de los conjuntos* $A$ *y* $B$*?.*

*4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?*

$A = \{2, 3, 4\}$.

$B = \{x \mid x \text{ es un número entre uno y cinco}\}$.

$C = \left\{x \mid x^2 - 3 = 0\right\}$.

$D = \{x \mid x \text{ es un conjunto vacío}\}$.

*5. Dados los siguientes conjuntos:* $A = \{a, b, c, d, e, f, f, g, m\}$ , $B = \{y, f, m\}$*y* $C = \{h, i, j, k, l, m\}$ *determine:*

*i.* $A\cap B$.

*ii.* $A \cup C$.

*iii.* $A \cup B \cap C$.

*iv.* $B \cap C \cap C$.

*6. Use la notación de la regla de conjuntos, para definir el conjunto de los números pares.*

*7. Use la notación de la regla de conjuntos, para describir el conjunto que consta de los siguientes puntos:* $P_1(2,7)$, $P_2(4,11)$ *y* $P_3(6,15)$.

## 1.2. Los números reales y la recta real

**Los números reales.**

La Tabla 1 y la figura 5 descomponen el sistema de los números reales en sus subconjuntos importantes y muestran cómo estos subconjuntos están relacionados entre sí.

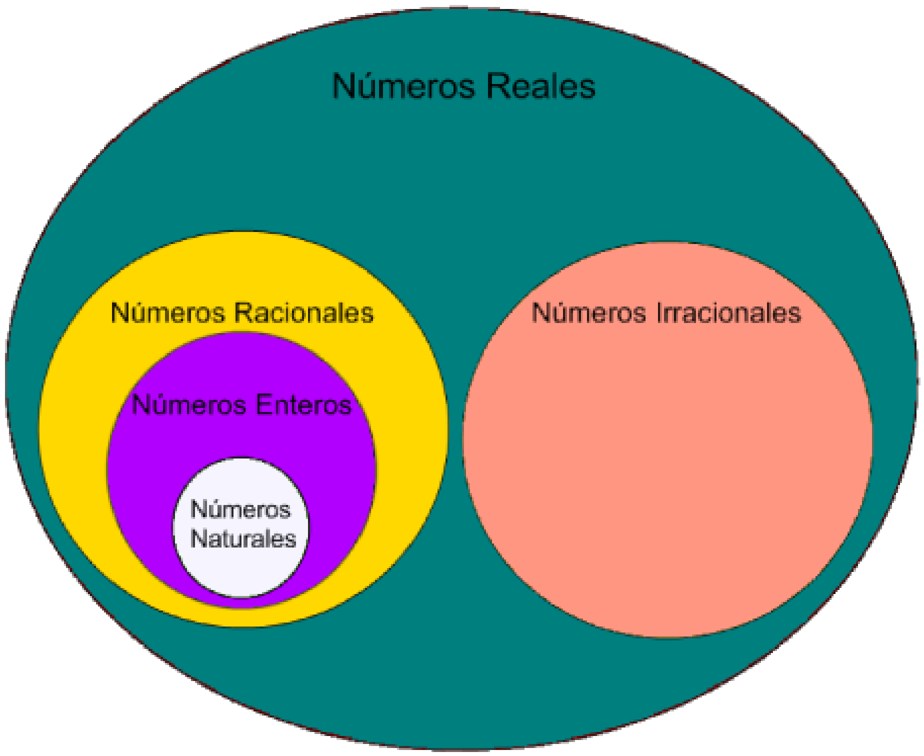


Figura 5: El conjunto de los números reales y sus subconjuntos más importantes.

| Símbolo | Conjunto de Números | Descripción | Ejemplos |
|---|---|---|---|
| N | Naturales | Son los números para contar (también se llaman enteros positivos) | $1, 2, 3, ...$ |
| Z | Enteros | Es el conjunto de los números naturales, los enteros negativos y cero. | $.., -2, -1, 0, 1, 2, ...$ |
| Q | Racionales | Cualquier número que pueda representarse como el cociente de dos enteros a/b , donde b$\neq$0. Los números racionales se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales que se repiten, llamados "números finitos o decimales periódicos infinitos", tales como $\frac{1}{3} = 0{,}333..$ | $-4, -\frac{3}{5}, 0, 7, \frac{2}{3}, 1.62$ |
| R | Reales | El conjunto de todos los números racionales e irracionales | $\frac{-3}{5}, 0, \pi, -4$ |
| $\Pi$ | Irracionales | Es cualquier número real que no puede expresarse como el cociente de dos enteros y se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales que no siguen un periodo definido, llamados "decimales infinitos no periódicos", tales como $\pi$ o 2.71828182..... | $\pi, \varrho$ |

(Tabla 1)

**Ejemplo 1.8** *De acuerdo con la figura 5, los números racionales e irracionales son subconjuntos de los números reales, es decir que los números reales estan conformados tanto por los números racionales como por los irracionales. Siguiendo esta forma de representación se puede notar que los números racionales están compuestos por los números enteros y estos a su vez por los números naturales. De esto podemos concluir que:*

*a) Es verdadero"decir que, "Todo número entero es un número racional y real.*

*b) Es verdadero"decir que, "Todo número decimal infinito es irracional y real.*

*Los números racionales son expresados por decimales periódicos (se repiten) ó por decimales finitos (terminan), mientras que los números irracionales son expresados por decimales infinitos no periódicos (no terminan o no se repiten), como se muestra en tabla siguiente:*

**Ejemplo 1.9** *De acuerdo con la tabla anterior, defina cuales de los números son racionales y/o cuales irracionales, dé sus argumentos:*

*a)* $-2{,}6$ *Es un número Racional, ya que es un decimal finito, que puede ser representado como el cociente de dos números enteros* $\frac{-13}{5}$*, donde el denominador tiene que ser diferente de cero.*

*b)* $\frac{-7}{11}$ *Es un número Racional, ya que puede ser representado como el cociente de dos números enteros* $\frac{-7}{11} = 0{,}63\bar{}\,\overline{63}\,...$*, cuyo decimal es periódico.*

*c)* $\frac{5}{4}$ *Es un número Racional, ya que puede ser representado como el cociente de dos números enteros* $\frac{5}{4} = 1{,}25$*, cuyo decimal es finito.*

*d)* 4,5 *Es un número Racional, ya que es un decimal finito, que puede ser representado como el cociente de dos números enteros* $\frac{9}{2}$*, donde el denominador tiene que se diferente de cero.*

*e)* $\sqrt{2}$ *Es un número Irracional, ya que* $\sqrt{2} = 1{,}414213562373095..$*,cuyo decimal es infinito no periódico.*

*f)* $e$ *Es un número Irracional, ya que el valor de* $e$ *es decimal infinito no periódico.*

*g)* $\pi$ *Es un número Irracional, ya que el valor de* $\pi$ *es decimal infinito no periódico.*

**La Recta Real o Eje X.**

Para representar el conjunto de los números reales usamos un sistema de coordenadas que se llama Recta Real o eje X, ver figura 6.

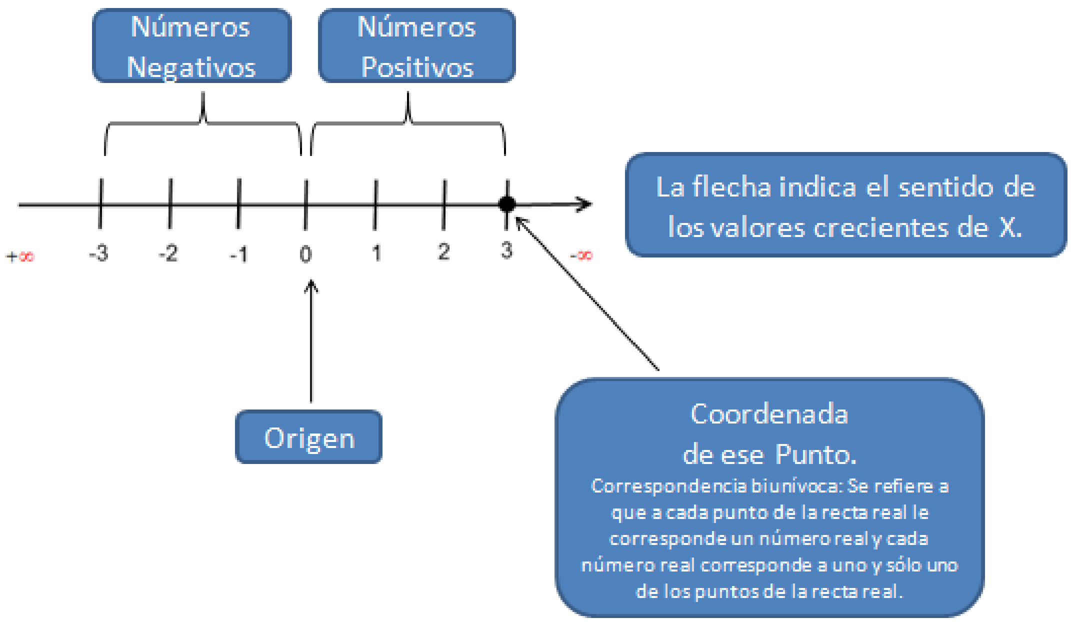


Figura 6: El conjunto de los números reales.

**Ejercicios de Tarea**

*1. Clasifique los números (decimal finito, decimal repetitivo infinito, decimal no repetitivo infinito) que se presentan a continuación.*

*a)* $-5$

*b)* $\sqrt{16}$

*c)* $\frac{7}{5}$

*d)* $4\pi$

*e)* $\frac{1}{\sqrt{2}}$

*f)* $\frac{-3}{\sqrt{3}}$

*g)* $\frac{-11}{12}$

*h)* $\sqrt{2}\sqrt{8}$

*i)* $\sqrt{32}\sqrt{8}$

*j)* 0

*k)* $\frac{1}{9}$

*l)* $\frac{1}{17}$

*2. Conteste falso o verdadero a las siguientes proposiciones:*

*a) Todo número irracional es un número real.*

*b) Todo número natural es un número entero.*

*3. Clasifique los siguientes subconjuntos como reales, enteros, naturales, racionales o irracionales.*

*a)* $\{3,\ 5,\ 0,\ 10,\ 100\}$

*b)* $\left\{-2,\ 2,\ \sqrt{5},\ \frac{1}{4}\right\}$

*c)* $\left\{\ln 2,\ -\sqrt{3},\ e,\ 5\pi\right\}$

*d)* $\{-1,-2,-3,3,2,1\}$

# 2. Propiedades del sistema de los números reales

Se le llama sistema de números reales al conjunto de números reales junto con las operaciones de la adición $(+)$, sustracción $(-)$, división $(/)$ y multiplicación (en aritmética suele representarse con $\times$, en algebra suele representarse con un punto ó con los factores encerrados entre paréntesis). En álgebra existen reglas básicas para este sistema, las cuales nos permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para encontrar respuestas a preguntas matemáticas.

En este sección se abordaran las propiedades básicas del sistema de los números reales para dichas operaciones matemáticas.

## 2.1. Propiedades

**Propiedades para la Adición y Multiplicación**

Si $a$, $b$ y $c$ representan números reales,

| Propiedades | Adición | Multiplicación |
|---|---|---|
| 1. Ley Clausurativa | $a+b$ es un número real | $a \cdot b$ es un número real |
| 2. Ley asociativa | $a+(b+c)=(a+b)+c$ | $a\,(b\cdot c)=(a\cdot b)\,c$ |
| 3. Ley Conmutativa | $a+b=b+a$ | $a\cdot b=b\cdot a$ |
| 4. Propiedad Identidad | El número real 0 es llamado identidad aditiva, ya que para todo número real $a$: $a+0=a=0+a$ | El número real 1 es llamado identidad multiplicativo, ya que para todo número real $a$: $a\cdot 1=a=1+a$ |
| 5.Propiedad del Inverso Aditivo y del Recíproco | Para todo número real $a$ existe un único número real llamado negativo o inverso aditivo de $a$ representado por $-a$ de tal manera que: $a+(-a)=0=(-a)+a$ | Para todo número real diferente de cero existe un único número real llamado recíproco ó inverso multiplicativo de "$a$" representado por $\frac{1}{a}$ de tal forma que: $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1=\left(\frac{1}{a}\right)\cdot a$ |
| 6.Propiedad Distributiva | a) $a\,(b+c)=ab+ac$<br>b) $(a+b)\,c=ac+bc$ | |
| 7.Ley cancelativa o Anulativa | a) Si $a+c=b+c$<br>b) Si $ac=bc\ y\ c\neq 0$ | entonces $a=b$.<br>entonces $a=b$. |
| 8.Ley de la multiplicación por cero | a) Si $a\cdot 0=0=0\cdot a$<br>b) Si $a\cdot b=0$ | <br>entonces $a=0\ ó\ b=0;\ ó$ ambas. |

**Propiedades para la Sustracción**

Entre las propiedades más importantes de la sustracción, relacionadas con los números negativos y fraccionarios se tiene:

| Propiedades de la sustracción | Ejemplo: |
|---|---|
| $a)\ -(-a)=a$ | $-(-2)=2$ |
| $b)\ -(ab)=-ab=a(-b)$ | $-(2\cdot 4)=-24=2(-4)$ |
| $c)\ -a=(-1)(a)$ | $-5=(-1)(5)$ |
| $d)\ (-a)(-b)=ab$ | $(-2)(-3)=(2\cdot 3)$ |

**Propiedades para las Fracciones**

A continuación se listan las propiedades para las fracciones $\frac{a}{b}\ y\ \frac{c}{d}$ ,donde los denominadores son diferentes de 0, ($b\neq 0$ y $d\neq 0$ ).

| Propiedades para las fracciones | Ejemplo: |
|---|---|
| 1. Fracciones Equivalentes | |
| $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$ | $\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$ Comprobamos que: $2 \cdot 21 = 42 = 3 \cdot 4$ |
| 2. Regla de Signos | |
| $-\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{-a}{b}\right) = \frac{a}{-b}$ | $-\left(\frac{4}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}\right) = \frac{4}{-2}$ |
| 3. Regla Cancelativa | |
| $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}; si\ c \neq 0$ | $\frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4}$ <br> Comprobamos que:$\frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{6}{12} = 0{,}5 = \frac{2}{4}$ |
| 4. Adición y sustracción con común denominador | |
| $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ | $\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = \frac{-1}{4}$ ó $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$ |
| 5. Adición y sustracción con distinto denominador | |
| $\frac{a}{d} \pm \frac{c}{b} = \frac{ab \pm dc}{db}$ | $\frac{2}{4} - \frac{3}{5} = \frac{(5 \cdot 2)-(4 \cdot 3)}{(4*5)} = \frac{(10)-(12)}{20} = \frac{-2}{20}$ ó <br> $\frac{2}{4} + \frac{3}{5} = \frac{(5 \cdot 2)+(4 \cdot 3)}{(4 \cdot 5)} = \frac{(10)+(12)}{20} = \frac{22}{20}$ |
| 6.Multiplicación | |
| $\frac{a}{d} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{db}$ | $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{(2 \cdot 4)}{(3 \cdot 5)} = \frac{8}{15}$ |
| 7.División | |
| $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}; c \neq 0, b \neq 0$ | $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{(2 \cdot 5)}{(3 \cdot 4)} = \frac{10}{12}; c \neq 0, b \neq 0$ |
| 8.División de cero y por Cero | |
| $0 \div b = \frac{0}{b} = 0; b \neq 0$ <br> $0 \div 0$; esta indefinido <br> $a \div 0 = \frac{a}{0}$; esta indefinido, porque el denominador debe ser diferente de cero | $0 \div 2 = \frac{0}{2} = 0; 2 \neq 0$ <br><br> $3 \div 0 = \frac{3}{0}$ |

**Ejercicios de Taller** *1. Realice las siguientes operaciones.*

*a)* $(-x)(-y) =$

*b)* $-z \cdot \frac{0}{5} =$

*c)* $\frac{w}{2-(5-3)} =$

*2. Aplique en cada caso la propiedad entre paréntesis.*

*a)* $(3+5)+2 =$ *(Propiedad asociativa de la adición)*

*b)* $(6+8)\,y =$ *(Propiedad conmutativa de la multiplicación)*

*c)* $(x+3)\,y+2 =$ *(Propiedad distributiva)*

*d)* $x\,(2+3) =$ *(Propiedad distributiva)*

*e)* $[(1)\,(2)]\,(3) = [(2)\,(1)]\,(3)$ *(Propiedad asociativa de la multiplicación)*

*4. Calcule los resultados de las siguientes operaciones*

*a)* $-(-a)(2-3) =$

*b)* $\frac{1}{3} + \frac{2}{7} =$

*c)* $\frac{2}{5} - \frac{1}{8} + \frac{3}{4} =$

**Propiedades para la Eliminación de los Símbolos de Agrupación (llaves, paréntesis y corchetes)**

En el proceso de simplificación de expresiones algebraicas se requiere de la eliminación de símbolos de agrupación, , empleando las propiedades que se enlistan a continuación:

*Propiedad 1.* Si el símbolo de agrupamiento está precedido por el signo (+) dicho símbolo puede ser eliminado sin modificar los términos que contiene.

**Ejemplo 2.1** *Realice la siguiente operación.*

$(1+2)+(3+4)=1+2+3+4=10$

**Ejemplo 2.2** *Realice la siguiente operación.*

$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{8}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{4}{8}=\frac{12+16-18-12}{24}=\frac{-2}{24}=\frac{-1}{12}$

*Propiedad 2.* Si el símbolo de agrupamiento está precedido por el signo (-) dicho símbolo puede ser eliminado cambiando el signo de cada uno de los términos que contiene.

**Ejemplo 2.3** *Realice la siguiente operación.*

$(1+2)-(3+4)=1+2-3-4=-4$

**Ejemplo 2.4** *Realice la siguiente operación.*

$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{8}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}=\frac{12+16+18+12}{24}=\frac{28+30}{24}=\frac{58}{24}=\frac{29}{12}$

*Propiedad 3.* Cuando una expresión algebraica contiene uno o más pares de símbolos de agrupación encerrado en otro par, para eliminarse se comienza por los signos de agrupación mas internos.

**Ejemplo 2.5** *Realice la siguiente operación.*

$1-[(1+2)-(3-4)]=$

Pasos:

$1-[(1+2)-(3-4)]=$ *Se aplica la propiedad 3, por tanto resolvemos primero* $(1+2)-(3-4)=1+2-3+4=+4$

$=1-[+4]$ *Se aplica la propiedad 2*

$=1-4=-3$

**Ejemplos 2.6** *Realice la siguiente operación.*

$2-\{3a+a-[5+7+(a+2a)]\}=$

Pasos:

$2-\{3a+a-[5+7+(a+2a)]\}$ *Se aplica la propiedad 3.*

$=2-\{3a+a-[5+7+3a]\}$ *Se aplica la propiedad 2.*

$=2-\{3a+a-5-7-3a\}$ *Se aplica la propiedad 3*

$=2-\{a-12\}$ *Se aplica la propiedad 2.*

$=2-a+12$

$=14-a$

*Propiedad 4.* Cuando una expresión algebraica contiene símbolos de agrupación que indican multiplicación, suma y resta al mismo nivel. La jerarquía en el desarrollo de las operaciones prioriza a las multiplicaciones y a las divisiones sobre las sumas y restas. Por consiguiente la primera operación que debe efectuarse para el ejemplo 1.16 es la multiplicación.

**Ejemplo 2.7**

$(1+2)-(3\cdot 5)=-12$

Pasos:

$(1+2)-(3\cdot 5)$ *Se aplica la propiedad 4.*

$= (1+2) - (15)$ *Se aplica la propiedad 2.*

$= 1 + 2 - 15$

$= 3 - 15$

$= -12$

**Ejemplo 2.8**

$1 + 4 - 4\,[3 + 2\,(5 - 2) + (3)(5)] =$

*Pasos:*

*De acuerdo a la propiedad 3, resolvemos primero lo siguiente*

$1 + 4 - 4\,[3 + 2\,(5 - 2) + (3)(5)] =$ *Se aplica la propiedad 4.*

$= 5 - 4\,[3 + 2\,(5 - 2) + 15]$ *Se aplica la propiedad 1 y 2.*

$= 5 - 4\,[3 + 2(3) + 15]$ *Resolvemos*

$= 5 - 4\,[3 + 6 + 15]$ *Se aplica la propiedad 2.*

$= 5 - 4(24)$

$= 5 - 96 = -91$

**Ejercicios de Taller**

*1. Resuleva las operaciones indicadas*

*a)* $7 + (-2) + (-3) =$

*b)* $4 - (-1) + (-2) =$

*c)* $(4r - 3u - 6t) + (3r + 5u + 2t) =$

*d)* $(2s + 3i - 4m) + (3s - 2i + 3m) + (-4s - 5i) =$

*e)* $5c + 2\,(4a - 2b) - 3\,(2a - 2b - c) =$

*f)* $4s - [2s - (3s - t) + 2] =$

**Ejercicios de Tarea**

*1. Verifique los resultados de las siguientes expresiones*

*a)* $-\frac{(-a)}{-b} = \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$

*b)* $\frac{2(u+v)}{2v} = \frac{2u+2v}{2v} = \frac{u+v}{v}$

*d)* $\frac{y}{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}} = \frac{\frac{y}{1}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}} = \frac{\frac{y}{1}}{\frac{5+12}{20}} = \frac{\frac{y}{1}}{\frac{17}{20}} = \frac{20y}{17}$

*e)* $(2x - y + 3z) + (4x - 3y + 2z) = 6x - 4y + 5z$

*f)* $(5w + 3t - 8u) + (2w + t - 6u) = 7w + 4t - 14u$

*2. Resuleva las operaciones indicadas*

*a)* $3 + 5 - 2 =$

*b)* $13 - 14 + 2 - 8 =$

*c)* $9a - 2a - 3a =$

*d)* $7p + 8q - p + q =$

*e)* $1 + 6 - 3 =$

*f)* $13 - 2 - 1 - 3 =$

*g)* $12x + 2x - 7x =$

*h)* $5 - 2 - 1 =$

*i)* $2 - 3 - 12 + 1 =$

*j)* $2x - 5x - 8x =$

*k)* $7 - 2 - 3 =$

*l)* $5a + 2b - 7a - b =$

*m)* $11 - 6 - 2 + 1 =$

*n)* $12y + 3a - 5y - a =$

*o)* $5s - [2t + (3s - 4t) - s] =$

*p)* $3x - \{2x + [3x - 2y - 3(5x - 4y) - 2x] - 5y\} =$

*q)* $4b - (3a - 2c) - 2(2b - 3c) =$

*r)* $2a - [y - (2a + 3y) - y] =$

*s)* $2b - [5a - 5(2a - 3b) - a] =$

*t)* $4x - 2\{3y + [4x - 4(3y - 4x) - 3y] - 4x\} - 3y =$

*u)* $y + \{3y - 2[5x - y - (3x - 2y) - y] - 2x\} =$

*3. Indique en cada una de las expresiones la propiedad que se utiliza (x,y,z representan números reales).*

*a)* $(x + y)1 = x + y$

*b)* $(x + 2) + [-(x + 2)] = 0$

*c)* $(y + z)\left[\frac{1}{(y+z)}\right] = 1$

*g)* $x(x + 1) = 0$ *entonces* $x = 0$ *ó* $x + 1 = 0$

*4. Señale una propiedad básica del sistema de los números reales para justificar cada uno de los enunciados dados:*

*a)* $\left[(-2)\left(\frac{1}{2}\right)\right]z = -2\left[\left(\frac{1}{2}\right)(z)\right]$

*b)* $(x + y) + 3 = (y + x) + 3$

*c)* $(1 + 2)(-3) = 1(-3) + 2(-3)$

*5. Calcule los resultados de las siguientes operaciones*

*a)* $\frac{7}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{5} =$

*b)* $\frac{2}{3} + \frac{5}{9} =$

*c)* $\frac{1}{7} - \frac{3}{4} =$

*d)* $\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} =$

*e)* $\frac{a}{b} - \frac{3}{4} =$

*f)* $\frac{4(3+c)}{4c} =$

*g)* $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} =$

*h)* $\frac{2}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$

*i)* $\frac{1}{7} + 3 - \frac{2}{b} =$

*j)* $\left[(4)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right](-z) + z =$

*k)* $\frac{1}{4} + \frac{2}{7} - 3 =$

*l)* $5 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} =$

*m)* $1 - \frac{6}{7} + \frac{2c}{3} =$

# 3. Expresiones exponenciales

Si $n$ representa un entero positivo en una notación exponencial $x^n$ representa el producto de un número real $x$ multiplicado $n$ veces por si mismo. La expresión $x^n$ se lee $x$ a la enésima potencia o simplemente $x$ a la $n$. En la expresión $x^n$, $n$ se denomina **exponente** ó **potencia** de $x$ y $x$ se denomina **base**.

**Ejemplo 3.1** *Desarrollar las siguientes potencias:*

*a)* $6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776$

*b)* $(\frac{1}{5})^4 = \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{625}\right)$

*c)* $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

*Hay que analizar que si el exponente $n$ es un entero positivo, una expresión definida por $2x^n$ significa $2\left(x^n\right)$, pero no $(2x)^n$. El número 2 se llama coeficiente de $x^n$ en la expresión $2x^n$, de igual forma $-2x^n$ significa $-2\left(x\right)^n$, pero no $(-2x)^n$.*

**Ejemplo 3.2** *Desarrollar las siguientes potencias:*

*a)* $4 \cdot 2^3 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 8 = 32$

*b)* $-4 \cdot 2^3 = -4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -4 \cdot 8 = -32$

*c)* $-2^4 = -\left(2\right)^4 = -16$

*d)* $5(-2)^3 = 5\left(-2\right) \cdot \left(-2\right) \cdot \left(-2\right) = 5\left(-8\right) = -40$

## 3.1. Leyes de los exponentes

Se han establecido varias reglas para combinar potencias, llamadas **leyes de los exponentes**. Además son útiles para simplificar expresiones algebraicas.

### 3.1.1. Primera ley

Esta ley establece que cuando se multiplican factores de la misma base, los exponentes se deberán sumar.

1. $x^m x^n = x^{m+n}$

**Ejemplo 3.3** *Aplicar la primera ley de los exponentes a los siguientes ejercicios:*

*a)* $6^3 \cdot 6^4 = 6^{3+4} = 6^7$

*b)* $x^5 \cdot x^3 \cdot x^3 = x^{5+3+3} = x^{11}$

*c)* $x^{-6} \cdot x^{-2} \cdot x^1 = x^{-6-2+1} = x^{-7}$

*d)* $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = x^{\frac{5}{4}}$

### 3.1.2. Segunda ley

Esta ley establece que cuando se eleva una potencia a otra potencia, estas potencias se deberán multiplicar.

2. $(x^m)^n = x^{mn}$

**Ejemplo 3.4** *Desarrollar las siguientes potencias:*

*a)* $\left(4^2\right)^4 = 4^{2\cdot 4} = 4^8 = 65536$

*b)* $\left(y^5\right)^4 = y^{5\cdot 4} = y^{20}$

*c)* $\left(x^{-3}\right)^{-2} = x^{-3\cdot -2} = x^6$

*d)* $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = x^{\frac{1}{3}\cdot 2} = x^{\frac{2}{3}}$

### 3.1.3. Tercera ley

Esta ley establece que cuando existen bases diferentes a una misma potencia, estas bases se deberán separar y elevar a la misma potencia

3. $(xy)^n = x^n y^n$

**Ejemplo 3.5** *Realizar las siguientes operaciones:*

*a)* $(2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$

*b)* $(3st)^4 = 3^4 \cdot s^4 \cdot t^4 = 81s^4t^4$

*c)* $(xy)^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}$

### 3.1.4. Cuarta ley

Esta ley establece que cuando existe división entre factores diferentes con el mismo exponente, dicho exponente pasar al numerador y denominador

4. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

**Ejemplo 3.6** *Realizar las siguientes operaciones:*

*a)* $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$

*b)* $\left(\frac{s}{4}\right)^2 = \frac{s^2}{4^2} = \frac{s^2}{16}$

*c)* $\left(\frac{y}{4}\right)^{-5} = \frac{y^{-5}}{4^{-5}} = \frac{\frac{1}{y^5}}{\frac{1}{4^5}} = \frac{4^5}{y^5} = \frac{1024}{y^5}$

### 3.1.5. Quinta ley:

Esta ley establece que cuando existe división entre factores iguales con diferente exponente, el exponente del denominador pasa restando al exponente del numerador.

5. $\left(\frac{x^m}{x^n}\right) = x^{m-n}$

**Ejemplo 3.7** *Realizar las siguientes operaciones:*

*a)* $\left(\frac{4^3}{4^2}\right) = 4^{3-2} = 4^1 = 4$

*b)* $\left(\frac{x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{-1}{2}}}\right) = x^{\frac{5}{6}-\left(\frac{-1}{2}\right)} = x^{\frac{4}{3}}$

**Ejercicios de Taller (Primera ley $x^m x^n = x^{m+n}$ ),** resolver la expresión aplicando leyes de los exponenetes**:**

*a)* $7^{-2} \cdot 7^{-4} =$

*b)* $5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^4 =$

*c)* $x^6 \cdot x^{-5} \cdot x^{-7} =$

*d)* $y^2 \cdot y^{\frac{2}{4}} \cdot y^{\frac{3}{8}} =$

**Ejercicios de Taller (Segunda ley $(x^m)^n = x^{mn}$),** *resolver la expresión aplicando leyes de los exponenetes:*

*a)* $(5^3)^4 =$

*b)* $(6^4)^7 =$

*c)* $(9^{-5})^{-2} =$

*d)* $(x^{-9})^{-3} =$

*e)* $(x^{\frac{1}{4}})^3 =$

*f)* $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2 =$

**Ejercicios de Taller(Tercera ley(xy)$^n$=x$^n$y$^n$ ),** *resolver la expresión aplicando leyes de los exponenetes:*

*a)* $(10)^4 =$

*b)* $(40)^6 =$

*c)* $(2wt)^5 =$

*d)* $(6tre)^4 =$

*e)* $(zw)^{\frac{5}{6}} =$

*f)* $(ab)^{\frac{7}{4}} =$

**Ejercicios de Taller (Cuarta ley $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$),** *resolver la expresión aplicando leyes de los exponenetes:*

*a)* $\left(\frac{4}{3}\right)^2 =$

*b)* $\left(\frac{8}{3}\right)^6 =$

*c)* $\left(\frac{t}{2}\right)^{-2} =$

*d)* $\left(\frac{w}{5}\right)^{-3} =$

**Ejercicios de Taller (Quinta ley $\left(\frac{x^m}{x^n}\right) = x^{m-n}$),** *resolver la expresión aplicando leyes de los exponenetes:*

*a)* $\left(\frac{5^4}{5^2}\right) =$

*b)* $\left(\frac{8^9}{8^3}\right) =$

*c)* $\left(\frac{7^{-5}}{7^{-3}}\right) =$

*d)* $\left(\frac{c^{-3}}{c^{-1}}\right) =$

*e)* $\left(\frac{z^{\frac{7}{3}}}{z^{\frac{2}{5}}}\right) =$

### 3.1.6. Teorema sobre exponente negativo

1. $\left(\frac{x^{-m}}{x^{-n}}\right) = \frac{x^n}{x^m}$
2. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$

**Ejemplo 3.8** *Realizar las siguientes operaciones:*

*a)* $\left(\frac{x^{-m}}{y^{-n}}\right) = \frac{1}{x^m} \cdot \frac{y^n}{1} = \frac{y^n}{x^m}$

*b)* $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \frac{x^{-n}}{y^{-n}} = \frac{y^n}{x^n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$

**Existen otros casos donde:** 1. El exponente es negativo: $x^{-n} = \left(\frac{1}{x^n}\right)$, $x \neq 0$ ó $\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = x^n$

2. El exponente es cero: $x^0 = 1$

**Ejemplo 3.9:**

*a)* $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ *y* $(5)^{-3} = \frac{1}{(5)^3}$

*b)* $3^0 = 1$

*Simplificar donde hay exponentes de números reales, significa cambiarla a otra en que cada número real aparece sólo una vez y todos los exponentes son positivos. Se debe asumir que los denominadores siempre representan números reales diferentes de cero.*

**Ejemplo 3.10:**

*Utilice las leyes de los exponentes para simplificar los siguientes elementos:*

*a)* $\left(3x^3y^4\right)\left(4xy^5\right) = (3)(4)\,x^3xy^4y^5 = 12x^4y^9$

*b)* $\left(2a^2b^3c\right)^4 = 2^4\left(a^2\right)^4\left(b^3\right)^4c^4 = 16a^8b^{12}c^4$

*c)* $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\left(\frac{s}{r^3}\right)^3 = \frac{\left(2r^3\right)^2}{s^2} \cdot \frac{s^3}{\left(r^3\right)^3} = \frac{2^2\left(r^3\right)^2}{s^2} \cdot \frac{s^3}{\left(r^3\right)^3} = \left(\frac{4r^6}{s^2}\right)\left(\frac{s^3}{r^9}\right) = 4\left(\frac{r^6}{r^9}\right)\left(\frac{s^3}{s^2}\right) = 4\left(\frac{1}{r^3}\right)(s) = \frac{4s}{r^3}$

*d)* $\left(u^{-2}v^{3}\right)^{-3}=\left(u^{-2}\right)^{-3}\left(v^{3}\right)^{-3}=u^{6}v^{-9}=\frac{u^{6}}{v^{9}}$

**Ejercicios Taller (Simplificación de exponentes y eliminación de exponente negativo):**

*a)* $(5z^2y^3)(6zy^4)=$

*b)* $(7x^2y^4)(3x^2y^3)=$

*c)* $(3a^4b^2c)^{5\prime}=$

*d)* $\left(\frac{3x^4}{y}\right)\left(\frac{y}{x2}\right)=$

*e)* $\left(z^{-4}w^{2}\right)^{-5}=$

**Ejercicios de Tarea:**

*1. Escriba la expresión con exponentes positivos. Suponga que en todos los ejercicios las variables son diferentes de cero.*

*a)* $\frac{1}{8\cdot8\cdot8\cdot3\cdot3}=$

*b)* $7\cdot7\cdot7=$

*c)* $4x\cdot4x\cdot4x\cdot2y\cdot2y=$

*d)* $\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}=$

*2. Escriba la expresión con exponente negativo:*

*a)* $\frac{1}{2^3}=$

*b)* $\frac{y^3}{x^4}=$

*c)* $\frac{2}{x^5}=$

*d)* $\left(\frac{3}{y}\right)^3=$

*3. Encuentre los números indicados.*

*a)* $3^4=$

*b)* $\left(\frac{1}{3}\right)^3=$

*c)* $3^{-4}=$

*d)* $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}=$

*e)* $-3^{-4}=$

*f)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=$

*g)* $(-7)^2=$

*h)* $\left(-\frac{2}{3}\right)^5=$

*i)* $3^5=$

*j)* $(-7)^{-2}=$

*k)* $\left(-\frac{3}{2}\right)^5=$

*l)* $(-7)^2=$

*m)* $-\left(-\frac{2}{3}\right)^5=$

*n)* $-(7)^{-2}=$

*o)* $(5)^0=$

*p)* $(-1)^{-1}=$

*q)* $(-5)^0=$

*r)* $1^{-1}=$

*4. Evalúe las siguientes expresiones:*

a) $2-2^1=$

*b)* $\frac{2^{-1}-3^{-1}}{2^{-1}+3^{-1}}=$

*c)* $\frac{(-1)^5-2^6}{(-1)^{-1}}=$

*d)* $\frac{0^1}{1^0}=$

*e)* $\frac{(1-1)^0}{1^0}=$

*5. Encuentre el valor de la expresión considerando que a=2, b=-3 y c=-1*

*a)* $-2ab+c^2=$

*b)* $ab^2-c^3=$

*c)* $ab^2+bc^2+ca^2=$

*d)* $a^{-1}b^{-1}c^{-1}=$

*e)* $ab^{-1}+ca^{-1}=$

*f)* $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=$

*6. Simplifique y elimine cualquier exponente negativo:*

*a)* $x^6x^2=$

*b)* $2^{10}2^{12}=$

*c)* $\left(7x^4\right)\left(-3x^2\right)=$

*d)* $\left(-5x^2y^3\right)\left(3xy^{-2}\right)=$

*e)* $\frac{2^8}{2^3}=$

*f)* $\frac{3^4}{3^{-2}}=$

*g)* $\frac{10^{-7}}{10^4}=$

*h)* $\frac{35x^5y^8}{-21x^9y^{-1}}=$

*i)* $(5x)^2=$

*j)* $(-4x)^3=$

*k)* $\left(x^4\right)^{-5}=$

*l)* $\left(4x^2y^{-1}\right)^3=$

*m)* $\left(3x^2y^4\right)^{-2}=$

*n)* $x^2x^3x^{-4}=$

*o)* $\frac{-x^5\left(y^2\right)^3}{(xy)^2}=$

*p)* $\left(-3xy^5\right)^2\left(x^3y\right)^{-1}=$

*q)* $\frac{\left(7a^2b^3\right)^2}{a^3b^5}=$

*r)* $\left(\frac{a^4b^{-5}}{b^2}\right)^{-1}=$

*s)* $\left(\frac{a^3b^3}{b^{-2}}\right)^2=$

*t)* $\frac{-xy^2z^3}{(xy^2z^3)^{-1}}=$

*u)* $\frac{(3abc)^3}{(2a^{-1}b^{-2}c)^2}=$

## 3.2. Radicales

Muchos problemas simples en la ciencia, los negocios o en la ingeniería conducen a planteamientos tales como $5^2=25$, $x^3=64$. Los valores para 5 ó $x$ se llaman raíces. En particular, si $s^2=25$, entonces a $s$, se llama la raíz cuadrada de 25;

para $x^3 = 64$, decimos que $x$ es la raíz cúbica de 64.

En general, las raíces de los números reales se definen por el enunciado $\sqrt[n]{x}$ si y solo si $r^n = x$, donde $x$ y $r$ son números reales no negativos y $n$ es un entero positivo, o $x$ y $r$ son números reales negativos y $n$ es un entero positivo impar. Al número, se le denomina la raíz enésima principal de $x$.

La expresión se llama radical, el número $n$ es el **índice del radical** y $x$ se llama **radicando**. El símbolo se llama signo radical. Si el índice es 2, normalmente se omite del radical.

Si $n$ es impar, se puede demostrar que para cualquier valor $x$ hay exactamente una raíz enésima real de $x$.

**Ejemplo 3.11** *Realizar las siguientes operaciones:*

*a)* $\sqrt{4} = 2$

*b)* $-\sqrt{4} = -2$

*c)* $\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$

*d)* $-\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3}$

*e)* $\sqrt{100} = 10$

*f)* $\sqrt[3]{64} = 4$

*g)* $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$

*Si "$n$" es par y "$x$" es negativo no hay raíz enésima real de "$x$" (la raíz sería un número complejo).*

**Ejemplo 3.12** *Realizar las siguientes operaciones:*

*a)* $\sqrt{-4}$ es un número imaginario, no tiene solución real.

*b)* $\sqrt[4]{-13}$ es un número imaginario, no tiene solución real.

*c)* $\sqrt[3]{-8} = -2$

*d)* $\sqrt[7]{-2187} = -3$

*En los incicos a y b se trata de números imagianarios, los cuales no se tratan en este curso. Los números imaginarios se producen cuando se obtiene una raíz par de un numero negativo. En los incisos c y d, se puede ver que también se tiene un número negativo en el radicando, sin embargo el resultado no es un numero imaginario, es un número real. A diferencia de los incisos anteriores, en los incisos c y d se esta obteniendo una raíz cúbica y una raiz de séptima respectivamente, y los numeros negativos si tienen raices impares.*

*En otras palabras podemos establecer que, los números negativos no tienen raices pares reales, sin embargo los números negativos si tienen raices impares reales.*

## 3.3. Leyes de los radicales

Estas propiedades se pueden usar frecuentemente para simplificar expresiones que contengan radicales.

### 3.3.1. Primera ley

Esta ley establece que cuando se tiene una raiz con índice del radical elevado a un exponente, su resultado sera el radicando.

1. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

**Ejemplo 3.13** *Aplicar la ley de los radicales.*

*a)* $\left(\sqrt[5]{xy}\right)^5 = xy$

*b)* $\left(\sqrt[3]{17}\right)^3 = 17$

### 3.3.2. Segunda ley

Esta ley establece que cuando se tiene una raíz con índice del radical y radicando elevados a la misma potencia se pueden diferir dos posibles resultados:

1. $\sqrt[n]{x^n} = x,\ si\ n\ es\ impar$
2. $\sqrt[n]{x^n} = |x|\ ,\ si\ n\ es\ par$

**Ejemplo 3.14** *Aplicar la ley de los radicales.*

*a)* $\sqrt[3]{x^3} = x$

*b)* $\sqrt[7]{-y^7} = -y$

*c)* $\sqrt[2]{3^2} = |3| = 3$

*d)* $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$

### 3.3.3. Tercera ley

Esta ley establece que cuando se tiene multiplicando dos raíces con mismo índice de radical y diferente radicando, su resultado será una sola raíz con el mismo índice de radical.

3. $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

**Ejemplo 3.15** *Aplicar la ley de los radicales.*

*a)* $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27}$

*b)* $\sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{1296}$

### 3.3.4. Cuarta ley

Esta ley establece que cuando se tiene una división con dos raíces con mismo índice de radical y diferente radicando, su resultado será una sola raíz con el mismo índice de radical y diferente numerador y denominador.

4. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

**Ejemplo 3.16** *Aplicar la ley de los radicales.*

*a)* $\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[4]{\frac{16}{32}}$

*b)* $\frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{343}} = \sqrt[3]{\frac{512}{343}}$

### 3.3.5. Quinta ley

Esta ley establece que cuando se tiene una raíz sobre otra raíz con diferentes índices de radicales, su resultado será la multiplicación de los índices de radicales.

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

**Ejemplo 3.17** *Aplicar la ley de los radicales.*

*a)* $\sqrt[4]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[8]{64}$

*b)* $\sqrt[3]{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[9]{25}$

### 3.3.6. Operaciones con radicales

Para efectuar las operaciones de suma y/o resta de radicales es necesario que éstos sean de igual radicando y del mismo orden –índice de radical–, y cuando se trate de multiplicación o división se utilizan las leyes de los radicales expuestas con anterioridad.

**Ejemplo 3.18** *Simplificar las siguientes expresiones.*

*a)* $3\sqrt{b}+4\sqrt{b}-\sqrt{b}=6\sqrt{b}$

*b)* $\sqrt{72}-4\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{36\cdot 2}-4\sqrt{2}+\sqrt{4\cdot 2}=6\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

*c)* $3\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{162}=3\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{6\cdot 8}+\sqrt[3]{6\cdot 27}=3\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{6}+3\sqrt[3]{6}=4\sqrt[3]{6}$

**Ejemplo 3.19** *Simplificar las siguientes expresiones.*

*a)* $\sqrt[3]{2ab}\sqrt[3]{3a^4b^2}=\sqrt[3]{6a^5b^3}=\sqrt[3]{6\cdot a^3\cdot a^2\cdot b^3}=ab\sqrt[3]{6a^2}$

*b)* $\sqrt[5]{7xy}\sqrt[5]{2y^3}\sqrt[5]{x^2y}=\sqrt[5]{14x^3y^5}=y\sqrt[5]{14x^3}$

**Ejemplo 3.20** *Simplificar la siguientes expresiones.*

*a)* $\frac{\sqrt{8x^3y^4}}{\sqrt{2xy}}=\sqrt{\frac{8x^3y^4}{2xy}}=\sqrt{4x^2y^3}=\sqrt{4\cdot x^2\cdot y^2\cdot y}=2xy\sqrt{y}$

*b)* $\frac{\sqrt[3]{24x^4y^5}\sqrt[3]{2xy}}{\sqrt[3]{3x^2y}}=\sqrt[3]{\frac{48x^5y^6}{3x^2y}}=\sqrt[3]{16x^3\mathbf{y}^5}=\sqrt[3]{8\cdot 2\cdot x^3\cdot y^3\cdot y^2}=2xy\sqrt[3]{2y^2}$

**Ejercicios de Taller (Primera ley** $(\sqrt[n]{x})^n=x$**),** *aplicar la ley de los radicales correspondiente.*

*a)* $\left(\sqrt[4]{8}\right)^4=$

*b)* $\left(\sqrt[3]{21}\right)^3=$

*c)* $\left(\sqrt[6]{12}\right)^6=$

*d)* $\left(\sqrt[5]{25}\right)^5=$

**Ejercicios de Taller (Segunda ley** $\sqrt[n]{x^n}=x$, *si n es impar*, $\sqrt[n]{x^n}=[x]$, *si n es par*), *aplicar la ley de los radicales correspondiente.*

*a)* $\sqrt[3]{x^3}=$

*b)* $\sqrt[7]{6^7}=$

*c)* $\sqrt[2]{8^2}=$

*d)* $\sqrt[2]{27^2}=$

**Ejercicio de Taller (Tercera ley** $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$), *aplicar la ley de los radicales correspondiente.*

*a)* $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}=$

*b)* $\sqrt[4]{64}\sqrt[4]{25}=$

*c)* $\sqrt[4]{16}\sqrt[4]{81}=$

*d)* $\sqrt[5]{32}\sqrt[5]{243}=$

**Ejercicio de taller (Cuarta ley** $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$**),** *aplicar la ley de los radicales correspondiente.*

*a)* $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=$

*b)* $\frac{\sqrt[2]{1}}{\sqrt[2]{32}}=$

*c)* $\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}=$

*d)* $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}}=$

**Ejercicio de Taller (Quinta ley** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[mn]{x}$), *aplicar la ley de los radicales correspondiente.*

*a)* $\sqrt[2]{\sqrt[3]{45}}=$

*b)* $\sqrt[2]{\sqrt[2]{36}}=$

*c)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{72}} =$

*d)* $\sqrt[2]{\sqrt[4]{16}} =$

**Ejercicio de Taller (operaciones con radicales)**, *aplicar la ley de los radicales correspondiente.*

*a)* $2\sqrt{a} + 7\sqrt{a} - \sqrt{a} =$

*b)* $3\sqrt{108} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{3} =$

*c)* $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{250} =$

*d)* $\sqrt{32} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{8} =$

**Ejercicios de Tarea:**

*1. Escriba fuera del radical todos los factores posibles.*

*a)* $\sqrt{18} =$

*b)* $\sqrt{45} =$

*c)* $\sqrt{48} =$

*d)* $\sqrt{72} =$

*e)* $\sqrt{75} =$

*f)* $\sqrt{128} =$

*g)* $\sqrt{320} =$

*h)* $\sqrt[3]{16} =$

*i)* $\sqrt[3]{448} =$

*j)* $\sqrt[4]{448} =$

*k)* $\sqrt[4]{32} =$

*l)* $\sqrt[4]{512} =$

*2. Evalúe los siguientes radicales.*

*a)* $\sqrt{7x^4y^8} =$

*b)* $\sqrt{x^6} =$

*c)* $\sqrt{x^4y^2} =$

*d)* $\sqrt{3^4x^{10}} =$

*e)* $\sqrt[3]{-108} =$

*f)* $\sqrt[3]{320} =$

*g)* $\sqrt[4]{256} =$

*h)* $\sqrt[3]{x^9y^6m^3} =$

*i)* $\sqrt[4]{n^8p^4} =$

*j)* $\sqrt[3]{16m^3n^6} =$

*3. Escriba fuera del radical todos los factores posibles.*

*a)* $\sqrt{7x^4y^8} =$

b) $\sqrt{18m^7} =$

c) $\sqrt{6n^3k^9} =$

d) $\sqrt{16a^6d^4} =$

e) $\sqrt{45a^9} =$

f) $\sqrt[3]{125a^5b^7} =$

g) $\sqrt{\frac{3a^3}{5b^4}} =$

h) $\sqrt[3]{\frac{2m^2}{125n^7}} =$

*4. Realice las operaciones que se indican.*

*a)* $2\sqrt{a} + 7\sqrt{a} - \sqrt{a} =$

*b)* $3\sqrt{108} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{3} =$

*c)* $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{250} =$

*d)* $\sqrt{32} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{8} =$

*e)* $\sqrt{128} - 6\sqrt{8} + 2\sqrt{18} =$

*f)* $\sqrt{50} - 2\sqrt{72} + 3\sqrt{162} =$

*g)* $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \frac{1}{3}\sqrt{32} =$

*h)* $\sqrt{147} - \sqrt{75} + \sqrt{21} =$

*i)* $\sqrt{\frac{3}{25}} + \sqrt{48} - \sqrt{\frac{12}{9}} =$

*5. Efectúe las operaciones indicadas*

*a)* $\sqrt{2}\sqrt{8} =$

*b)* $\sqrt{6}\sqrt{24} =$

*c)* $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}} =$

*d)* $\frac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{6}} =$

*e)* $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$

*f)* $\frac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}} =$

*g)* $\frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}} =$

*h)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{96}} =$

*6. Simplifique cada una de las siguientes expresiones.*

*a)* $\sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8} =$

*b)* $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3} =$

*c)* $\left(\sqrt[5]{r} \cdot \sqrt[5]{s}\right)^5 =$

*d)* $\sqrt[3]{2x^2y^3} \cdot \sqrt[3]{4xz^3} =$

*e)* $\sqrt{6a^2b}\sqrt{2ab^7} =$

*f)* $\frac{\sqrt{7a^3b}}{\sqrt{ab}} =$

*g)* $\sqrt{\frac{3a}{5b^3}}\sqrt{\frac{25a^3}{6b}} =$

*h)* $\sqrt{\frac{343n^7p^2}{5n^3p^5}} =$

*i)* $\frac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}} =$

## 3.4. Racionalización

En una expresión algebraica del tipo racional que contenga algún radical, puede este eliminarse mediante un procedimiento denominado racionalización. Racionalizar el numerador significa eliminar el radical existente precisamente del numerador. Racionalizar el denominador significa eliminar el radical existente del denominador. El procedimiento consiste en multiplicar el numerador y denominador por una expresión conveniente, es decir, por una expresión algebraica que provoque la eliminación deseada.

**Ejemplo 3.21** *Racionalizar las siguientes expresiones.*

*a)* $\frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

*b)* $\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{5}{3\sqrt{5}}$

*c)* $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5}\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\right) = \frac{3-2}{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$

**Ejercicios de Taller (en las siguientes expresiones racionalice el numerador)**

*a)* $\frac{\sqrt{7}}{3} =$

*b)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$

*c)* $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{7} =$

**Ejercicios de Taller (en las siguientes expresiones racionalice el denominador)**

*a)* $-\frac{3}{\sqrt{7}} =$

*b)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$

*c)* $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

**Ejercicios de Tarea**

*1. En las siguientes expresiones racionalice el numerador*

*a)* $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{6} =$

*b)* $\frac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{11}+2} =$

*c)* $\frac{2-\sqrt{5}}{5} =$

*2. En las siguientes expresiones racionalice el denominador*

*a)* $\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} =$

*b)* $\frac{5}{2-\sqrt{5}} =$

*c)* $\frac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{11}+2} =$

## 3.5. Exponentes racionales

El concepto de la raíz enésima de un número nos capacita para ampliar la definición de $x^n$ de exponentes enteros a exponentes racionales; y como veremos con frecuencia es más fácil trabajar con exponentes racionales que con radicales.

Para cualquier número $x$ y para cualquier entero positivo $n$, definimos: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ dado que $\sqrt[n]{x}$ sea un número real. Así, $x^{\frac{1}{n}}$ es simplemente otra forma de designar la raíz enésima principal de $x$. Además, definimos: $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ para cualquier número entero "$m$" tal que $\frac{m}{n}$ sea la mínima expresión. Se necesita ésta última definición si la ley de exponentes $(x^r)^s = x^{rs}$ va aplicarse a exponentes racionales.

**Ejemplo 3.22** *Desarrollar las siguientes potencias.*

*a)* $(25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

*b)* $(64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

*c)* $(0{,}09)^{\frac{5}{2}} = \left[(0{,}09)^{\frac{1}{2}}\right]^5 = \left(\sqrt{0{,}09}\right)^5 = (0{,}3)^5$

*d)* $(-27)^{-\frac{5}{3}} = \left[(-27)^{\frac{1}{3}}\right]^{-5} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^{-5} = \left[\sqrt[3]{(-3)^3}\right]^{-5} = (-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5} = -\frac{1}{243}$

Para $x < 0$; se puede demostrar que:

$$(x^m)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = x^{\frac{m}{n}}$$

Sin embargo, para $x < 0$ y ciertas opciones de $m$ y $n$, $x^{\frac{1}{n}}$ no es un número real y, en consecuencia $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ no esta definida, aún que la expresión $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ podría estar definida.

De otra parte, si $x^{\frac{m}{n}}$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, y $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ cada una representa un número real; entonces todos son iguales.

Aunque $(125)^{\frac{2}{3}} = ((125)^{\frac{1}{3}})^2 = ((125)^2)^{\frac{1}{3}}$; la evaluación de $((125)^{\frac{1}{3}})^2 = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25$ se puede hacer mentalmente, mientras que $((125)^2)^{\frac{1}{3}} = (15625)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{15625} = 25$ podría necesitar el uso de calculadora.

El siguiente caso demuestra que $x^{\frac{m}{n}}$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, y $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ no son equivalentes.

Compare a) $x^{\frac{m}{n}}$ b) $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ c) $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ para $x = -9, m = 2, n = 2$

a) $x^{\frac{m}{n}} = (-9)^{\frac{2}{2}} = -9$

b) $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left((-9)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (81)^{\frac{1}{2}} = 9$

c) $(x^m)^{\frac{1}{n}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{-9}\right)^2$, que no es un número real ya que contiene la raíz cuadrada de un número negativo (complejo).

## 3.6. Leyes de los exponentes racionales

Las leyes que se dieron para los exponentes enteros en la sección anterior también son verdaderas para los exponentes racionales. Sean "$x$" y "$y$" números reales y $s$ $y$ $r$ números racionales.

### 3.6.1. Primera ley

Esta ley establece que cuando se multiplican factores de la misma base, los exponentes se deberán sumar.

1. $x^r x^s = x^{r+s}$

**Ejemplo 3.23** *Aplicar la primera ley de los exponentes racionales a los siguientes ejercicios.*

*a)* $3x^{\frac{1}{2}} \cdot 3x^{\frac{1}{5}} = 3x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} = 3x^{\frac{7}{10}}$

*b)* $x^{\frac{3}{5}} \cdot x^{\frac{2}{6}} = x^{\frac{3}{5}+\frac{2}{6}} = x^{\frac{14}{15}}$

*c)* $y^{-\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{3}{2}} = y^{-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}} = y^{\frac{5}{4}}$

### 3.6.2. Segunda ley

Esta ley establece que cuando se eleva una potencia a otra potencia, estas potencias se deberán multiplicar.

2. $(x^r)^s = x^{rs}$

**Ejemplo 3.24** *Aplicar la segunda ley de los exponentes racionales a los siguientes ejercicios.*

*a)* $\left(a^2\right)^{\frac{1}{3}} = a^{2\cdot\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

*b)* $\left(y^{\frac{5}{3}}\right)^4 = y^{\frac{5}{3}\cdot 4} = y^{\frac{20}{3}}$

*c)* $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{15}}$

### 3.6.3. Tercera ley

Esta ley establece que cuando existen bases diferentes a una misma potencia, estas bases se deberán separar y elevar a la misma potencia

3. $(xy)^r = x^r y^r$

**Ejemplo 3.25** *Aplicar la tercera ley de los exponentes racionales a los siguientes ejercicios.*

*a)* $(ab)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}}$

*b)* $(yz)^{-\frac{5}{3}} = y^{-\frac{5}{3}} \cdot z^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{y^{\frac{5}{3}} z^{\frac{5}{3}}}$

### 3.6.4. Cuarta ley

Esta ley establece que cuando existe división entre factores diferentes con el mismo exponente, dicho exponente pasar al numerador y denominador

4. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

**Ejemplo 3.26** Aplicar la cuarta ley de los exponentes racionales al siguiente ejercicio:

*a)* $\left(\frac{3x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = \frac{\left(3x^{\frac{3}{4}}\right)^3}{\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3} = \frac{3^3\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^3}{\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3} = \frac{27x^{\frac{9}{4}}}{y}$

### 3.6.5. Quinta ley

Esta ley establece que cuando existe división entre factores iguales con diferente exponente, el exponente del denominador pasa restando al exponente del numerador.

5. $\left(\frac{x^r}{x^s}\right) = x^{r-s}$

**Ejemplo 3.27** *Aplicar la quinta ley de los exponentes racionales al siguiente ejercicio.*

*a)* $\frac{x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = x^{\frac{5}{12}} y^{-1} = \frac{x^{\frac{5}{12}}}{y}$

**Ejemplo 3.28** *Utilice las leyes de los exponentes racionales para simplificar los siguientes elementos.*

*a)* $\left(\frac{5r^{\frac{3}{4}}}{s^{\frac{1}{3}}}\right)^2 \left(\frac{2r^{-\frac{3}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}}\right) = \left(\frac{25r^{\frac{3}{2}}}{s^{\frac{2}{3}}}\right)\left(\frac{2r^{-\frac{3}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}}\right) = \left(\frac{50r^0}{s^{\frac{7}{6}}}\right) = \frac{50}{s^{\frac{7}{6}}}$

**Ejercicios de tarea**

*1. Realice las siguientes operaciones.*

*a)* $\left(a^2b^{-8}\right)^{\frac{1}{4}} =$

*b)* $\frac{x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{2}}} =$

*c)* $\left(\frac{3x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{5}} =$

*d)* $\sqrt{x^4\sqrt{x}} =$

*e)* $-\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}} =$

*2. Vuelva e escribir la expresión usando exponentes racionales.*

*Nota: Para todos los ejercicios suponga que todas las variables son positivas.*

*a)* $\sqrt[3]{ab} =$

*b)* $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^4} =$

*c)* $\sqrt[5]{7x} =$

*d)* $\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^3} =$

*e)* $\sqrt[7]{x+y} =$

*f)* $\sqrt[3]{a^2+b^2} =$

*g)* $\sqrt{(x+\sqrt{x})} =$

*h)* $\sqrt{x^2+y^2} =$

*3. Vuelva a escribir la expresión usando notación radical.*

*a)* $a^{\frac{2}{3}} =$

*b)* $2a^{\frac{1}{3}} =$

*c)* $(3a)^{\frac{2}{3}} =$

*d)* $2a^{\frac{2}{3}} =$

*e)* $3 + a^{\frac{2}{3}} =$

*f)* $(3+a)^{\frac{2}{3}} =$

*g)* $\frac{3}{a^{\frac{2}{3}}} =$

*h)* $(3a)^{-\frac{3}{2}} =$

*4. Encuentre los números indicados.*

*a)* $49^{\frac{1}{2}} =$

*b)* $-8^{\frac{1}{3}} =$

*c)* $(0{,}04)^{\frac{7}{2}} =$

*d)* $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{2}{3}} =$

*e)* $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} =$

*f)* $(27)^{\frac{7}{3}} =$

*g)* $(-27)^{-\frac{7}{3}} =$

*h)* $\left(\frac{2}{\sqrt{162}}\right) =$

*5. Simplifique y elimine cualquier exponente negativo.*

*a)* $\left(3w^{\frac{3}{2}}\right)\left(7w^{\frac{5}{2}}\right) =$

*b)* $a^{\frac{3}{2}}\left(4a^{\frac{2}{3}}\right) =$

*c)* $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{8}}\right) =$

*d)* $\left(2a^{\frac{1}{2}}\right)\left(2a^{\frac{1}{3}}\right)\left(2a^{\frac{1}{6}}\right) =$

*e)* $\left(a^2b^4\right)^{\frac{1}{4}} =$

*f)* $\left(100x^4\right)^{-\frac{3}{2}} =$

*g)* $\left(25x^{\frac{1}{3}}y\right)^{\frac{3}{2}} =$

*h)* $\left(4x^4y^{-6}\right)^{\frac{1}{2}} =$

*i)* $\frac{cd^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}d} =$

*j)* $\frac{4x^{\frac{1}{2}}}{(8x)^{\frac{1}{3}}} =$

*k)* $\left(\frac{-y^{\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1} =$

*l)* $\left[\left(-27a^3b^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 =$

*6. Vuelva a escribir la expresión como un solo radical.*

*a)* $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}} =$

*b)* $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[8]{a}} =$

*c)* $\sqrt{x\sqrt{x}} =$

*d)* $\sqrt{x^3\sqrt{x}} =$

*7. Realice las siguientes operaciones, todas las variables representan números positivos.*

*a)* $\left(\sqrt{10abc}\right)\left(\sqrt{15a^3c}\right)\left(\sqrt{12bc}\right) =$

*b)* $\sqrt[3]{9xy^2}\,\sqrt[3]{6x^2y^4}\,\sqrt[3]{60x^5y} =$

*c)* $\sqrt[4]{\frac{10}{3}a^3}\,\sqrt[4]{24a^2b^3} =$

*d)* $\left(\sqrt[3]{6a^2}\right)\left(\sqrt[2]{3a^3}\right) =$

*e)* $\left(\sqrt[3]{7m}\right)\left(\sqrt[4]{2m}\right) =$

*f)* $\frac{\sqrt{4x^2n}}{\sqrt{2xn}} =$

*g)* $\frac{\sqrt{3s^3}}{\sqrt[4]{3s}} =$

*8. Racionalice el denominador de las siguientes expresiones.*

*a)* $\frac{x^3y}{\sqrt[5]{2x^2y^3z}} =$

*b)* $\frac{3m^2}{\sqrt[4]{4mnp}} =$

*c)* $\frac{x^2-y^2}{3x\sqrt{x+y}} =$

*d)* $\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x-\sqrt{x^2+y^2}} =$

# 4. Polinomios y productos notables

## 4.1. Expresión de un polinomio de una variable

La expresión algebraica de la forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$ es un polinomio de grado $n$ y variable $x$. Los coeficientes $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ...a_2, a_1, a_0\}$ pertenecen al conjunto de los números reales; mientras los exponentes $\{n,\, n-1,\, n-2,\, n-3,\, ...,\, 2,\, 1\}$ pertenecen al conjunto de los números naturales.

**Ejemplo 4.1** *Exprese el polinomio para $n = 5$ con coeficientes $\{a_5 = 2,\, a_4 = -3,\, a_3 = 4, a_2 = 6, a_1 = 7, a_0 = 3\}$ . Note que los coeficientes pertenecen al conjunto de los números enteros.*

$$2x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 7x + 3.$$

*El grado del polinomio es 5.*

**Ejemplo 4.2** *Exprese el polinomio empleando los coeficientes $\{a_6 = \frac{3}{2},\, a_5 = -4,\, a_4 = 0,\, a_3 = \frac{1}{4},\, a_2 = 5,\, a_1 = 0,$ $a_0 = -100\}$. En este caso los coeficientes pertenecen al conjunto de los números racionales.*

*Dicho polinomio es el siguiente:*

$$\frac{3}{2}x^6 - 4x^5 + \frac{1}{4}x^3 + 5x^2 - 100.$$

*Debido a que los coeficientes $a_4 = 0$ y $a_1 = 0$ los términos $x^4$ y $x$ no aparecen en el polinomio. El exponente más grande es 6, por lo tanto el polinomio es de sexto grado.*

**Ejemplo 4.3** *Exprese el polinomio con coeficientes reales $\{a_5 = \frac{1}{4},\, a_4 = -\sqrt{2},\, a_3 = 0,\, a_2 = 6,\, a_1 = 7,\, a_0 = -10\}$*

$$\frac{1}{4}x^5 - \sqrt{2}x^4 + 6x^2 + 7x - 10.$$

*El polinomio es de grado 5.*

**Ejemplo 4.4** *Determine si la siguiente expresión algebraica es un polinomio*

$$\frac{6}{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x},$$

*para identificar a que conjunto de números pertenecen los exponentes, la expresión puede escribirse como:*

$$6x^{-2} - 4x^{\frac{1}{3}} + 5x^{-1}.$$

*Puede notarse que los exponentes en la expresión son* $\{-2,\ \frac{1}{3},\ -1\}$ *y que pertenecen a los números racionales. Un polinomio tiene exponentes que pertenecen al conjunto de los números naturales. Por lo tanto la expresión no es un polinomio.*

*Algunos polinomios especiales son los siguientes:*

| **Término algebraico** | **Ejemplo** | **Grado** | **Polinomio** |
|---|---|---|---|
| $a_0x^0,\ [a_0 \neq 0]$ | $10$ | 0 | Constante |
| $a_1x^1 + a_0x^0,\ [a_1 \neq 0]$ | $-7x - 8$ | 1 | Lineal |
| $a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0,\ [a_2 \neq 0]$ | $-\frac{1}{4}x^2 + 5x - 6$ | 2 | Cuadrático |
| $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0,\ [a_3 \neq 0]$ | $x^3 + 2x^2 + 8x + 1$ | 3 | Cúbico |

## 4.2. Polinomios de más de una variable

Existen polinomios con más de una variable; cada una de ellas tiene exponentes que pertenecen al conjunto de los números naturales.

**Ejemplo 4.5.** *Identifique las variables y los coeficientes del siguiente polinomio:* $-4x^3y^2 + x^4y^4 + \sqrt{2}xyz^2$

*En el término aparecen las variables* $x,\ y,\ z$ *y los coeficientes son* $\{-4,\ 1,\ \sqrt{2}\}$. *Todos los exponentes son números enteros positivos (naturales).*

### 4.2.1. Monomios, Binomios y Trinomios

Un *monomio* es el polinomio representado por un solo término algebráico. Su grado se obtiene sumando los exponentes de sus variables.

**Ejemplo 4.6** *Determine el grado del siguiente monomio:* $-8x^3y^4$.

*El grado del monomio es* $3 + 4 = 7$.

*Los binomios son los polinomios de dos términos algebráicos. Un ejemplo es* $6x^2 + 8y^3z$.

*En el binomio anterior se involucran las variables* $x, y, z$ *. El término* $6x^2$ *es de grado* $2$*, mientras el término* $8y^3z$ *es de grado* $4$ *. El grado de un binomio corresponde al del término con el mayor grado. Por tanto, el grado del binomio* $6x^2 + 8y^3z$ *es* $4$.

**Ejemplo 4.7** *Determine el grado del siguiente trinomio:* $-3x^2yz^2 + 7x + y^2$ .

*Los grados de los términos son* $\{5,\ 1,\ 2\}$ *respectivamente. Por lo que el grado del trinomio es* $5$.

### 4.2.2. Términos semejantes

Los términos semejantes son aquellos que tienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes aunque sus coeficientes sean diferentes.

**Ejemplo 4.8** *Del siguiente grupo de términos identifique aquellos que son semejantes*

$\{7x, -4x^2, 8xy, -6xy, \sqrt{5}yx^2, -4x, \frac{5}{3}x, 6x^2y, -3xy^2\}$.

*De acuerdo a la definición anterior se tienen los siguientes grupos de términos semejantes*

$\{7x, -4x, \frac{5}{3}x\ \}$, $\{8xy, -6xy\ \}$, $\{-4x^2\}$, $\{\sqrt{5}yx^2, 6x^2y\ \}$ y $\{-3xy^2\ \}$.

**Ejercicios de Taller**

*1.-Determine si la expresión es un polinomio. Si lo es, defina su grado y escriba si es un monomio, binomio o trinomio.*

| Expresión | Polinomio (Si/No) | Grado | Monomio, Binomio,Trinomio |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ | | | |
| $-4x^3 + 8xy - \sqrt{2}$ | | | |
| $x^{-3} + 6x + 8$ | | | |
| $x^2 + 5x + 6$ | | | |
| $6ab + 5ab^2$ | | | |
| $\sqrt[3]{x} + 5xy$ | | | |
| $x + y + z$ | | | |

*2.- Agrupe los términos semejantes*

$$\{-2ax, -2xy, 3x^2y^2, \sqrt{8}xy^2, -6xy^2, 5ax, -4bx, 5xy, \frac{1}{3}x^2y, -3xy^2, -2x^2y + 7ax, 5xy\}$$

*Términos semejantes*

*1.-*

*2.-*

*3.-*

*4.-*

*5.-*

## 4.3. Operaciones con polinomios

### 4.3.1. Suma

**Ejemplo 4.9** *Realizar la suma* $(6x^2 + 8xy - 4y^2) + (-4x^2 + 7xy + 2y^2) =$

*Para efectuar la operación se deben identificar los términos semejantes y agruparlos:* $6x^2+8xy-4y^2-4x^2+7xy+2y^2 = (6x^2 - 4x^2) + (8xy + 7xy) + (-4y^2 + 2y^2)$.

*Finalmente, se suman los coeficientes:* $(6 - 4)x^2 + (8 + 7)xy + 7xy + (-4 + 2)y^2 = 2x^2 + 15xy - 2y^2$.

**Ejemplo 4.10** *Realizar la suma* $(\frac{1}{7}a^2b^2 + 6a^2b - \frac{2}{3}ab^2 + 2a^2) + (\frac{2}{5}a^2b^2 - 3a^2b - 2ab^2) =$

*Agrupando términos semejantes se obtiene* $(\frac{1}{7}a^2b^2 + \frac{2}{5}a^2b^2) + (6a^2b - 3a^2b) + (-\frac{2}{3}ab^2 - 2ab^2) + 2a^2$

*Sumando los coeficientes*: $\frac{19}{35}a^2b^2 + 3a^2b - \frac{8}{3}ab^2 + 2a^2$

**Ejercicios de Taller**

*a)* $(6x + 2y - 3z) + (-4x + 8y - z) =$

*b)* $\left(-2xy + 5y^2 - \frac{2}{5}z^3\right) + \left(3xy - 5y^2 - \frac{1}{5}z^3\right) =$

*c)* $(5a + 2ab - 3ac) + \left(\frac{5}{3}a - \frac{1}{4}ab - 3ab\right) =$

*d)* $\left(\sqrt{2}x + \frac{1}{3}y\right) + \left(-4x + \frac{2}{3}y\right) =$

### 4.3.2. Resta

**Ejemplo 4.11** *Efectuar la siguiente resta* $(-3x^2+2xy-7y^2)-(-2x^2-8xy+6y^2-8x)=$

*Aplicando el signo negativo al sustraendo se tiene :*$(-3x^2+2xy-7y^2)+(2x^2+8xy-6y^2+8x)$

*Agrupando términos y sumando coeficientes:*$(-3x^2+2x^2)+(2xy+8xy)+(-7y^2-6y^2)+8x=-x^2+10xy-13y^2+8x$

**Ejemplo 4.12** *Efectuar la siguiente resta* $(8cd^2-\frac{2}{3}cd-4c)-(-\sqrt{7}cd^2+\frac{1}{3}cd-8c)=$

*Aplicando el signo negativo al sustraendo se tiene:*$(8cd^2-\frac{2}{3}cd-4c)+(\sqrt{7}cd^2-\frac{1}{3}cd+8c)$

*Agrupando términos:* $(8cd^2+\sqrt{7}cd^2)+(-\frac{2}{3}cd-\frac{1}{3}cd)+(-4c+8c)$

*y sumando coeficientes se tiene:* $=(8+\sqrt{7})cd^2+(-\frac{2}{3}-\frac{1}{3})cd+(-4+8)c=(8+\sqrt{7})cd^2-cd+4c$

**Ejercicios de Taller**

*a)* $(-2a+3b+2c)-(-4a-2b+5c)=$

*b)* $\left(-2x^2y-6y^2-\frac{2}{5}z^3\right)-\left(-2x^2y+56y^2-\frac{7}{5}z^3\right)=$

*c)* $\left(-2u+5v-3w^2\right)-(-3u-2v+2w)=$

*d)* $\left(\sqrt{2}xy+\frac{3}{4}y\right)-\left(-4xy+\frac{5}{6}y\right)=$

### 4.3.3. Multiplicación

**Producto de dos monomios**

**Ejemplo 4.13** *Resolver el siguiente producto* $(-2x^2y^3z)(5xy^2z^3)=$

*Considerando las leyes de los exponentes, se tiene:* $(-2x^2y^3z)(5xy^2z^3)=(-2)(5)x^2xy^3y^2zz^3=-10x^3y^5z^4$

**Producto de un monomio por un binomio**

**Ejemplo 4.14** *Resolver el siguiente producto* $(7xy^2)(6x^3y-5x^2yz^3)=$

*Se aplica la propiedad distributiva como sigue:* $(7xy^2)(6x^3y-5x^2yz^3)=(7xy^2)(6x^3y)-(7xy^2)(5x^2yz^3)=42x^4y^3-35x^3y^3z^3$

**Producto de dos binomios**

**Ejemplo 4.15** Resolver *el siguiente producto* $(6a+5ab^2)(-3b+8ab^2)=$

*Al aplicar la propiedad distributiva y las leyes de los exponentes se tiene:* $(6a)(-3b)+(6a)(8ab^2)+(5ab^2)(-3b)+(5ab^2)(8ab^2)=-18ab+48a^2b^2-15ab^3+40a^2b^4$

**Ejercicios de Taller**

*a)* $\left(-2a^2b^3c^5\right)\left(4a^2bc^2\right)=$

*b)* $\left(5xy^2z\right)\left(-3xz^5+\frac{1}{5}xy^3z^2\right)=$

*c)* $\left(3p^2q^5r^3\right)\left(-3pqr^3+\sqrt{5}pr^5\right)=$

*d)* $\left(2a^2b+c\right)(5a-2c)=$

*e)* $\left(\frac{1}{4}xy^2+2yz\right)\left(\frac{4}{3}xy^2-2yz+8y\right)=$

### 4.3.4. División

**Ejemplo 4.16** *Resolver* $(8x^3y+10x^2-4x^2y-5x)/(4xy+5)=$

*En el primer paso (i) mostrado en la Figura 7 se busca el factor requerido para que al operar sobre* $4xy$*, resulte* $8x^3y$*.O sea,* $(Factor)(4xy)=8x^3y$*; el factor que cumple es* $2x^2$*.*

*El monomio $2x^2$ opera sobre el divisor $4xy+5$,resultando: $2x^2(4xy+5) = 8x^3y+10x^2$. Dicho binomio se resta al dividendo, dando como resultado cero.*

*En el segundo paso (ii) se bajan los términos que quedan del dividendo y se busca un factor que al operar sobre $4xy$, resulte $-4x^2y$. El factor que cumple es $-x$.*

*Se multiplica el factor por el dividendo $-x(4xy+5) = -4x^2y - 5x$. Dicho término se resta al divisor dejando un cero como residuo.*

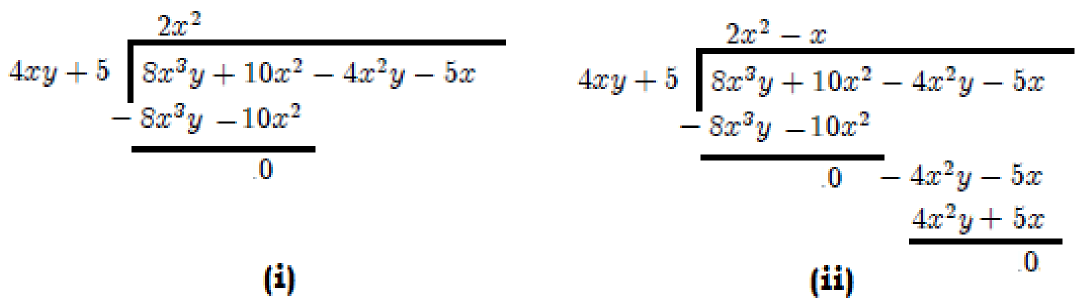


Figura 7: Procedimiento del Ejemplo 4.16.

**Ejemplo 4.17** *Resolver* $(18a^2+b^2+9ab+12a+12)/(6a+b) =$

*En el primer paso (i) de la figura 8 se busca el factor que al operar sobre $6a$ de como resultado $18a^2$ .O sea, $(Factor)(6a) = 18a^2$. Dicho factor es $3a$. Al multiplicar el factor por el divisor se tiene $(3a)(6a+b) = 18a^2+3ab$, este binomio se resta al dividendo quedando como diferencia $b^2+6ab$.*

*En el segundo paso (ii) el factor empleado para operar es $b$. Al multiplicar $b$ por el divisor se obtiene $b^2+6ab$ valor que se resta al dividendo.*

*Finalmente (iii) se bajan los últimos términos del dividendo. Para este caso el factor para operar es 2, se multiplica por el divisor, se resta al dividendo; quedando como residuo $-2b+12$.*

**Ejercicios de Taller**

*a)* $\left(48x^3+64x^2+30x+20\right)/(6x+8) =$

*b)* $\left(a^2+3ab+2b^2\right)/(a+b) =$

*c)* $\left(30x^5+45x^2\right)/\left(15x^2\right) =$

*d)* $\left(5x^3+4x^2+5xy+4y\right)/(5x+4) =$

## 4.4. Productos notables.

En la solución de problemas matemáticos existen algunos productos que aparecen frecuentemente y que con experiencia pueden desarrollarse de forma directa. Estos productos se conocen como *productos notables.*

### 4.4.1. Binomio al cuadrado

Se representa y desarrolla de la siguiente forma $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa+ab+ab+bb = a^2+2ab+b^2$.

Puede notarse que el producto nos da como resultado un trinomio. Al desarrollo de un binomio al cuadrado se le conoce como Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP). En lenguaje algebraico el producto notable anterior se lee:

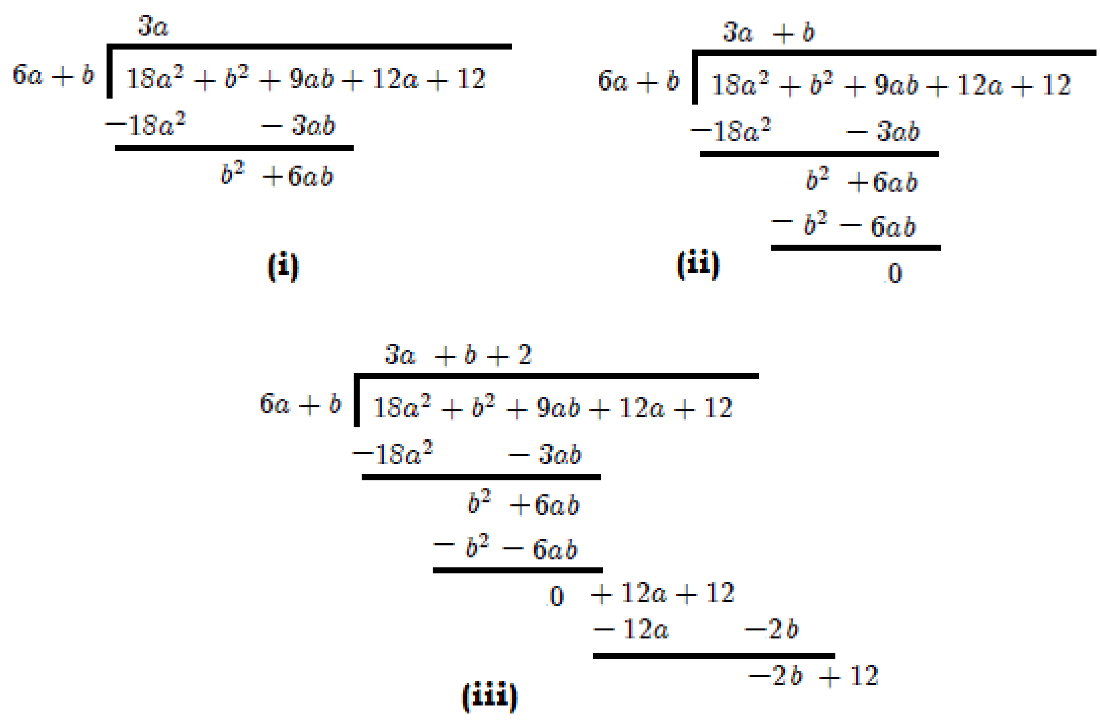


Figura 8: Procedimiento del Ejemplo 4.17.

*El cuadrado de la suma de dos números (binomio al cuadrado) es el cuadrado del primer término más el doble producto del primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término.*

**Ejemplo 4.18** *Desarrolle el producto* $(5p + 6q)^2 =$

$$\begin{aligned}(5p+6q)^2 &= (5p)^2 + 2(5p)(6q) + (6q)^2 \\ &= 25p^2 + 60pq + 36q^2.\end{aligned}$$

**Ejemplo 4.19** *Desarrolle el producto* $(3ab^2 + 5a^2c)^2 =$

$$\begin{aligned}(3ab^2 - 5a^2c)^2 &= (3ab^2)^2 + 2(3ab^2)(-5a^2c) + (5a^2c)^2 \\ &= 9a^2b^4 - 30a^3b^2c + 25a^4c^2.\end{aligned}$$

**Ejemplo 4.20** *Desarrolle el producto* $(\frac{1}{3}x^3y^2 + \sqrt{5}yz)^2 =$

$$\begin{aligned}(-\frac{1}{3}x^3y^2 + \sqrt{5}yz)^2 &= (-\frac{1}{3}x^3y^2)^2 + 2(-\frac{1}{3}x^3y^2)(\sqrt{5}yz) + (\sqrt{5}yz)^2 \\ &= \frac{1}{9}x^6y^4 - \frac{2\sqrt{5}}{3}x^3y^3z + 5y^2z^2.\end{aligned}$$

**Ejercicios de Taller**

*a)* $(2a + 3b)^2 =$

*b)* $(\frac{2}{3}a^2b + 7b^3)^2 =$

*c)* $(-4x + \frac{1}{3}xy^2)^2 =$

*d)* $(\sqrt{2}s^3 + 5s^2)^2 =$

### 4.4.2. Binomio conjugado

El conjugado del binomio $(a+b)$ es $(a-b)$ .Su producto se representa y desarrolla de la siguiente forma

$$(a+b)(a-b) = aa - ab + ab - bb = a^2 - b^2$$

y nos da como resultado una "*diferencia de cuadrados*".

En lenguaje algebraico el producto se lee:

*El producto de un binomio con su conjugado es el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.*

**Ejemplo 4.21** *Desarrolle el producto* $(6x+8y)(6x-8y) =$

$$(6x+8y)(6x-8y) = (6x)^2 - (8y)^2 = 36x^2 - 64y^2$$

**Ejemplo 4.22** *Desarrolle el producto* $(\frac{2}{3}ab^2 + \sqrt{2}c)(\frac{2}{3}ab^2 - \sqrt{2}c) =$

$$(\frac{2}{3}ab^2 + \sqrt{2}c)(\frac{2}{3}ab^2 - \sqrt{2}c) = (\frac{2}{3}ab^2)^2 - (\sqrt{2}c)^2 = \frac{4}{9}a^2b^4 - 2c^2$$

**Ejercicios de Taller**

*a)* $(2a+3b)(2a-3b) =$

*b)* $(\frac{1}{3}a^2b^2 + 4b^5)(\frac{1}{3}a^2b^2 - 4b^5) =$

*c)* $(\sqrt{5}xy^2 + 4x^2y)(\sqrt{5}xy^2 - 4x^2y) =$

*d)* $(x+5)(x-5) =$

### 4.4.3. Binomio al cubo

Un binomio al cubo se desarrolla como sigue: $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$

Por lo que se puede establecer en forma general

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

**Ejemplo 4.23** *Desarrolle el siguiente binomio* $(3x^2+2y)^3 =$

Empleando el desarrollo de un binomio al cubo se tiene: $(3x^2+y)^3 = (3x^2)^3 + 3(3x^2)^2(2y) + 3(3x^2)(2y)^2 + (2y)^3 = 27x^6 + 54x^4y + 36x^2y^2 + 8y^3$

**Ejemplo 4.24** *Desarrolle el siguiente binomio* $(2p - \frac{2}{3}p^2q)^3 =$

El binomio se desarrolla de la siguiente manera $(2p)^3+3(2p)^2(-\frac{2}{3}p^2q)+3(2p)(-\frac{2}{3}p^2q)^2+(-\frac{2}{3}p^2q)^3$, al elevar los términos a sus respectivos exponentes, resulta: $8p^3+3(4p^2)(-\frac{2}{3}p^2q)+3(2p)(\frac{4}{9}p^4q^2)+(-\frac{8}{27}p^6q^3)$, por último se multiplican los monomios, $8p^3 - 8p^4q + \frac{8}{3}p^5q^2 - \frac{8}{27}p^6q^3$.

**Ejercicios de Taller**

*a)* $(a^3+4b^2)^3 =$

*b)* $(4a^2b+2ab^3)^3 =$

*c)* $(-2x - \frac{1}{3}x^4y^2)^3 =$

#### 4.4.4. Otros productos notables

En la tabla se muestran otros productos

| |
|---|
| $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |
| $(a+b+c)^3 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ |
| $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ |
| $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ |
| $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$ |

**Ejemplo 4.25** *Desarrolle el producto* $(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4) =$

Empleando el producto notable se tiene:

$(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4) = (2x)^3 - (y^2)^3 = 8x^3 - y^6$

**Ejercicios de Tarea**

*1.- Realice las siguientes operaciones con polinomios:*

*a)* $(a+2bc+d^2) + (-2a+8bc+4d^2+5e) =$

*b)* $(-\frac{1}{3}x+6xy+y^2) + (2x-3xy+8y^2) =$

*c)* $(\frac{4}{3}w+6y+\frac{2}{3}z) + (-\frac{1}{7}w+y^2-2z) =$

*d)* $(3a-2bc+4d^2) - (\frac{3}{7}a-4bc-8d^2+ef) =$

*e)* $(8b^3-3b^2-2b) - (-3b^3+7b^2+2b) =$

*f)* $(\frac{1}{2}ab^3c^2)(2a^2bc^4) =$

*g)* $(8xyz^2)(-2x+3xy^2z) =$

*h)* $(x+6)(x-3) =$

*i)* $(-3ab^3+\frac{1}{2}ab^2)(ab+2a^2) =$

*j)* $(6x^3+35x^2+28x+15)/(6x^2+5x+3) =$

*k)* $(y^2x^2+yx^2-y^3+y)/(y^2+y) =$

*2.- Desarrolle el producto notable:*

*a)* $(5p+8)^2 =$

*b)* $(2x^2y^3+3xy)^2 =$

*c)* $(\sqrt{5}a^2-4b)^2 =$

*d)* $(\frac{1}{3}a+5b)(\frac{1}{3}a-5b) =$

*e)* $(x+3)(x-3) =$

*f)* $(\sqrt{6}mn+\sqrt{3})(\sqrt{6}mn-\sqrt{3}) =$

*g)* $(6x+8y)(6x-8y) =$

*h)* $(2a+7)^3 =$

*i)* $(3xy^2+2x^3y)^3 =$

*j)* $(x^2+2x+3)^3 =$

*k)* $(4m+2n)(16m^2-8mn+4n^2) =$

*3.- Halle el producto de las siguientes expresiones:*

*a)* $(x-1)(x+2) =$

*b)* $(x+2y)^2 =$

*c)* $(3h-2k)^2 =$

*d)* $(5b^4+3x^2)(5b^4-3x^2) =$

*e)* $(a+b-c)^2 =$

*f)* $(2a^2-4a+1)^2 =$

*g)* $(3x-5)(7x+4) =$

*h)* $(x^2+7x-2)(3x^2-x+5) =$

*i)* $(3x-2)(3x-2)(3x-2) =$

*j)* $(4x+5y)(6x^2-3xy+2y^2) =$

*4.- Determine el producto de las siguientes expresiones:*

*a)* $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{2x}{3}+\frac{2y}{4}\right) =$

*b)* $\left(\frac{m^2}{3}+\frac{2n^2}{5}\right)\left(\frac{m^2}{3}-\frac{2n^2}{5}\right) =$

*c)* $\left(\frac{3a^2}{b}+\frac{5x}{4y}\right)\left(\frac{3a^2}{b}-\frac{5x}{4y}\right) =$

*d)*$\left(m^3+m^2-2m+1\right)^2 =$

*e)* $[3\,(2y+3b)+7]\;[7\,(2y+3b)-7] =$

*f)* $\left[\left(a^3-a\right)+\left(a^2-3\right)\right]\left[\left(a^3-a\right)-\left(a^2-3\right)\right] =$

# 5. Factorización

## 5.1. Antecedentes

Se conoce como *Factorización* al proceso a través del cual se descompone una cantidad en factores. Así como los números pueden ser expresados como el producto de dos o mas números, un polinomio puede ser expresado como el producto de dos o mas expresiones algebraicas. Así por ejemplo si se desea factorizar el número 30, se tiene que

$$30 = (10)(3) = (15)(2) = (3)(5)(2) = (6)(5)$$

así, se puede ver que el número 30 se ha factorizado en cuatro diferentes formas. Los números 10, 3, 15, 6, 5, 10 y 3 se llaman factores del número 30, y en su caso también son divisores del número 30.

Por otro lado si deseamos factorizar el polinomio $3xy+6xm-9yn$, se tiene

$$\begin{aligned} 3xy+6xm-9yn &= 3\,(xy+2xm-3yn) \quad \text{ó} \quad 3xy+6xm-9yn = 3x\left(y+2m-3\frac{yn}{x}\right) \quad \text{ó} \\ 3xy+6xm-9yn &= m\left(\frac{3xy}{m}+6x-\frac{9yn}{m}\right) \end{aligned}$$

aquí se puede ver, que el polinomio se ha factorizado de tres formas diferentes, y desde luego no son las únicas. El tipo de factorización que se deberá emplear dependerá del tipo de expresión que se tenga y además del objetivo de la misma. Así pues, se pueden definir diferentes tipos de factorización, los cuales se detallan en lo sucesivo.

## 5.2. Tipos de Factorización

### 5.2.1. Factorización por factor común.

Como el nombre lo indica, consiste en determinar un factor que sea común a todos o la mayoría de los términos de una expresión algebraica.

**Ejemplo 5.1** *Factorizar el polinomio* $3r^3p + 6r^5q - 12r^2s$.

En este caso el factor estará compuesto por el máximo comun divisor de los coeficientes del polinomio y por las variables con exponente menor que sean común a los términos del polinomio. Aquí se puede ver que los coeficientes del polinomio son $3,\ 6$ y $12$. El MCD (Máximo Común Divisor) de estos coeficientes es 3. También se puede ver que la variable comun a todos los términos es $r$, y su exponente menor es el 2. Por lo tanto nuestro factor común será $3r^2$. Así, nuestro polinomio puede factorizarse como

$$3r^3p + 6r^5q - 12r^2s = 3r^2\left(rp + 2r^3q - 4s\right),$$

donde el primer factor es conocido como factor común.

**Ejemplo 5.2** *Factorizar el polinomio* $2r\,(3t+1) + (3t+1)\,(k-5) - q\,(3t+1)\,.$

En este otro caso, tenemos tres términos y se puede notar que el factor común a los tres térmionos es $(3t+1)\,,$ así pués el polinomio puede ser expresado por la siguiente factorización

$$2r\,(3t+1) + (3t+1)\,(k-5) - q\,(3t+1) = (3t+1)\,[2r + (k-5) - q]\,.$$

**Ejemplo 5.3** *Factorizar el polinomio* $4x^3y^4z + 5m^2nt^3 - 2x^2y^6w + 10m^2n^5k^2$.

En este otro caso, no hay un factor común explícito para los cuatro términos, no obstante, podemos hacer una agrupación previa para realizar la factorización. Si agrupamos el primero y tercer término $\left(4x^3y^4z - 2x^2y^6w\right)$, se puede notar que el MCD de los coeficientes de ambos términos es 2, y las variables en común para ambos términos son $x$ e $y$, y sus exponentes menores son 2 y 4 respectivamente. Entonces nuestro factor común para estos dos términos será $2x^2y^4$. De igual manera si agrupamos el segundo y cuarto término del polinomio $\left(5m^2nt^3 + 10m^2n^5k^2\right)$ el factor común es $5m^2n$. Si reordenamos nuestro polinomio, se puede factorizar así

$$4x^3y^4z - 2x^2y^6w + 5m^2nt^3 + 10m^2n^5k^2 = 2x^2y^4\left(2xz - y^2w\right) + 5m^2n\left(t^3 + 2n^4k^2\right).$$

**Ejercicios de Taller**

*Factorizar los siguientes polinomios.*

*a)* $12x^3 + 2x^2 + 6x =$

*b)* $6x^3y^4 - 3\sqrt{3}x^2y^2 - 3x^2y + 3xy =$

*c)* $2y^2 - yz - 3z =$

*d)* $15at + bs + 3bt + 5as =$

### 5.2.2. Factorización de Diferencias de cuadrados.

En términos generales, una diferencia de cuadrados, es una expresion formada por dos términos de signo contrario y ambos pueden tener o no raiz cuadrada exacta. Por ejemplo son diferencias de cuadrados los términos $16x^2 - 9y^2$, $-2m^4 + 4r^6$ y $25t^8 - 3x^5$. Las diferencias de cuadrados se factorizan en dos binomios que se denominan *Binomios Conjugados,* tales binomios tienen la característica de tener los mismos términos pero con solo un signo diferente. Así se tiene que

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \tag{2}$$

donde los términos de los factores del miembro derecho de la ecuación son las raices cuadradas de los términos del miembro izquierdo de la igualdad.

**Ejemplo 5.4** *Factorizar la diferencia de cuadrados $x^2 - y^4$.*

Podemos ver a esta expresión como una diferencia de cuadrados porque es un binomio con términos de signo contrario y podemos sacar raíz cuadrada a los términos. Para encontrar los términos de los binomios conjugados, obtenemos las raices cuadradas de los términos de la diferencia de cuadrados, asi la raíz cuadrada del primer término es $\sqrt{x^2} = x^{\frac{2}{2}} = x$ y la raíz cuadrada del segundo término es $\sqrt{y^4} = y^{\frac{4}{2}} = y^2$. Tomamos como referencia a (2) y se tiene que

$$x^2 - y^4 = \left(x + y^2\right)\left(x - y^2\right).$$

**Ejemplo 5.5** *Factorizar la diferencia de cuadrados $-9m^5 + 3n^6$.*

Nuevamente se tiene un binomio con términos de signo contrario, reagrupamos los términos por cuestiones prácticas, quedando la expresión como $3n^6 - 9m^5$, ahora obtenemos las raices cuadradas de los términos de la diferencia de cuadrados, así $\sqrt{3n^6} = \sqrt{3}\sqrt{n^6} = \sqrt{3}n^{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}n^3$ y $\sqrt{9m^5} = \sqrt{9}\sqrt{m^5} = 3m^{\frac{5}{2}}$, en este caso hay que notar que el 3 y $m^5$ no tienen raiz cuadrada exacta. Tomamos como referencia (2) y se tiene que

$$-9m^5 + 3n^6 = 3n^6 - 9m^5 = \left(\sqrt{3}n^3 + 3m^{\frac{5}{2}}\right)\left(\sqrt{3}n^3 - 3m^{\frac{5}{2}}\right).$$

**Ejemplo 5.6** *Factorizar la diferencia de cuadrados $(x + 2y)^4 - (3m + 6t)^2$.*

En este caso, se presenta otra diferencia de cuadrados, donde cada término de la diferencia de cuadrados es a su vez un binomio. De igual manera se procede a obtener las raices cuadradas de los términos de la diferencia de cuadrados, así $\sqrt{(x + 2y)^4} = (x + 2y)^{\frac{4}{2}} = (x + 2y)^2$ y $\sqrt{(3m + 6t)^2} = (3m + 6t)^{\frac{2}{2}} = (3m + 6t)$. Tomamos como referencia (2) y se tiene que

$$(x + 2y)^4 - (3m + 6t)^2 = \left[(x + 2y)^2 + (3m + 6t)\right]\left[(x + 2y)^2 - (3m + 6t)\right].$$

**Nota:** *Las expresiones $x^2 + y^2$, $-m^4 - t^2$ por ejemplo, no son diferencias de cuadrados, porque los términos tienen signos iguales, por lo tanto de ninguna manera se pueden factorizar en Binomios Conjugados. Se deja como ejercicio hacer las demostraciones:*

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\ a^2 + b^2 &\neq (a - b)(a + b). \end{aligned}$$

**Ejercicios de Taller**

*Factorizar las siguiente diferencias de cuadrados.*

*a)* $36x^2 - 25 =$

*b)* $x^4 - y^4 =$

*c)* $x^8 - y^4 =$

*d)* $7m^6 - 16n^{10} =$

### 5.2.3. Factorización de sumas y diferencias de cubos.

En términos generales, una diferencia o suma de cubos, es una expresion formada por dos términos que pueden tener o no el mismo signo y ambos pueden tener o no raiz cúbica exacta. Las diferencias y sumas de cubos se factorizan en el producto de un binomio por un trinomio de acuerdo a la siguiente regla

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right), \tag{3}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right). \tag{4}$$

En ambos casos, el primer factor esta compuesto de las raíces cúbicas de los téminos del miembro izquierdo, el segundo factor se construye a partir de los términos del primer factor, a saber: el cuadrado del primer término más el producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término. Hay que notar el orden de los signos.

**Ejemplo 5.7** *Factorizar la diferencia de cubos* $x^3 - y^3$,

Se determinan los términos del primer factor, obteniendo las raices cúbicas de los términos de la diferencia de cubos. Así la raiz cúbica del primer término es $\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x$ y la raíz cúbica del segundo término es $\sqrt[3]{y^3} = y^{\frac{3}{3}} = y$. Tomamos como referencia (3) y se tiene

$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right).$$

**Ejemplo 5.8** *Factorizar la suma de cubos* $27m^6 + 8p^{12}$.

Se determinan los términos del primer factor, obteniendo las raices cúbicas de los términos de la suma de cubos. Así $\sqrt[3]{27m^6} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{m^6} = 3m^{\frac{6}{3}} = 3m^2$ y $\sqrt[3]{8p^{12}} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{p^{12}} = 2p^{\frac{12}{3}} = 2p^4$. Tomamos como referencia (4) y se tiene

$$27m^6 + 8p^{12} = \left(3m^2 + 2p^4\right)\left(\left(3m^2\right)^2 - \left(3m^2\right)\left(2p^4\right) + \left(2p^4\right)^2\right) = \left(3m^2 + 2p^4\right)\left(9m^4 - 6m^2p^4 + 4p^8\right).$$

**Ejemplo 5.9** *Factorizar la diferencia de cubos* $12x^6 - 64y^5$.

Se determinan los términos del primer factor, obteniendo las raices cúbicas de los términos de la diferencia de cubos. Así $\sqrt[3]{12x^6} = \sqrt[3]{12}\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{12}x^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{12}x^2$ y $\sqrt[3]{64y^5} = \sqrt[3]{64}\sqrt[3]{y^5} = 4y^{\frac{5}{3}}$. Tomamos como referencia (3) y se tiene

$$12x^6 - 64y^5 = \left(\sqrt[3]{12}x^2 - 4y^{\frac{5}{3}}\right)\left(\left(\sqrt[3]{12}x^2\right)^2 + \left(\sqrt[3]{12}x^2\right)\left(4y^{\frac{5}{3}}\right) + \left(4y^{\frac{5}{3}}\right)^2\right) = \left(\sqrt[3]{12}x^2 - 4y^{\frac{5}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{12^2}x^4 + 4\sqrt[3]{12}x^2y^{\frac{5}{3}} + 16x^{\frac{10}{3}}\right).$$

**Nota** *Los signos de los factores ya estan asignados por (3) y (4).*

**Ejercicios de Taller**

*Factorizar las siguientes diferencias y sumas de cubos.*

*a)* $a^3 - 64b^3 =$

*b)* $8x^3y^6 + 27 =$

*c)* $y^9 + 125 =$

*d)* $64m^{12} - 8x^3 =$

### 5.2.4. Factorización de binomios de la forma $x^n \pm y^n$.

Para realizar la factorización de este tipo de binomios es recomendable que $n$ sea impar y mayor que 3. Si el binomio $x^n + y^n$ se divide por el binomio $x+y$ se obtiene como resultado el factor $\left(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 - \cdots x^2y^{n-3} - x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}\right)$ donde el residuo es cero. Por lo cual se puede establecer la regla (5).

$$x^n + y^n = (x+y)\left(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 - \cdots x^2y^{n-3} - x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}\right), \text{ y de la misma forma} \quad (5)$$

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \cdots x^2y^{n-3} + x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1}\right). \quad (6)$$

**Ejemplo 5.10** Factoricemos el binomio $x^7 + y^7$.

De acuerdo al modelo (5), el primero factor es $(x+y)$ y el segundo factor es $\left(x^6y^0 - x^5y^1 + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - x^1y^5 + x^0y^6\right)$. Finalmente se tiene

$$x^7 + y^7 = (x+y)\ \left(x^6y^0 - x^5y^1 + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - x^1y^5 + x^0y^6\right).$$

**Ejemplo 5.11** Factoricemos ahora el binomio $x^7 - y^7$.

De acuerdo al modelo (6), el primer factor es $(x-y)$ y el segundo factor es $\left(x^6y^0 + x^5y^1 + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + x^1y^5 + x^0y^6\right)$. Finalmente se tiene

$$x^7 - y^7 = (x-y)\ \left(x^6y^0 + x^5y^1 + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + x^1y^5 + x^0y^6\right)$$

**Ejercicios de Taller**

*Factorizar los siguientes binomios.*

a) $p^5 + c^5 =$

b) $h^7 - t^7 =$

### 5.2.5. Factorización de trinomios cuadrados de la forma $ax^2 + bx + c$

Los trinomios cuadrados estan compuestos desde luego de la suma de tres términos, un término cuadrático, un término lineal y un término independiente y se pueden factorizar como el producto de dos binomios como se muestra en la ecuación (7).

$$ax^2 + bx + c = (x+\beta)(x+\delta) \quad (7)$$

Es de hacer notar que existen trinomios cuadrados que son factorizables y otros que no lo son. Dentro de los que son factorizables hay unos que son trinomios cuadrados perfectos (TCP) y otros que son no perfectos. En los TCP el resultado de la factorización son dos binomios iguales, mientras que en los trinomios cuadrados no perfectos el resultado de la factorización son dos binomios diferentes. Habrá algunos trinomios cuadrados que no se puedan factorizar por el método aquí descrito, cuando esto suceda significa una de dos cosas, una es que $\beta$ y $\gamma$ son números decimales o la otra que $\beta$ y $\delta$ no existen dentro de los números reales.

**Trinomios cuadrados perfectos (TCP)** Los trinomios cuadrados perfectos, son aquellos cuya factorización resulta en el producto de dos binomios iguales, y puede ser representado como un binomio al cuadrado.

**Ejemplo 5.12** *Factorizar el trinomio* $-6x + 9 + x^2$.

Para iniciar a factorizar un trinomio cuadrado es recomendable acomodar los términos en orden descendente, así pues podemos reescribir el trinomio en la forma $x^2 - 6x + 9$. Después se buscan los factores adecuados que deberán ir en los binomios.

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$$

Figura 9: Factorización de un TCP.

Finalmente se debe comprobar que la factorización sea correcta, para esto, el término cuadrático $x^2$ debe resultar de la multiplicacion de los términos izquierdos de los binomios. El término independiente $+9$ debe resultar de la multiplicación de los términos derechos de los binomios considerando sus signos. Por último el termino lineal $-6x$ debe resultar de la suma del producto de los términos medios mas el producto de los términos de los extremos como lo muestra la figura 9.

**Ejemplo 5.13** *Factorizar el trinomio* $-\frac{4}{3}x + x^2 + \frac{4}{9}$.

Acomodamos los términos de mayor a menor orden y se tiene $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$, y buscamos los factores adecuados para los binomios resultantes de la factorización, como se muestra en la figura 10.

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Figura 10: Factorización de un TCP.

Finalmente se debe comprobar que la factorización sea correcta, para esto, el término cuadrático $x^2$ debe resultar de la multiplicacion de los términos izquierdos de los binomios. El término independiente $+\frac{4}{9}$ debe resultar de la multiplicación de los términos derechos de los binomios considerando sus signos. Por último el termino lineal $-\frac{4}{3}x$ debe resultar de la suma del producto de los términos medios mas el producto de los términos de los extremos como lo muestra la figura 10.

**Nota** *La factorización de un TCP resulta en la factorización de dos binomios iguales, por lo que un TCP puede ser representado como un binomio al cuadrado. Asi el ejemplo 10 se pueden representar como* $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ y el ejemplo 11 como $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2$.

**Trinomios cuadrados no perfectos** Los trinomios cuadrados no perfectos, son aquellos cuya factorización resulta en el producto de dos binomios diferentes, y no puede ser representado como un binomio al cuadrado.

**Ejemplo 5.14** *Factorizar el trinomio* $-8x-8+6x^2$.

Acomodamos los términos de mayor a menor orden y se tiene $6x^2-8x-8$, y buscamos los factores adecuados quedando la factorización como se muestra en la figura 11.

$$6x^2-8x-8=(2x-4)(3x+2)$$

Figura 11: Factorización de un trinomio cuadrado no perfecto.

Finalmente se debe comprobar que la factorización sea correcta, para esto, el término cuadrático $6x^2$ debe resultar de la multiplicacion de los términos izquierdos de los binomios. El término independiente $-8$ debe resultar de la multiplicación de los términos derechos de los binomios considerando sus signos. Por último el termino lineal $-8x$ debe resultar de la suma del producto de los términos medios mas el producto de los términos de los extremos como lo muestra la figura 11.

**Ejemplo 5.15** *Factorizar el trinomio* $2x+\frac{3}{8}+2x^2$.

Primero se acomodan los términos en orden descendiente, asi se tiene el trinomio $2x^2+2x+\frac{3}{8}$, enseguida se buscan los factores adecuados de los binomios resultantes de la factorización como se ve en la figura 12.

$$2x^2+\mathbf{2}x+\frac{3}{\mathbf{8}}=\left(2x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$$

Figura 12: Factorizacion de un trinomio cuadrado no perfecto.

Finalmente se debe comprobar que la factorización sea correcta, para esto, el término cuadrático $-2x^2$ debe resultar de la multiplicacion de los términos izquierdos de los binomios. El término independiente $+\frac{3}{8}$ debe resultar de la multiplicación de los términos derechos de los binomios considerando sus signos. Por último el termino lineal $+x$ debe resultar de la suma del producto de los términos medios mas el producto de los términos de los extremos como lo muestra la figura **??**.

**Ejemplo 5.16 (Trinomio no factorizable)** Como se mencionó con anterioridad, algunos trinomios cuadrados no son factorizables, como por ejemplo $x^2+12x-1$ ó $x^2+x+2$. Se deja a consideración del profesor intentar la factorización de estos trinomios.

**Ejercicios de Taller (Trinomios cuadrados perfectos)**

*Factorizar los siguientes trinomios.*

*a)* $9+x^2+6x=$

*b)* $x^2+4-4x=$

*c)* $x^2-10x+25=$

*d)* $x^2 + 10x + 25 =$

**Ejercicios de Taller (Trinomios cuadrados no perfectos)**

*Factorizar los siguientes trinomios.*

*a)* $-6 + x^2 + x =$

*b)* $x^2 + 20 - 9x =$

*c)* $x^2 + 6x + 8 =$

*d)* $x^2 + 6x + 5 =$

**Ejercicios de Tarea**

*1. Factorice los siguientes polinomios.*

*a)* $6x^5y^5 + \sqrt{2}x^2y^3 + 14xy^3 =$

*b)* $3a^2b^3 - 3\sqrt{2}a^4b^2 + 9a^2b =$

*c)* $xyz^3 - xy^3z + x^3yz =$

*d)* $x^3 + 2x + x^2 + 2 =$

*e)* $2p^3 - p^2 - 1 =$

*2. Factorice los siguientes binomios.*

*a)* $a^2 - 4b^2 =$

*b)* $4x^2y^2 - 1 =$

*c)* $49x^2 - 64y^2 =$

*d)* $x^6 + y^6 =$

*e)* $y^6 - 1 =$

*f)* $1 - m^3 =$

*3. Factorice los siguientes polinomios.*

*a)* $x^2 - 5x + 6 =$

*b)* $x^2 - 10x + 24 =$

*c)* $y^2 + 7y + 10 =$

*d)* $y^4 + 10y^2 + 21 =$

*e)* $x^4 - 3x^2 - 4 =$

*f)* $x^2 + 4x - 12 =$

*g)* $r^2 + 2r + 1 =$

*h)* $r^2 + 5r - 14 =$

*i)* $x^2 - xy - 2y^2 =$

*j)* $x^2 - 4xy + 3y^2 =$

*k)* $r^2 - 8rt + 16t^2 =$

*l)* $9m^2 - 6mn + n^2 =$

*m)* $2p^2 + 7p + 5 =$

*n)* $8q^2 + 2q - 3 =$

*ñ)* $10b^4 - 23b^2 + 12 =$

*o)* $2x^2 - 7xy + 3y^2 =$

*p)* $6a^4 + 13a^2 - 15 =$

*q)* $-3x^2 - 5xy + 12y^2 =$

*r)* $3m^2 + 8h^3 =$

*s)* $25h^4 - 7x^3 =$

*4. Factorice los siguientes polinomios.*

*a)* $(x^2 + 1)^3 + (y^2 - 1)^3 =$

*b)* $(4 - x^2)^3 - (4 - y^2)^3 =$

*c)* $x(x - y) + y(y - x) =$

*d)* $x(x - y) - y(y - x) =$

*e)* $(1 - x^2)^3 - (1 - y^2)^3 =$

*f)* $(x^2 - 4)^3 + (4 - y^{23}) =$

*g)* $1 - 256m^2 =$

*h)* $r^8 - 6561 =$

*i)* $x^6 - 7x^3 - 8 =$

*j)* $m^{10} - 5m^5 + 6 =$

*k)* $r^3s^3 - 8t^3 =$

*l)* $25c^2d^2 - x^2y^4 =$

*m)* $p^3 - pq^2 - p^2q - q^3 =$

*n)* $4x^2 + 7xy - 2y^2 =$

*ñ)* $36x^2 + 12xy + y^2 =$

*5. Factorice las siguientes expresiones.*

*a)* $x^2 - 13 =$

*b)* $2m^2 - 1 =$

*c)* $5m^2 - 1 =$

*d)* $\frac{1}{4}a^2 - b^2 =$

*e)* $x^2 + x + \frac{1}{4} =$

*f)* $m^2 - \frac{2}{5}m + \frac{1}{25} =$

*g)* $3m^2 - 4r^2 =$

*h)* $24 - n^2 =$

*i)* $x^2 - 2\sqrt{2}xy + 2y^2 =$

*j)* $p^{11} - q^{11} =$

## 6. Expresiónes racionales

El cociente de dos polinomios puede o no ser un polinomio y se conoce como *expresión racional*.

Algunos ejemplos de expresiones racionales son las siguientes:

*a)* $\frac{6x^2+8x+3}{2x+2}$

*b)* $\frac{-3x^5+8}{x+4}$

*c)* $\frac{\frac{1}{4}xy+8y+6}{y^2+xy}$

## 6.1. Simplificación de expresiones racionales

La simplificación de expresiones racionales se realiza mediante la aplicación de sus propiedades y la factorización de los polinomios.

Para cualquiera de los polinomios A, B, C y D.Las propiedades son las siguientes:

| Propiedad | |
|---|---|
| Cancelación | $\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}; C \neq 0$ |
| Suma o Resta | $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm CB}{BD}$ |
| Multiplicación | $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$ |
| División | $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$ |

**Ejemplo 6.1** *Simplificar la siguiente expresión* $\frac{x^2-25}{x+5}$.

*El polinomio en el numerador corresponde a una diferencia de cuadrados que se factoriza de la siguiente forma:* $x^2-25 = (x+5)(x-5)$

*Por lo que la expresión se puede escribir como*

$$\frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)}.$$

*Finalmente aplicando la propiedad de cancelación se tiene que*

$$\frac{(\mathbf{x+5})(x-5)}{(\mathbf{x+5})} = (x-5)$$

**Ejemplo 6.2** *Simplificar la siguiente expresión* $\frac{x^2-8x+15}{x^2-9}$.

*Para simplificar se factorizan ambos polinomios. La factorización del numerador es* $x^2-8x+15 = (x-3)(x-5)$*. Mientras que el denominador se factoriza como* $x^2-9 = (x-3)(x+3)$*. Sustituyendo y aplicando la propiedad de cancelación se tiene*

$$\frac{(\mathbf{x-3})(x-5)}{(\mathbf{x-3})(x+3)} = \frac{x-5}{x+3}.$$

**Ejemplo 6.3** *Simplificar la siguiente expresión* $\frac{x^3-8}{-6x+12}$.

*El numerador es una diferencia de cubos por lo que su factorización es* $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$*. En el denominador se factoriza el* $-6$*, resultando* $-6x+12 = -6(x-2)$*. Sustituyendo y aplicando la propiedad de cancelación la expresión queda*

$$\frac{(\mathbf{x-2})(x^2+2x+4)}{-6(\mathbf{x-2})} = \frac{(x^2+2x+4)}{-6} = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

*Nótese que el resultado del cociente es un polinomio.*

**Ejemplo 6.4** *Simplificar la siguiente expresión*

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2-2x+1}.$$

*Las factorizaciones son las siguientes:*

*Para el numerador :*$2x^2-x-1 = (2x+1)(x-1)$.

*El denominador es un TCP por lo que:* $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

*Sustiyuyendo y aplicando las propiedades se tiene*

$$\frac{(2x+1)(\mathbf{x-1})}{(x-1)(\mathbf{x-1})} = \frac{2x+1}{x-1}.$$

**Ejercicios de Taller**

*Simplifique las siguientes expresiones racionales:*

*a)* $\frac{x+7}{x^2-49} =$

*b)* $\frac{p^2+3p+2}{p^2+6p+8} =$

*c)* $\frac{x^3-9x}{x^3-6x^2+9x} =$

*d)* $\frac{x^2-9}{x^3+27} =$

## 6.2. Mínimo Común Múltiplo (m.c.m)

Algunas veces para efectuar operaciones con expresiones racionales es necesario obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores.

**Ejemplo 6.5** *Encuentre el mínimo común múltiplo de los denominadores de las siguientes expresiones* $\frac{1-x}{x^2}; \frac{x+5}{x^2-4}; \frac{2}{(x+2)^2}$

*Los denominadores de las expresiones son:* $x^2; x^2-4; (x+2)^2$

*Los factores para cada uno son:* $x^2; (x+2)(x-2); (x+2)^2$

*Por lo que el m.c.m es:* $x^2(x+2)^2(x-2)$

*El factor* $x+2$ *del segundo denominador no se considera en el m.c.m. ya que esta incluido al tercer denominador.*

**Ejemplo 6.6** *Encuentre el mínimo común múltiplo de los denominadores de las siguientes expresiones* $\frac{5}{x^2+3x}; \frac{x-2}{(x-3)^3}; \frac{4}{x^3}$

*Los denominadores de las expresiones son:* $x^2+3x; (x-3)^3; x^3$

*Los factores para cada uno son:* $x(x+3); (x-3)^3; x^3$

*Por lo que el m.c.m es:* $x^3(x+3)(x-3)^3$

*Los factores* $x$ *del primer denominador no se considera en el m.c.m. ya que esta incluido en el tercer denominador.*

**Ejercicios de Taller**

*Determine el mínimo común múltiplo (m.c.m)*

*a)* $\frac{1}{(r+2)^2(r+3)}; \frac{1}{(r+3)^3(r+2)} =$

*b)* $\frac{1}{x^2+x+2}; \frac{4}{x+2} =$

*c)* $\frac{1}{x^2-10x+25}; \frac{x}{x^2-25}; \frac{1}{x^2+10x+25} =$

*d)* $\frac{p}{p+r}; \frac{r}{p^2+2pr+r^2}; \frac{1}{p^3+r^3} =$

## 6.3. Operaciones con expresiones racionales

### 6.3.1. Suma

**Ejemplo 6.7** *Realice la siguiente suma* $\frac{x}{x+2} + \frac{5}{x-2}$.

*Debe identificarse el mínimo común múltiplo y emplearlo como común denominador*

$$\frac{x}{x+2} + \frac{5}{x-2} = \frac{x(x-2)+5(x+2)}{(x+2)(x-2)},$$

*al desarrollar los productos se tiene*

$$\frac{x(x-2)+5(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x+5x+10}{x^2-4} = \frac{x^2+3x+10}{x^2-4}.$$

**Ejemplo 6.8** *Realice la siguiente suma* $\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+4x+4}$.

*El mínimo común múltiplo (m.c.m) es:* $(x-2)(x+2)^2$*. La operación se desarrolla de la siguiente forma*

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+4x+4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)} + \frac{1}{(x+2)(x+2)} = \frac{x(x+2)+(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+2)} =$$

$$\frac{x^2+2x+x-2}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$

### 6.3.2. Resta

**Ejemplo 6.9** *Realice la siguiente resta* $\frac{6x}{x^2-1} - \frac{x-2}{x-1}$.

*El m.c.m es* $(x-1)(x+1)$*.*

*La opereación se desarrolla como sigue*

$$\frac{6x-(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{6x-(x^2-x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{6x-x^2+x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x^2+7x+2}{x^2-1}.$$

**Ejemplo 6.10** *Realice la siguiente resta* $\frac{x+5}{2x} - \frac{x}{x+8}$.

*El m.c.m es* $(2x)(x+8)$*.*

*La operación se desarrolla como sigue*

$$\frac{(x+5)(x+8)-x(2x)}{2x(x+8)} = \frac{x^2+13x+40-2x^2}{2x(x+8)} = \frac{-x^2+13x+40}{2x^2+16x}.$$

**Ejercicios de Taller**

*Realice las siguientes operaciones:*

*a)* $\frac{6x}{2x+2} + \frac{6}{2x+2} =$

*b)* $\frac{p}{p-q} + \frac{p}{q-p} =$

*c)* $\frac{1}{x+3} + \frac{x}{x+1} + \frac{x^2+1}{x^2+4x+3} =$

*d)* $\frac{q}{q-p} - \frac{p}{q+p} =$

*e)* $\frac{5a}{5a-1} - \frac{1}{1-5a} =$

*f)* $\frac{3}{a-2} - \frac{6}{a^2-4} =$

### 6.3.3. Multiplicación

**Ejemplo 6.11** *Realice el siguiente producto* $\left(\frac{x^2y}{x+5}\right)\left(\frac{y+3}{y}\right)$.

*Aplicando las propiedades de multiplicación y distributiva resulta*

$$\frac{x^2y(y+3)}{(x+5)y} = \frac{x^2y^2+3x^2y}{xy+5y}.$$

**Ejemplo 6.12** *Realice la siguiente multiplicación* $\left(\frac{x+9}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x^2-81}\right)$.

*Aplicando las propiedades necesarias se obtiene*

$$\frac{(x+9)x}{x^2(x^2-81)} = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{x}+\mathbf{9})}{(\mathbf{x})(x)(\mathbf{x}+\mathbf{9})(x-9)} = \frac{1}{x(x-9)} = \frac{1}{x^2-9x}.$$

**Ejemplo 6.13** *Realice la siguiente multiplicación* $\left(\frac{r^2+2r-15}{r+2}\right)\left(\frac{8}{r+5}\right)$.

*Aplicando las propiedades y las factorizaciones necesarias se obtiene*

$$\frac{8(r^2+2r-15)}{(r+2)(r+5)} = \frac{8(r-3)(\mathbf{r}+\mathbf{5})}{(r+2)(\mathbf{r}+\mathbf{5})} = \frac{8(r-3)}{(r+2)} = \frac{8r-24}{r+2}.$$

**Ejercicios de Taller**

*Realizar los siguientes productos de expresiones racionales*

a) $\left(\frac{x+4}{x+3}\right)\left(\frac{x-2}{x+5}\right) =$

b) $\left(\frac{a^2+a}{a^2-1}\right)\left(\frac{a+1}{a^2}\right) =$

c) $\left(x^2-2x+1\right)\left(\frac{x+1}{x^3-1}\right) =$

d) $-\left(\frac{2p+8}{p-1}\right)\left(\frac{p+4}{2p}\right) =$

e) $(5x+2)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x+1}{x^2}\right) =$

### 6.3.4. División

**Ejemplo 6.14** *Realice la siguiente división* $\frac{p+1}{p+2} \div \frac{p+1}{p+5}$.

*Aplicando las propiedades se obtiene*

$$\frac{(\mathbf{p}+\mathbf{1})(p+5)}{(p+2)(\mathbf{p}+\mathbf{1})} = \frac{p+5}{p+2}.$$

**Ejemplo 6.15** *Realice la siguiente división* $\frac{x^4+4x^2+4}{x+2} \div \frac{4-x^4}{5}$.

*Aplicando las propiedades de las expresiones racionales la división queda como*

$$\frac{(x^4+4x^2+4)(5)}{(4-x^4)(x+2)} = \frac{(\mathbf{x}^2+\mathbf{2})(x^2+2)(5)}{(\mathbf{2}+\mathbf{x}^2)(2-x^2)(x+2)} = \frac{(x^2+2)(5)}{(2-x^2)(x+2)} = \frac{5x^2+10}{-x^3-2x^2+2x+4}.$$

**Ejemplo 6.16** *Realice la siguiente división* $\frac{x^2+xy+y^2}{\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}}$.

*Se factoriza el numerador y se efectua la resta del denominador*

$$\frac{x^2+xy+y^2}{\frac{x^3-y^3}{xy}} = \frac{xy(x^2+xy+y^2)}{x^3-y^3},$$

*factorizando la diferencia de cubos de la expresión se tiene*

$$\frac{xy(\mathbf{x}^2+\mathbf{xy}+\mathbf{y}^2)}{(x-y)(\mathbf{x}^2+\mathbf{xy}+\mathbf{y}^2)} = \frac{xy}{x-y}.$$

**Ejercicios de Taller**

*Resolver las siguientes divisiones de expresiones racionales.*

*a)* $\left(\frac{3w+1}{w-4}\right) \div \left(\frac{2w+1}{w}\right) =$

*b)* $\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}\right) \div \left(\frac{x-4}{x+3}\right) =$

*c)* $\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\right) \div \left(\frac{x-2}{x-3}\right) =$

*d)* $\frac{\frac{a}{a-1}-\frac{a+1}{a}}{1-\frac{a}{a-1}} =$

**Ejercicios de Tarea**

*1. Determine el mínimo común múltiplo (m.c.m) de las siguientes expresiones racionales.*

*a)* $\frac{5}{v^2+2v+1}$; $\frac{v}{v^2-3v-4}$

*b)* $\frac{10}{b^3+b^2-6b}$; $\frac{1}{b^2(b-6)}$; $\frac{b}{b-2}$

*c)* $\frac{1}{m^2+m}$; $\frac{m}{m^2+2m+1}$; $\frac{1}{m^2-1}$

*d)* $\frac{1}{x^3-x^2}$; $\frac{x}{x^2-1}$; $\frac{1}{x^3+2x^2+x}$

*2. Simplifique las siguientes expresiones:*

*a)* $\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} =$

*b)* $(2x)(x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(x^2) =$

*c)* $\frac{1}{u^{-1}+v^{-1}} =$

*d)* $\frac{x^2+3x+2}{x^2+6x+8} =$

*e)* $\frac{x^2-9}{x^3+27} =$

*f)* $\frac{v^4+4v^2+4}{4-v^4} =$

*g)* $\frac{3x^2-7x-20}{2x^2-5x-12} =$

*h)* $\frac{w^3-9w}{w^3-6w^2+9w} =$

*i)* $\frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2} =$

*3. Combine y simplifique la expresión:*

*a)* $\frac{4x}{4x+5} + \frac{5}{4x+5} =$

*b)* $\frac{3}{s-2} + \frac{4}{2-s} =$

*c)* $\frac{2x}{x+1} + \frac{5}{x^2-1} =$

*d)* $\frac{b}{2b+1} + \frac{2b}{b-2} =$

*e)* $\frac{2}{r^2-r-12} + \frac{r}{r+3} =$

*f)* $\frac{z}{2z+3} - \frac{3}{4z^2-3z-1} + \frac{4z+1}{2z^2+z-3} =$

*g)* $\left(\frac{t-4}{t+3}\right)\left(\frac{t+5}{t-2}\right) =$

*h)* $\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right)\left(\frac{x+1}{x^2}\right) =$

*i)* $\left(\frac{6x+5}{3x+3}\right)\left(\frac{x+1}{6x^2-7x-10}\right) =$

*j)* $-\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\left(\frac{x^2+x-12}{3+2x-x^2}\right) =$

*k)* $\frac{3w+1}{w-4} \div \frac{2w+1}{w} =$

*l)* $\frac{x}{x+4} \div \frac{x+5}{x} =$

*m)* $\frac{s^2-5s+6}{s^2-7s+10} \div \frac{2-s}{s+2} =$

*n)* $\frac{x}{x+y} \div \frac{y}{x+y} =$

*4. Simplifique las siguientes expresiones racionales:*

*a)* $\frac{\frac{1}{x^2}-x}{\frac{1}{x^2}+x} =$

*b)* $\frac{\frac{1}{s}+\frac{1}{t}}{\frac{1}{s}-\frac{1}{t}} =$

*c)* $\frac{\frac{1+r}{r}+\frac{r}{1-r}}{\frac{1-r}{r}+\frac{r}{1-r}} =$

*d)* $\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h} =$

*e)* $\frac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}} =$

*f)* $\frac{u^{-2}-v^{-2}}{u^2+v^2} =$

*g)* $\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{y}}} =$

*h)* $\frac{v}{\sqrt{z}} - \frac{z}{\sqrt{v}} =$