CAPÍTULO 7
TRIGONOMETRÍA, ÁNGULOS Y SU MEDICIÓN

7.1 MEDICIÓN DE ÁNGULOS

[1]*Un ángulo es la figura formada por dos líneas o rayos con un extremo común. A este punto común se le llama vértice del ángulo (Véase la figura 1).*

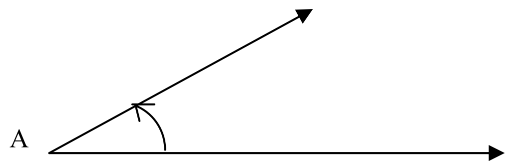


Figura 1. A es el vértice. A este ángulo se le llama ángulo A (a menudo se escribe $\angle A$).

Consideramos conveniente hablar de los ángulos desde un punto de vista dinámico. Analizaremos los ángulos en función de la magnitud y de la orientación; es decir, tomaremos las dos líneas que forman el ángulo como coincidentes (que comienzan juntas). Un lado permanece fijo y el otro lado gira para formar el ángulo. El lado fijo se denomina lado inicial y el lado que gira se llama lado terminal.

Cuando el lado terminal gira en la dirección contraria a las manecillas del reloj (como lo indica la flecha dentro del ángulo en la figura 2(a)), a $\angle B$ se le llamará un ángulo positivo. Si el lado terminal gira en la dirección de las manecillas del reloj (como se indica con la flecha dentro del ángulo de la figura 2(b)), a $\angle B$ se le llamará un ángulo negativo.

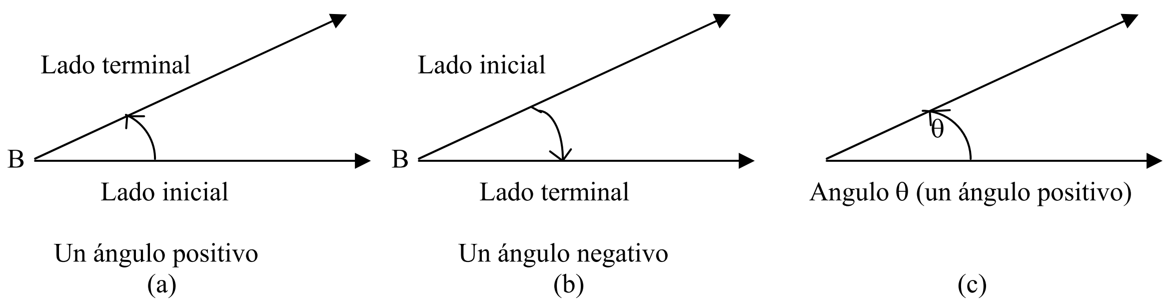


Figura 2

Además de nombrar a un ángulo por su vértice, a menudo colocamos una letra dentro del ángulo y lo utilizamos como su nombre. Por ejemplo, en la figura 2(c) se muestra el ángulo θ (la letra griega theta, un nombre común para un ángulo). Algunas otras letras griegas que se utilizan con frecuencia para nombrar a los ángulos son α (alfa), β (beta) y γ (gamma).

Si le pidiéramos a un niño pequeño que mirara los dos ángulos de la figura 3 y que nos dijera cuál es "más grande", el niño probablemente nos respondería que $\angle A$ es mayor, pero nosotros sabemos que $\angle B$ es mayor. ¿Qué significa que $\angle B$ sea mayor que $\angle A$? ¿Qué cualidad tratamos de medir en un ángulo cuando medimos su magnitud? Después de reflexionar un poco, llegaremos a la conclusión de que cuando medimos un ángulo tratamos de responder la siguiente pregunta: ¿Qué parte de la rotación total ha recorrido el lado terminal? Cuanto más haya girado el lado terminal, mayor será el ángulo.

[1] Arthur Goodman / Lewis Hirsch. ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. Primera Edición. Editorial Prentice Hall.

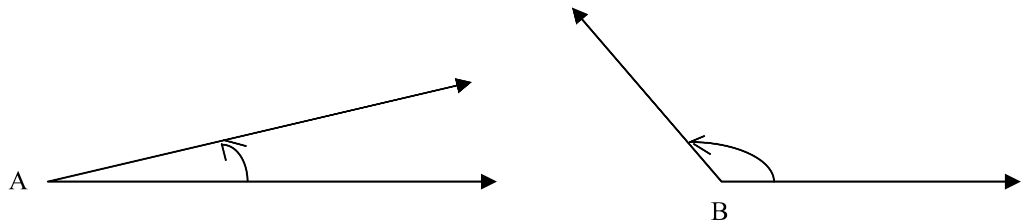


Figura 3

Cuando medimos un ángulo, tratamos de asignarle un número que indique la magnitud de éste. Cuanto mayor sea el ángulo (es decir, cuanto más haya de una rotación completa), el número deberá ser mayor. Si pensamos en el ángulo de la figura 4 como una rotación completa, podríamos asignarle el número 1.

Así podemos obtener de forma “natural” los ángulos y sus asignaciones numéricas que se muestran en la figura 5.

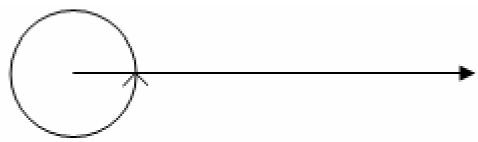


Figura 4 Una rotación completa

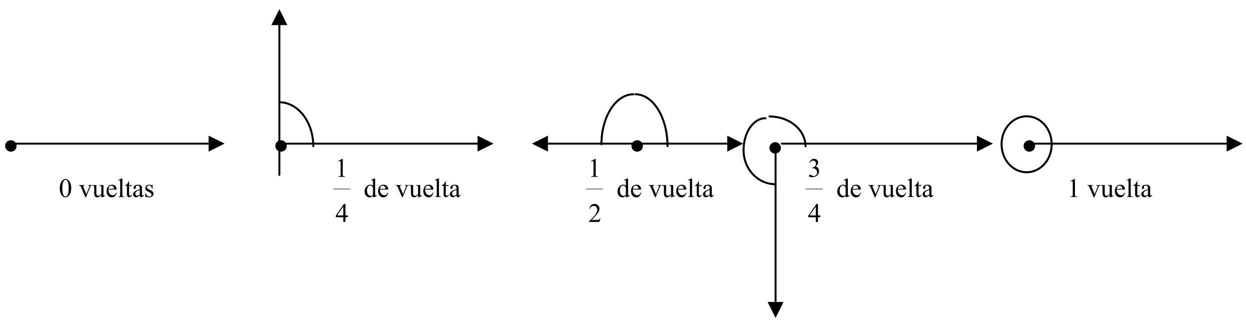


Figura 5 Posibles asignaciones numéricas para distintos ángulos

Sin embargo, éstos no son los números que la mayoría de nosotros estamos acostumbrados a utilizar cuando medimos los ángulos. Estamos familiarizados con el empleo de medidas en grados para describir el tamaño de un ángulo.

La utilización de las medidas en grados simplemente significa que en lugar de asignarle el número 1 a una rotación completa, le asignamos 360; es decir, dividimos una rotación completa en 360 partes iguales. Por lo tanto, un grado (que se escribe 1°) es $\frac{1}{360}$ *de una rotación completa.*

Podemos regresar ahora a dibujar la figura 5 e incluir las medidas en grados de los distintos ángulos. (Véase la figura 6).

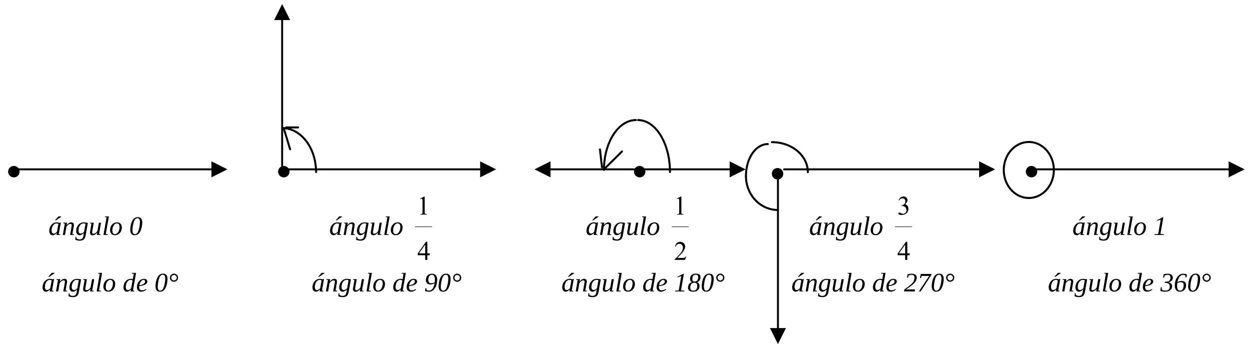


Figura 6 Posibles asignaciones numéricas para distintos ángulos

De manera análoga, podemos dibujar un ángulo de $\frac{2}{3}$ *de una rotación completa. Véase la figura 7. Fácilmente podemos calcular que la medida en grados de este ángulo es* $\frac{2}{3}$ *(360°) = 240°.*

Figura 7 Un ángulo de $\frac{2}{3}$ *de una rotación completa, que equivale a 240°*

Observe que no existe razón por la cual el ángulo no pueda ser mayor que una rotación completa; es decir, mayor de 360°. Por ejemplo, un ángulo de 400° se vería como el que se presenta en la figura 8.

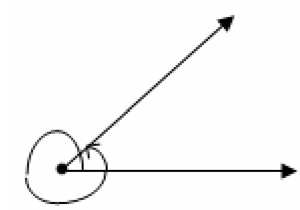


Figura 8 Un ángulo de 400°

Hay que recordar que la división de una rotación completa en 360 partes iguales es totalmente arbitraria. En teoría, pudimos de igual manera haber dividido una rotación completa en 500 partes iguales (en cuyo caso cada parte sería más pequeña que 1°).

Conforme avancemos en nuestro estudio de la trigonometría, veremos que aunque la medición en grados tiene la ventaja de que nos es familiar, existen una gran cantidad de razones por las cuales la medición en grados no es adecuada para gran parte de las tareas matemáticas y científicas. Podremos hablar un poco más acerca de esta "insuficiencia" después de introducir un procedimiento distinto para asignarles números a los ángulos con el fin de indicar su tamaño. Esto nos llevará a una unidad alternativa para medir los ángulos, que se acercan mucho más a las unidades "naturales" que vimos en la figura 5.

Consideremos un ángulo θ *y dibujemos un círculo de radio r con el vértice de* θ *en su centro 0. Sea s la longitud del arco del círculo interceptado por* $\angle\theta$*. Véase la figura 9.*

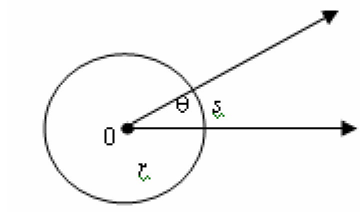


Figura 9

La geometría básica nos dice que el ángulo central θ *es la misma parte fraccionaria de una rotación completa como s lo es de la circunferencia del círculo. Por ejemplo, si* θ *es* $\frac{1}{4}$ *de una rotación completa, entonces s será* $\frac{1}{4}$ *de la circunferencia. (Hay que recordar que la fórmula para la circunferencia C de un círculo es* $C = 2\pi r$*.)*

En otras palabras, podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{\theta}{\text{(1 rotación completa)}} = \frac{s}{\text{(circunferencia del círculo)}} = \frac{s}{2\pi r}$$

Si utilizamos esta razón de $\frac{s}{2\pi r}$ *para medir* θ*, obtenemos exactamente el número que vimos en la figura 5. Sin embargo, por motivos que serán obvios conforme avancemos, modificamos esta razón al multiplicarla por* 2π*. Observe que esto no altera el hecho de que la razón sigue reflejando el tamaño del ángulo. Así, a esta razón se le llama medida de un ángulo en radianes.*

La medida en radianes de un ángulo θ *está definida como* $\theta = \frac{s}{r}$*, donde* θ*, s y r están descritas en la figura 9. De este modo, un ángulo de 90°, que es* $\frac{1}{4}$ *de una rotación completa, subtiende (corta) un arco s que es* $\frac{1}{4}$ *de la circunferencia del círculo. Véase la figura 10.*

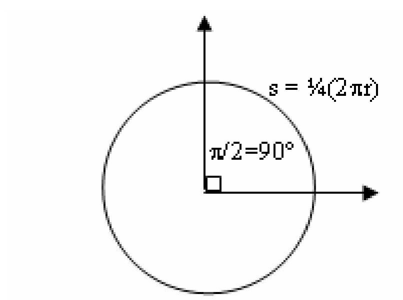


Figura 10 Un ángulo de 90° = π/ 2 radianes

Por lo tanto, tenemos $s = \frac{1}{4}(2\pi r) = \frac{\pi r}{2}$.

La medida en radianes de θ *es entonces:* $\theta = \frac{s}{r} = \frac{\frac{\pi r}{2}}{r} = \frac{\pi r}{2}\cdot\frac{1}{r} = \frac{\pi}{2}$

Observe que este resultado es independiente de r.

En consecuencia, $90° = \frac{\pi}{2}$ *radianes; si multiplicamos este resultado por 2, nos da* $180° = \pi$ *radianes*

Hay que aclarar varios puntos importantes. Primero, hay que tener en mente que no estamos diciendo que los números 180 y π *sean iguales, al igual que el hecho de que 36 pulgadas son iguales a 3 pies no significa que los números 3 y 36 sean iguales. Como número,* π *es aproximadamente igual a 3.14 (hay que recordar que* π *es irracional). Lo que estamos diciendo es que un ángulo que mide* π *radianes es del mismo tamaño que un ángulo que mide 180°, de la misma manera en que podríamos decir que una mesa que mide 2 metros de largo tiene la misma longitud que una mesa que mide 6.56 pies. Si utilizamos una medición en grados, una rotación completa es de* 2π *radianes.*

Segundo, es importante reconocer que la medida en radianes de un ángulo es un número real que no va acompañado de unidades. En la definición $\theta = \frac{s}{r}$*, tanto s como r deben ser medidos en las mismas unidades de longitud. Por ejemplo, si s = 6 cm y r = 3 cm, entonces*
θ *= 6 cm /3 cm = 2. El número 2 no tiene unidades. Así, un ángulo de 2 (radianes) significa un ángulo que subtiende un arco que es dos veces la longitud del radio. Véase la figura 11.*

Tercero, si θ *es un ángulo que subtiende un arco cuya longitud es la misma que el radio; es decir, s = r, entonces según la definición,* $\theta = \frac{s}{r} = \frac{r}{r} = 1$

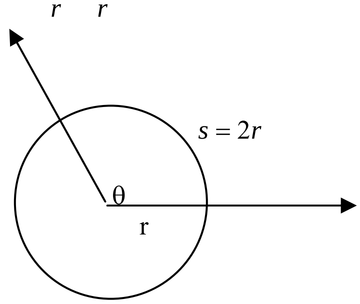


Figura 11 θ *es un ángulo de 2 (radianes)*

Así, un ángulo de 1 radián es un ángulo central que subtiende un arco igual a la longitud del radio. Véase la figura 12. De hecho, ésta es una forma alterna de definir la medición de un ángulo en radianes; es decir, podemos definir un ángulo de 1 radián como el ángulo central que subtiende un arco igual a la longitud del radio.

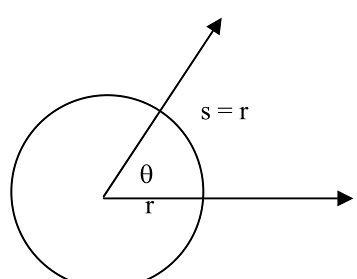


Figura 12 Un ángulo de 1 radián

7.2 CONVERSIÓN ENTRE RADIANES Y GRADOS

Al igual que en la mayoría de los problemas de conversión de una unidad de medición a otra, al convertir de radianes a grados o viceversa, podemos utilizar una proporción para llevar a cabo dicha conversión.

La proporción que podemos utilizar es la siguiente. $\dfrac{\theta(grados)}{180^\circ} = \dfrac{\theta(radianes)}{\pi}$

Ejemplo número 1:

Convierta la siguiente medida en radianes a grados. $\dfrac{\pi}{6}$

Podemos utilizar la proporción anterior para hacer la conversión. Sea θ *la medida en grados del ángulo dado.* $\dfrac{\theta}{180^\circ} = \dfrac{\frac{\pi}{6}}{\pi}$ *luego,* $\dfrac{\theta}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{6}\cdot\dfrac{1}{\pi} = \dfrac{1}{6}$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por 180. $\theta = \dfrac{1}{6}\cdot 180^\circ = 30^\circ$

Al convertir la medida en radianes de un ángulo dado en términos de π*, en vez de utilizar la proporción ya dada, podemos simplemente sustituir* π *por 180°. En otras palabras,* $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{180^\circ}{6} = 30^\circ$

Ejemplo número 2:
Convierta de grados a radianes. 90°
Sea θ *la medida en radianes de 90°. Utilizando la proporción de conversión, obtenemos:*

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{90^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

De hecho, con frecuencia trabajaremos con ángulos que son múltiplos de 30°, 45°, 60° y 90°. Si conocemos las medidas en radianes de estos ángulos, obtendremos con facilidad la medida en radianes de sus múltiplos.

Habiendo revisado los ejemplos anteriores, observemos que la proporción de la conversión utilizada es equivalente a usar los siguientes factores de conversión.

Para convertir de radianes a grados, multiplicar la medida en radianes por $\dfrac{180^\circ}{\pi}$.

Para convertir de grados a radianes, multiplicamos la medida en grados por $\dfrac{\pi}{180^\circ}$.

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1. Convierta el ángulo dado de radianes a grados.

a) $\dfrac{\pi}{4}$ *b)* $\dfrac{\pi}{3}$ *c)* $-\dfrac{5\pi}{2}$ *d)* -2π *e)* $-\dfrac{\pi}{12}$ *f)* $\dfrac{\pi}{18}$

2. Convierta el ángulo dado de grados a radianes.
a) 150° *b) 315°* *c) –120°* *d) –40°* *e) 18°* *f) 330°*

CAPITULO 8

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

8.1 TRIGONOMETRÍA DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En este capítulo se examinará la trigonometría de un triángulo rectángulo general.

Un triangulo rectángulo, con se recordará, es aquél que tiene un ángulo recto. Los lados del triángulo rectángulo reciben nombres especiales como puede verse en la figura 1:

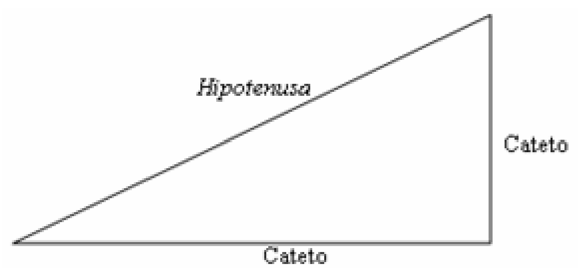
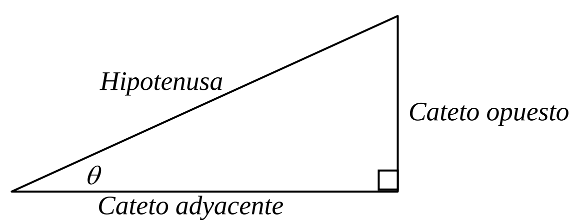


Figura 1 Nombres de los lados del triángulo rectángulo

Los catetos son los lados que forman el ángulo recto y la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.

Así, para un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo, se pueden establecer las definiciones de las seis funciones trigonométricas, utilizando las razones entre sus lados:



$$Seno\ \theta = Sen\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad \text{Cosecante } \theta = Csc\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

$$Coseno\ \theta = Cos\ \theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad Secante\ \theta = Sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

$$Tangente\ \theta = Tan\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad \text{Cotangente } \theta = Cot\theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

Donde:
a) El cateto opuesto está frente al ángulo que se busca y el cateto adyacente está a un lado del ángulo.
b) A las funciones Cosecante, Secante y Cotangente se les llama Funciones Trigonométricas Reciprocas del Seno, Coseno y Tangente, respectivamente. Esto se explica con más detalle en la siguiente sección.

Ejemplo número 1:
Determine el seno, coseno y tangente del ángulo A en el triángulo de la figura 2.

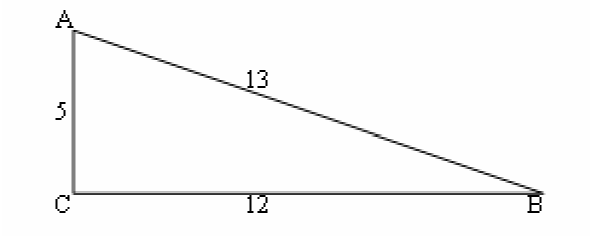


Figura 2

Si vemos los lados del triángulo desde la perspectiva de $\angle$ A, el cateto opuesto $\angle$ A es 12, el cateto adyacente a $\angle$ A es 5 y la hipotenusa es 13. Por lo tanto,

$$senA = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{12}{13} \qquad \cos A = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{5}{13} \qquad \tan A = \frac{cateto\ opuesto}{adyacente} = \frac{12}{5}$$

8.2 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS.

Se dice que una función es recíproca de otra, si al multiplicarse la original por la recíproca, el resultado es 1. Por ejemplo:

Si $f(x) = \frac{a}{b}$ *su recíproca es:* $\frac{b}{a}$ *, ya que al multiplicarlas:* $\frac{a}{b} * \frac{b}{a} = 1$

La manera de obtener la recíproca de una función es dividiendo uno entre la función original y resolviendo la división. Por ejemplo, ¿Cuál es la función reciproca de Sen x?

$$Sen\ x = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \text{, su función recíproca es: } \frac{1}{Sen\ x} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = Csc\ x$$

Del mismo modo, se puede determinar que la función recíproca del Cos x es la Sec x y que la Tan x tiene como recíproca a la Cot x.

Relaciones Cofuncionales: *la función trigonométrica de un ángulo es igual a la "co" función trigonométrica del ángulo complementario. Estas relaciones son válidas aun cuando θ no sea un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.*

Las relaciones cofuncionales

$$\text{sen}\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \text{sen } \theta = \cos(90° - \theta)$$

$$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \tan\theta = \cot(90° - \theta)$$

$$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \sec\theta = \csc(90° - \theta)$$

8.3 APLICACIONES

Ejemplo número 2:

Un piloto de un jet de la fuerza naval va a aterrizar en un portaaviones. A una altitud de 3000 pies, el piloto observa el portaaviones con un ángulo de depresión de 15°. Véase la figura 3. Redondeado al décimo de milla más cercano, ¿Cuál es la distancia horizontal entre el avión y el portaaviones?

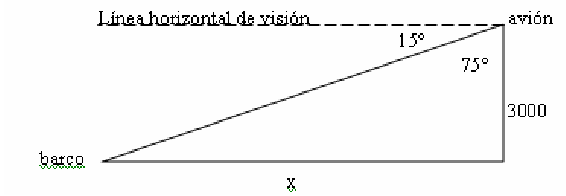


Figura 3

Sea x la distancia horizontal entre el avión y el portaaviones. Como el ángulo de depresión es de 15°, su complemento es 90° - 15° = 75°. Si miramos el triángulo en la figura, veremos que lo que estamos buscando es el cateto opuesto al ángulo de 75°, y que conocemos el cateto adyacente al ángulo de 75°. Por lo tanto, empleamos la función tangente.

$$\tan 75° = \frac{x}{3000}$$

x = 3000 tan 75° — *Utilizando una calculadora obtenemos*

x= 11 196.152 — *Esta respuesta está en pies, así que dividimos* entre 5280 para convertirlos en millas.

x = 2.1204834 millas

Así, la distancia horizontal entre el jet y el portaaviones es de 2.1 millas, redondeado al décimo de milla más cercano.

Ejemplo número 3:

El dirigible de Goodyear está volando a una altitud de 500 pies y pasa directamente por encima de un observador en el suelo. Después de un minuto, el ángulo de elevación desde el observador hacia el dirigible es de 24°. Determinar la velocidad del dirigible, redondeada a la milla/hora más cercana.

En la figura 4 se resume la información dada. A representa el punto directamente por encima del observador, y B es la posición del dirigible un minuto después. Una vez que hayamos encontrado la distancia que el dirigible viajó en 1 minuto (a la que llamamos x), podremos calcular la velocidad del mismo.

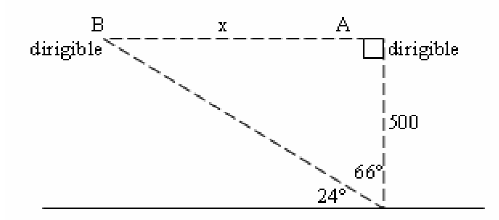


Figura 4

$$\tan 66° = \frac{x}{500} \qquad x = 500 \tan 66° \approx 1123.02 \text{ pies}$$

Así pues, el dirigible viajó 1123.02 pies en un minuto. Para convertir esta velocidad de 1123.02 pies/minuto en millas por hora, debemos multiplicar por 60 minutos/hora y dividir entre 5280 pies/milla.

$$\frac{60(1123.02)}{5280} \approx 12.76$$

Redondeando a la milla por hora más cercana, la velocidad del dirigible es de 13 millas/hora.

Ejemplo número 4:

Una escalera eléctrica forma un ángulo de 20° con respecto al suelo y transporta a la gente a través de una distancia vertical de 38 pies entre una plataforma del metro y la calle. Si una persona tarda 30 segundos en llegar desde el principio de la escalera hasta el final, ¿a qué velocidad (redondeado a la décima más cercana) se mueve la escalera?

Con la información dada, podemos crear el diagrama de la figura 5. Para determinar la velocidad de la escalera, necesitamos encontrar la distancia (nombrada x) que recorre ésta en 30 segundos.

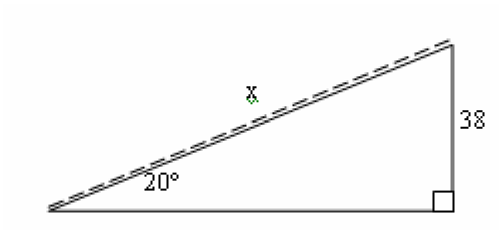


Figura 5: Una escalera eléctrica con un ángulo de 20° con respecto al suelo

$$sen20° = \frac{38}{x} \qquad \textit{por lo que } \ x = \frac{38}{xen20°} \approx 111.1045.7$$

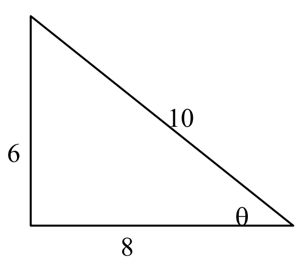
Redondeando a los décimos más cercanos, vemos que la escalera viaja 111.1 pies en 30 segundos, y por lo tanto, r es:

$$r = \frac{111.1 pies}{30 segundos} = 3.7 \text{ pies/segundos}$$

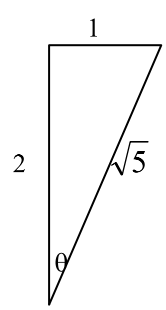
ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1. En los ejercicios siguientes, determine las seis funciones trigonométricas de θ.

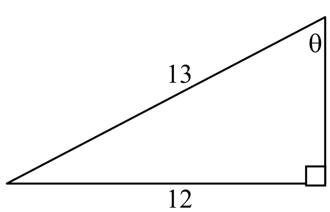
a)



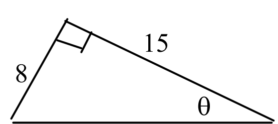
b)



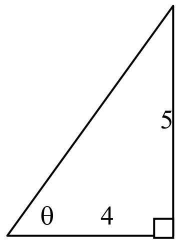
c)



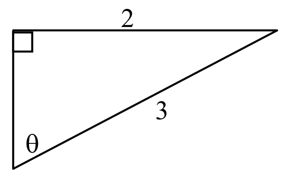
d)



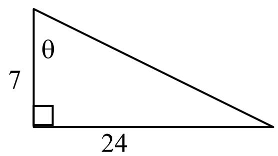
e)



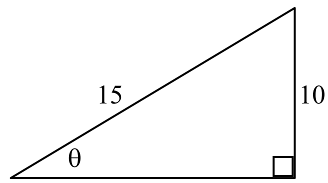
f)



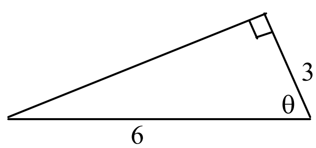
g)



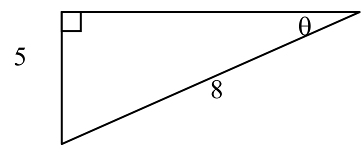
h)



i)

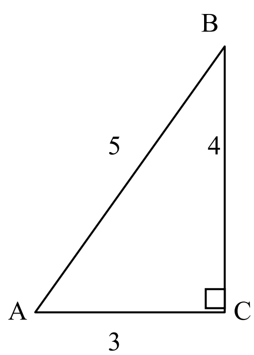


j)

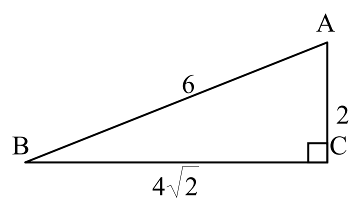


2. En los ejercicios siguientes, determine sen A y cos B.

a)

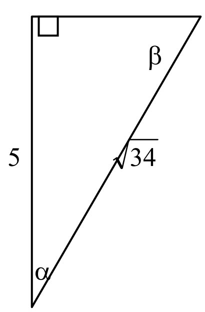


b)

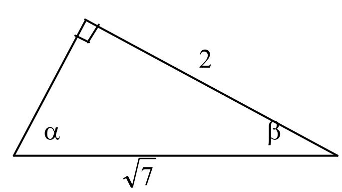


3. En los ejercicios siguientes, determine tan α y cot β.

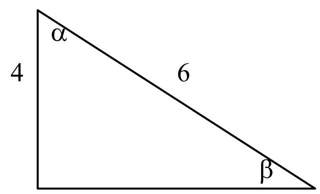
a)



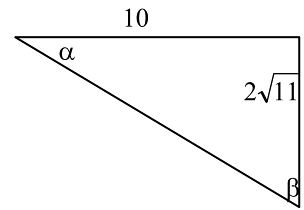
b)



c)

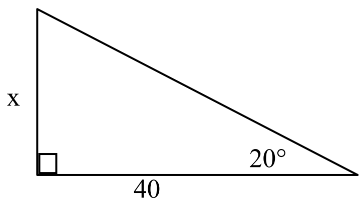


d)

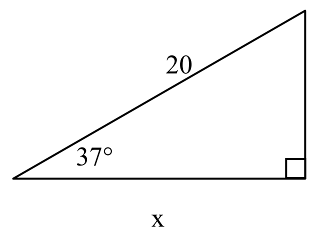


4. En los ejercicios siguientes, determine x. Redondee sus respuestas a los décimos más cercanos.

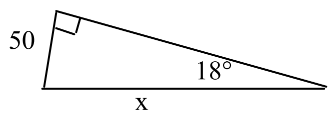
a)



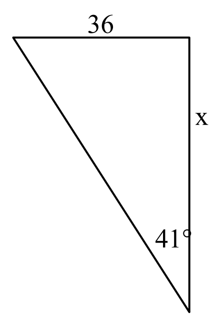
b)



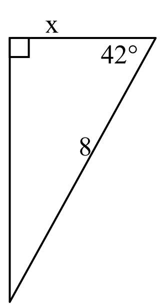
c)



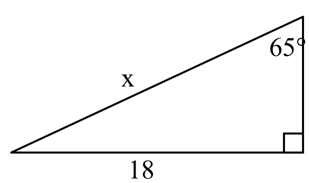
d)



e)

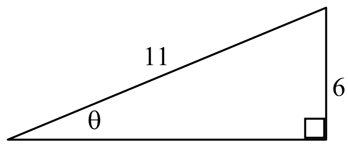


f)

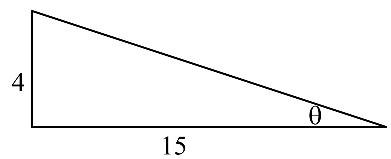


5. En los ejercicios siguientes, determine θ al grado más cercano.

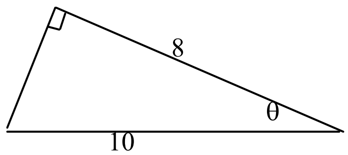
a)



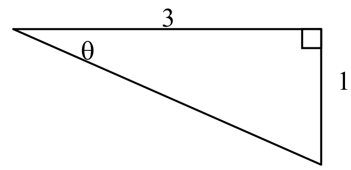
b)



c)



d)



6. En los ejercicios siguientes, determine el valor indicado. Utilice una calculadora sólo cuando sea necesario.

a) sen 123°	b) cos 212°	c) tan 351°	d) cos 317°	e) sec 225°	f) csc 330°
g) cos 158°	h) sen 204°	I) tan 111°	j) cot 249°	k) sec 150°	l) csc 240°

7. En los ejercicios siguientes, determine θ o x hasta el grado más cercano en el intervalo [0, 90°].

a) sen θ = 0.4384	b) cos θ = 0.7547	c) tan x = 1.428	d) cot x = 6.314
e) sec θ = 3.420	f) csc x = 1.086	g) sen x = 0.9630	h) cos θ = 0.7450

8. Resuelva los siguientes problemas:

a) Una escalera de 25 pies de largo está reclinada en un edificio. Si la escalera forma un ángulo de 37° con el suelo, ¿a qué altura del edificio llega la escalera?

b) Una escalera está reclinada en un edificio. Si la escalera forma un ángulo de 63° con el suelo y llega al edificio a una altura de 16 metros, ¿a qué distancia del edificio se encuentra el pie de escalera?

c) Un observador, que se encuentra a 50 pies de la base del asta de una bandera, determina que el ángulo de elevación hasta la punta del asta es de 48°. ¿Qué altura tiene el asta?

d) Un guardabosque se encuentra en una torre a 40 metros sobre el nivel del suelo. Descubre un incendio a un ángulo de depresión de 6°. ¿A qué distancia se encuentra el incendio de la torre del guardabosque?

e) Un alambre de soporte debe ser colocado en la punta de un poste telefónico de 30 pies de altura y fijado en la tierra. ¿Qué cantidad de alambre se necesitará para que hiciera un ángulo de 50° con el nivel del suelo?

f) Una escalera eléctrica debe transportar a la gente a una distancia vertical de 18 pies y debe hacer un ángulo de 20° con el suelo. ¿Qué longitud debe tener la escalera?

g) Un pentágono regular (la palabra regular significa que todos los lados tienen la misma longitud) está inscrito en un círculo con un radio de 12 cm. Determine el área del pentágono.

h) Un hexágono regular está inscrito en un círculo con un radio de 10 pulgadas. Determine el área del hexágono.

i) Un globo de aire caliente se mantiene a una altitud constante de 800 metros y pasa directamente por encima de un observador. Después de dos minutos, el observador ve el globo con un ángulo de elevación de 70°. Determine la velocidad del globo, redondeado al kilómetro por hora más cercano.

j) Una lancha de motor se encuentra a media milla exactamente enfrente del punto A y viaja en dirección paralela de la playa. Después de cinco minutos se observa la lancha a un ángulo de 34° retirada de la línea de visión original. Determine la velocidad de la lancha, redondeado a la milla por hora más cercana.

CAPITULO 9
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS EN EL PLANO CARTESIANO

9.1 LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO GENERAL

[2]*En el estudio que se presenta a continuación, veremos todos los ángulos en el contexto de un sistema cartesiano de coordenadas; es decir, que cuando se da un ángulo* θ*, comenzamos poniendo a* θ *en una posición canónica, lo cual significa que el vértice de* θ *se encuentra en el origen y el lado inicial de* θ *se coloca a lo largo del eje x. Por supuesto, el lugar en el que se encuentre el lado terminal de* θ *dependerá del tamaño de* θ*. En la figura 1, se presenta un típico ángulo positivo* θ *en posición canónica. En este caso, el lado terminal se encuentra en el segundo cuadrante.*
A continuación, ubique un punto P (diferente al origen) en el lado terminal de θ *e identifique sus coordenadas (x, y) y su distancia hasta el origen, por lo que r debe ser positivo.*
Con θ *en posición canónica, ahora definiremos las tres primeras funciones trigonométricas de* θ*. (Más adelante en esta sección, definiremos las otras tres funciones).*

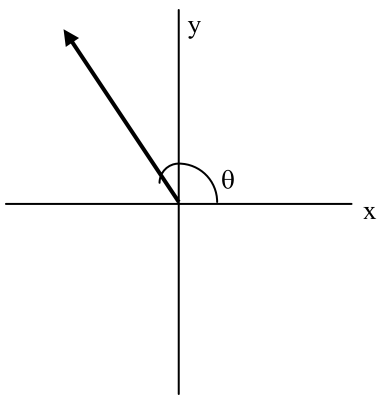


Figura 1 Típico ángulo positivo en posición canónica.

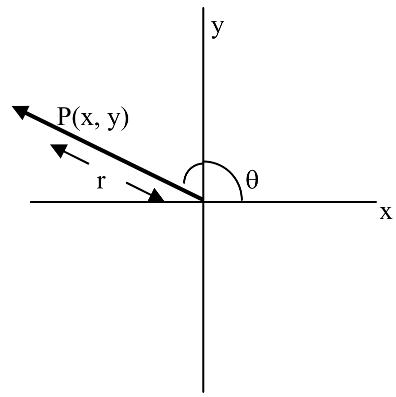


Figura 2 P(x, y) es un punto (distinto del origen) en el lado terminal y r es la distancia entre P y el origen.

DEFINICIÓN

Nombre de la función	*Abreviatura*	*Definición*
seno θ	*sen* θ	$sen\ \theta = \frac{y}{r}$
coseno θ	*cos* θ	$\cos\theta = \frac{x}{r}$
tangente θ	*tan* θ	$\tan\theta = \frac{y}{x}$

Al igual que en el caso de la función logarítmica, las funciones trigonométricas a menudo se escriben sin paréntesis alrededor del argumento de la función. En otras palabras, sen θ *significa lo mismo que sen(*θ*)*

[2] Arthur Goodman / Lewis Hirsch. ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. Primera Edición. Editorial Prentice Hall.

Se pueden hacer afirmaciones similares para todas las funciones trigonométricas. Del mismo modo como se describen funciones como $f(x) = x^2 - 3x + 5$, *podemos escribir ahora funciones como* $f(\theta)$ = *sen* θ *y* $g(\theta)$ = *cos* θ.

Veamos los casos de $sen\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{6}$ y $\tan\frac{\pi}{6}$.

Sabemos que $\frac{\pi}{6}$ *= 30°*

El primer paso es poner el ángulo de 30° en una posición canónica, como se muestra en la figura 3.

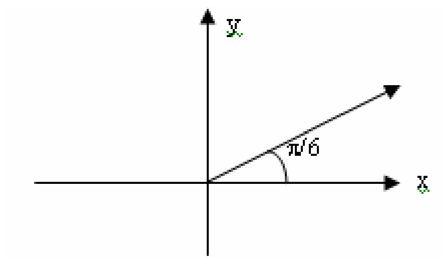


Figura 3 Angulo $\frac{\pi}{6}$ *=30° en posición canónica*

Después, tenemos que localizar un punto en el lado terminal deθ. Puesto que θ es de 30°, el lado terminal queda en el primer cuadrante. En general, no hay ningún método para determinar un punto en una línea si sólo se conoce al ángulo que forma con el eje x; sin embargo, como se trata de un ángulo de 30°, sí podemos encontrar tal punto. Si recordamos el triángulo rectángulo de 30°-60° de la sección anterior, podemos seleccionar un punto P en el lado terminal de θ que esté a 2 unidades del origen, y construimos una perpendicular desde este punto hasta el eje x. Véase la figura 4.

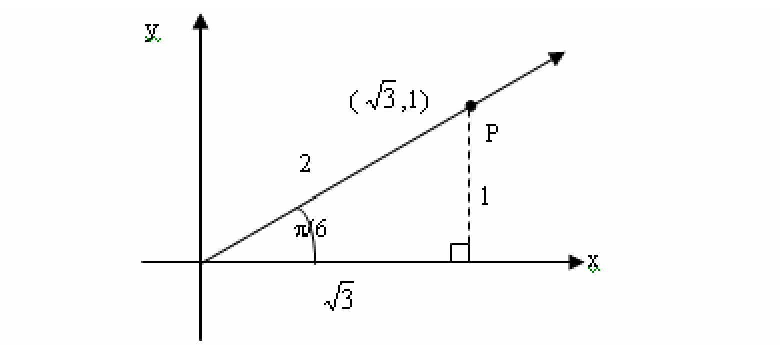


Figura 4 Diagrama para un ángulo de π/ 6 = 30° en posición canónica

A partir del triángulo que hemos formado, podemos identificar las coordenadas de P como $(\sqrt{3},1)$ *y r = 2. Por lo tanto, al calcular el seno, el coseno y la tangente de* $\frac{\pi}{6}$, *emplearemos x =* $\sqrt{3}$, *y = 1 y r = 2. En consecuencia, tenemos:*

$$sen\frac{\pi}{6} = \frac{y}{1} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Observe que el triángulo que formamos sólo fue una ayuda para encontrar las coordenadas de un punto en el lado terminal.

En este punto. Se podrá preguntar acerca de las definiciones de las funciones de seno, coseno y tangente. Supuestamente hemos definido el seno, coseno y tangente "de un ángulo θ"; sin embargo, nuestra definición parece depender del punto que hemos seleccionado en el lado terminal de θ. Si en realidad hemos definido una función de θ, entonces el valor de la función debe ser independiente del punto que seleccionamos en el lado terminal; de lo contrario, la definición es ambigua.

Así, en el caso anterior, supongamos que hubiésemos decidido que el punto P estuviera a 8 unidades del origen en lugar de 2. Entonces nuestro diagrama hubiera sido como se muestra en la figura 5. Obtendríamos $sen\frac{\pi}{6}=\frac{y}{r}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$*, que es la misma respuesta obtenida antes; sucede algo similar para el coseno y la tangente.*

De hecho, una breve reflexión nos convencerá de que para cualesquiera dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ *y* $P_2(x_2,y_2)$ *seleccionados en el lado terminal de* θ*, los triángulos formados serán semejantes, y por lo tanto, sus lados correspondientes serán proporcionales. Por lo tanto, aunque los valores de x, y y r puedan ser distintos, las razones; es decir, el seno, coseno y tangente, seguirán siendo los mismos.*

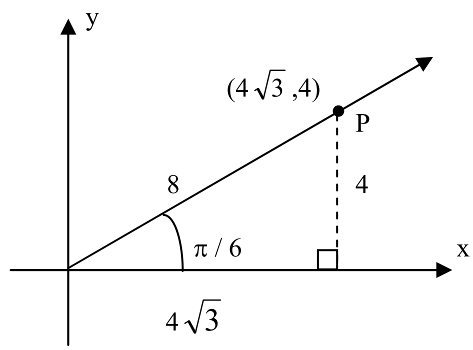


Figura 5 Un diagrama alternativo para $\frac{\pi}{6}$

Consideremos ahora la determinación de: $sen\frac{4\pi}{3}, \cos\frac{4\pi}{3}$ *y* $\tan\frac{4\pi}{3}$.
Seguiremos el mismo procedimiento que en el caso anterior. Sabemos que:

$$\frac{4\pi}{3}=4\left(\frac{\pi}{4}\right)=4(60°)=240°$$

Colocamos un ángulo de $\frac{4\pi}{3}$ *en posición canónica, como se muestra en la figura 6. Después tenemos que localizar un punto en el lado terminal de* θ*. Observemos que como* θ *es de 240°, el lado terminal queda en el tercer cuadrante y el ángulo agudo formado por el lado terminal y el eje x negativo es de 240° - 180° = 60°. Este ángulo de 60° es el ángulo de referencia. Véase la figura 6.*

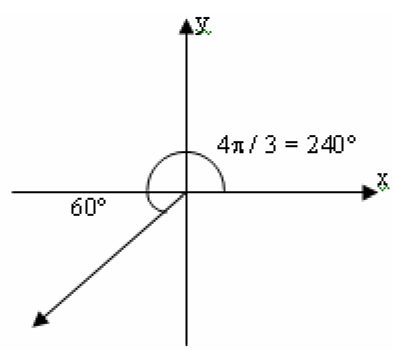


Figura 6 Un ángulo de 240° en posición canónica con un ángulo de referencia de 60°.

El hecho de que el ángulo de referencia sea de 60°, nos permite utilizar la información que hemos obtenido acerca del triángulo rectángulo de 30°- 60°, de la siguiente manera. Recordando el típico triángulo de 30°-60°, podemos seleccionar un punto P en el lado terminal de θ *que se encuentre a 2 unidades del origen, y* *construimos una perpendicular desde este punto hasta el eje x. Al triángulo formado de esta manera se le llama triángulo de referencia. Observe que este triángulo de referencia es un triángulo rectángulo 30° - 60° y por eso sabemos que los otros dos lados del triángulo son 1 y* $\sqrt{3}$ *, como se indica en la figura 7. Podemos ver que las coordenadas de P son* $\left(-1,-\sqrt{3}\right)$. *Por lo tanto, para calcular el seno, el coseno y la tangente de* $\frac{4\pi}{3}$ *, empleamos x =-1, y =-* $\sqrt{3}$ *y r=2. En consecuencia, tenemos que:*

$$sen\frac{4\pi}{3}=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{4\pi}{3}=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2} \qquad \tan\frac{4\pi}{3}=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$$

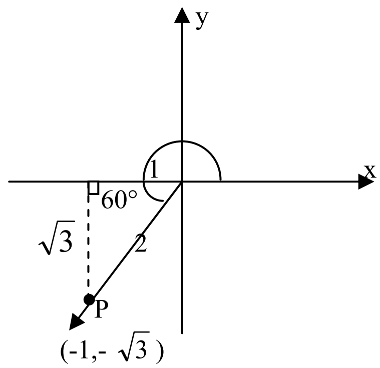


Figura 7 Un triángulo de referencia para un ángulo de 240°

No hay que perder de vista el hecho de que encontramos el seno, el coseno y la tangente de $\frac{4\pi}{3}$ *(o 240°). El ángulo de referencia de 60° simplemente fue una ayuda para identificar x, y, y r.*

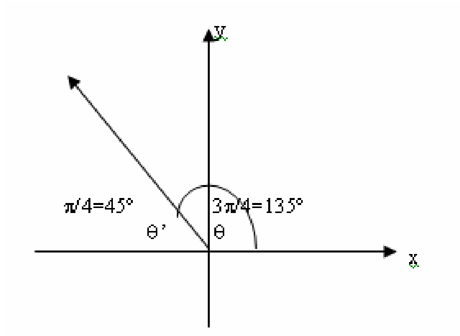
Antes de pasar a ver varios ejemplos más, daremos algunas definiciones precisas.

Sea θ *un ángulo en posición canónica cuyo lado terminal no quede sobre el eje x ni sobre el eje y. El ángulo de referencia (que denotamos por* θ*') es el ángulo agudo positivo formado por el lado terminal de* θ *y el eje x. Un triángulo de referencia es un triángulo que tiene a* θ*' y que se forma mediante la construcción de una perpendicular desde un punto (diferente del origen) en el lado terminal de* θ *hacia el eje x.*

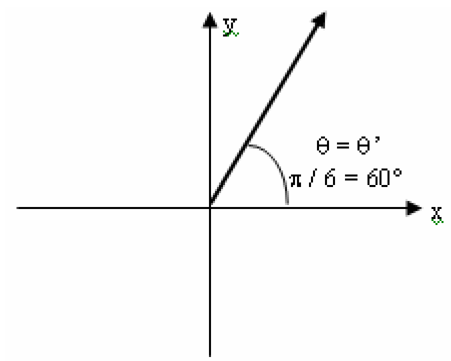
Ejemplo número 1:

Dados los siguientes ángulos, dibuje el ángulo en posición canónica e identifique el ángulo de referencia tanto en radianes como en grados.

a) $\frac{3\pi}{4}=3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *= 3(45°) = 135°. Trazamos el ángulo en posición canónica. Para encontrar el ángulo de referencia, calculamos* $\theta=\frac{3\pi}{4}=180°=135°$ *; por lo tanto, el ángulo de referencia es* θ'=$\frac{\pi}{4}=45°$



b) $\frac{\pi}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$. *Dibujamos el ángulo en posición canónica y podemos ver que el ángulo de referencia es igual al ángulo mismo, o bien* $\frac{\pi}{3} = 60°$.



Ejemplo número 2:

Determine el seno, coseno y tangente de $\frac{9\pi}{4}$.

Al convertir $\frac{9\pi}{4}$ *a grados, obtenemos 405°. Al poner un ángulo De 405° en posición canónica obtendremos la figura 8. Observe que, como se ha indicado, el ángulo de referencia es* $\frac{\pi}{4} = 45°$. *Hemos elegido un punto en el lado terminal, que está a* $\sqrt{2}$ *unidades del origen y trazamos los lados del triángulo de referencia según el típico triángulo rectángulo de 45°. Por consiguiente, hemos nombrado al punto P como (1,1).*

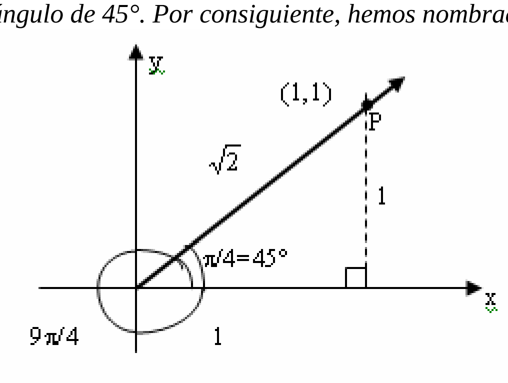


Figura 8 Un ángulo de $\frac{9\pi}{4} = 405°$ *en posición canónica*

Por lo tanto, tenemos que x = 1, y = 1, r = $\sqrt{2}$ *:*

$$sen\frac{9\pi}{4}=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{9\pi}{4}=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\frac{9\pi}{4}=\frac{y}{x}=\frac{1}{1}=1$$

Observe que el lado terminal de $\frac{9\pi}{4}$ *tiene exactamente la misma posición que el lado terminal de* $\frac{\pi}{4}$*. Los ángulos cuyos lados terminales tienen la misma posición se llaman coterminales. Puesto que la suma (ó resta) de* 2π *(ó 360°) a (ó de) cualquier ángulo nos regresa a la misma posición, la suma de cualquier múltiplo entero de* 2π *a un ángulo nos dará un ángulo coterminal. También es importante hacer notar que como los valores de las funciones trigonométricas se determinan por la posición del lado terminal del ángulo (ya que esto, a su vez, determina la razón), dos ángulos cualesquiera con el mismo lado terminal tendrán los mismos valores trigonométricos. Volveremos a esta idea en repetidas ocasiones en nuestro estudio de las funciones trigonométricas.*

Se observará que la definición de un ángulo de referencia excluye a aquellos ángulos cuyos lados terminales se encuentran en el eje x o en el eje y. El siguiente ejemplo explicará por qué.

Ejemplo número 3:

Determine el seno, coseno y tangente de $\frac{\pi}{2}$.

Al igual que lo hicimos anteriormente, comenzamos poniendo un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ *(ó 90°) en posición canónica, como se muestra en la figura 9. Nuestro siguiente paso es ubicar un punto en el lado terminal del ángulo. En los ejemplos anteriores necesitábamos el ángulo de referencia para identificar x, y, y r.*

Sin embargo, en este ejemplo, como el lado terminal de $\frac{\pi}{2}$ *se encuentra sobre el eje positivo de y, es muy sencillo tomar un punto P sobre el lado terminal e identificar x, y, y r. Por ejemplo, podemos ver que el punto (0,1) está en el lado terminal de* $\frac{\pi}{2}$.

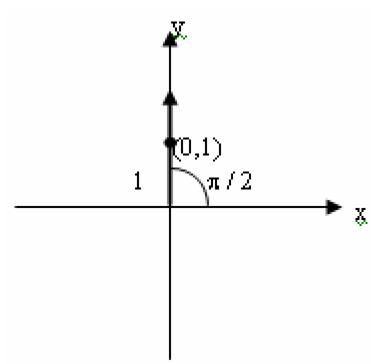


Figura 9 un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ *=90° en posición canónica*

Por lo tanto, tenemos x = 0 y y = 1; r, que es la distancia desde P al origen, también es 1, como se indica en la figura 9. Así, tenemos

$$sen\frac{\pi}{2}=\frac{y}{r}=\frac{1}{1}=1 \qquad \cos\frac{\pi}{2}=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0 \qquad \tan\frac{\pi}{2}=\frac{y}{x}=\frac{1}{0}\rightarrow indefinido$$

El hecho de que tan $\frac{\pi}{2}$ *sea indefinido es otra manera de decir que* $\frac{\pi}{2}$ *no se encuentra en el dominio de la función tangente.*

Observe que no tuvimos necesidad de un triángulo de referencia para identificar x, y, y r. De hecho, no había ningún ángulo de referencia. Si seguimos la definición de un triángulo de referencia, construimos una perpendicular desde P sobre el lado terminal de $\frac{\pi}{2}$ *hasta el eje x. Como esta perpendicular coincide con el lado terminal de* $\frac{\pi}{2}$*, no existe ningún ángulo de referencia (puesto que, de acuerdo a la definición, el ángulo de referencia debe ser agudo); Además, la perpendicular no formaría ningún triángulo de referencia. En consecuencia, vemos que un ángulo de referencia se define sólo para el ángulo cuyo lado terminal no queda sobre el eje x o el eje y. La siguiente definición nos será de gran utilidad.*

Un ángulo de cuadrante es aquel cuyo lado terminal queda sobre el eje x o el eje y. De manera alterna, podemos decir que un ángulo de cuadrantes es aquel que es un múltiplo de $\frac{\pi}{2}$ *(o 90°). Así pues,* $\frac{\pi}{2}$ *es un ángulo de cuadrante. Es importante que se familiarice mucho con el seno, el coseno y la tangente de todos los ángulos de cuadrante, así como con los múltiplos de* $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ *y* $\frac{\pi}{3}$.

9.2 LAS FUNCIONES RECÍPROCAS

Antes de continuar con varios ejemplos más, nos detendremos a definir las otras tres funciones trigonométricas, las llamadas funciones recíprocas, que se definen como sigue. (Incluimos las tres funciones trigonométricas originales para que el cuadro quede completo.)

Nombre de la función	*Abreviatura*	*Definición*	Funciones recíprocas		
			Nombre de la función	*Abreviatura*	*Definición*
seno θ	*sen* θ	$sen\ \theta = \frac{y}{r}$	*cosecante* θ	*csc* θ	$\csc\theta = \frac{1}{sen\theta} = \frac{r}{y}$
coseno θ	*cos* θ	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	*secante* θ	*sec* θ	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{x}$
tangente θ	*tan* θ	$\tan\theta = \frac{y}{x}$	*cotangente* θ	*cot* θ	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{x}{y}$

Ejemplo número 4:

Determine las seis funciones trigonométricas de cada ángulo. a) $\frac{7\pi}{4}$ *b) –180°* *c)* $-\frac{5\pi}{6}$

a) Un ángulo de $\frac{7\pi}{4}$**,** *que equivale a 315°, aparece en la figura 10. Hemos dibujado el triángulo de referencia, que contiene el ángulo de referencia de 45°. Si pensamos en el típico triángulo rectángulo de 45°, podemos seleccionar un punto en el lado terminal que esté a* $\sqrt{2}$ *unidades del origen. Esto nos permite llenar los lados del triángulo de referencia como aparecen en la figura 10. Así, para P tenemos x = 1 y y = -1; r =* $\sqrt{2}$.

Por lo tanto: $sen\frac{7\pi}{4} = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \tan\frac{7\pi}{4} = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$

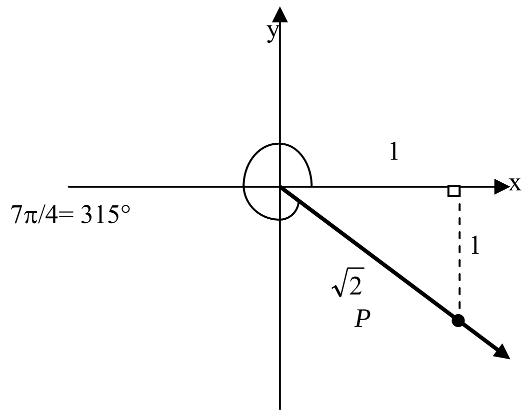


Figura 10 Un ángulo de $\frac{7\pi}{4}$ en posición canónica

Para obtener los valores de las funciones recíprocas, tomamos los recíprocos de los valores que acabamos de obtener.

$$\csc\frac{7\pi}{4} \textit{ es el recíproco de } sen\frac{7\pi}{4}\textit{, y así } \csc\frac{7\pi}{4}=-\sqrt{2}$$

$$\sec\frac{7\pi}{4} \textit{ es el recíproco de } \cos\frac{7\pi}{4}\textit{, y así } \sec\frac{7\pi}{4}=\sqrt{2}$$

$$\cot\frac{7\pi}{4} \text{ es el recíproco de } \tan\frac{7\pi}{4} \text{ y así } \cot\frac{7\pi}{4}=-1$$

9.3 ÁNGULOS ESPECIALES (30, 45, 60 Y 90 GRADOS)

Durante el análisis de la siguiente sección, necesitaremos información acerca de dos triángulos especiales. Ellos son el triángulo rectángulo isósceles y el triángulo rectángulo de 30° y 60°.

El triángulo rectángulo isósceles.

La figura 11 muestra un triángulo rectángulo isósceles. Observe que como los catetos son iguales, los ángulos de la base deben ser iguales, y puesto que los ángulos de la base tienen que sumar 90°, cada uno debe medir 45°. Hemos nombrado a los catetos s y la hipotenusa x. Despejamos x, aplicando el teorema de Pitágoras.

$$x^2=s^2+s^2 \Rightarrow x^2=2s^2 \Rightarrow x=\pm s\sqrt{2}$$

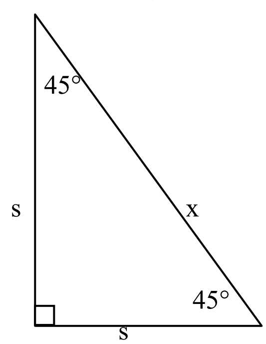
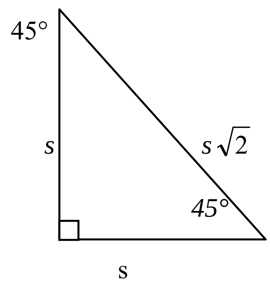


Figura 11 Un triángulo rectángulo isósceles

Como x es una longitud, rechazamos la solución negativa, y por lo tanto $x=s\sqrt{2}$.
Acabamos de deducir lo siguiente.
El triángulo rectángulo isósceles (45°)



En palabras, el diagrama dice que en un triángulo rectángulo de 45°, los catetos son iguales y la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces la longitud del cateto.

El triángulo rectángulo 30°- 60° La figura 11(a) muestra un triángulo rectángulo 30°- 60°. Hemos etiquetado la hipotenusa h. Si duplicamos el triángulo como lo indica la línea punteada de la figura 11(b), podemos ver que el ΔABD es equilátero (ya que cada ángulo mide 60°), así que $/AC/$ debe ser $\frac{h}{2}$.

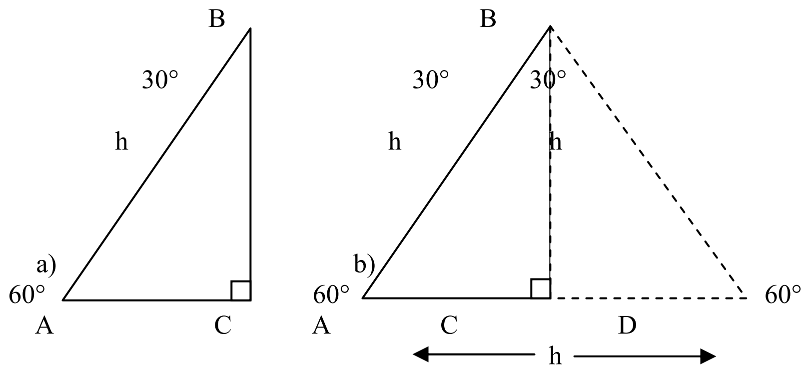
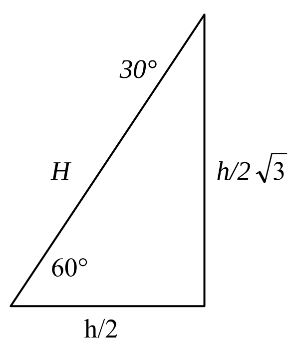


Figura 11

Hemos nombrado a la hipotenusa h, $/AC/$ es $\frac{h}{2}$, y el lado desconocido $/BC/$ como x. Determinamos x utilizando el teorema de Pitágoras. $x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3h^2}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{h}{2}\sqrt{3}$. Como antes, rechazamos la solución negativa, de modo que $x = \frac{h}{2}\sqrt{3}$. Por lo tanto, hemos deducido lo siguiente.

El triángulo rectángulo de 30°- 60°



En palabras, el diagrama dice que en un triángulo rectángulo 30°- 60°, el lado opuesto al ángulo de 30° es la mitad de la hipotensa, y el lado opuesto al ángulo de 60° mide la mitad de la hipotenusa multiplicado por $\sqrt{3}$.

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1. En los ejercicios siguientes convierta el ángulo dado de radianes a grados.

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $-\frac{5\pi}{2}$ e) $-\frac{4\pi}{3}$ f) $-\frac{11\pi}{6}$

g) $\frac{3\pi}{2}$ h) $-\frac{2\pi}{5}$ i) 3 j) 5 k) -2 l) -2π

2. En los ejercicios siguientes convierta el ángulo dado de grados a radianes.

a) $150°$ b) $315°$ c) $-120°$

d) $-270°$ e) $18°$ f) $100°$

3. En los ejercicios siguientes, dibuje el ángulo dado en posición canónica y determine el ángulo de referencia. Si el ángulo es de cuadrante, indique en dónde queda el lado terminal; por ejemplo, en el eje x positivo, en el eje y negativo, etcétera.

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{4}$ c) $\frac{7\pi}{6}$ d) $\frac{4\pi}{3}$
e) $315°$ f) $150°$ g) $60°$ h) $45°$
i) $\frac{\pi}{2}$ j) π k) $-\frac{5\pi}{6}$ l) $-\frac{3\pi}{4}$

4. En los ejercicios, determine el valor indicado.

a) $sen\frac{5\pi}{6}$ b) $\cos\frac{3\pi}{4}$ c) $\tan\frac{4\pi}{3}$ d) $sen\frac{11\pi}{6}$
e) $sen\frac{3\pi}{2}$ f) $\cos\pi$ g) $\tan\frac{\pi}{2}$ h) $\cot 0$
i) $\sec 225°$ j) $\csc 300°$ k) $\cos 270°$ l) $sen\ 180°$
m) $\cot\frac{3\pi}{4}$ n) $\sec\frac{2\pi}{3}$ ñ) $sen\ 30°$ o) $\cos 60°$
p) $\sec(-225°)$ q) $\cos 60°$

5. En los ejercicios siguientes, utilice la información dada para determinar el valor solicitado.

a) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ *; determine sec* θ.

b) $sen\theta = -\frac{3}{7}$ *; determine csc* θ.

c) $\csc\theta = -3$ *; determine sen* θ.

d) $\cot\theta = -4$ *; determine tan* θ.

e) $sen\theta = \frac{3}{5}$ *;* θ *está en el cuadrante II. Determine cos* θ.

f) $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ *;* θ *está en el cuadrante III. Determine sen* θ.

g) $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ *;* θ *está en el cuadrante IV. Determine cos* θ.

h) $\cot\theta = \frac{1}{5}$ *;* θ *está en el cuadrante I. Determine sen* θ.

6. En los ejercicios siguientes, complete las tablas con los valores solicitados.

θ	sen θ	cos θ	tan θ
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{4}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
π			

θ	sen θ	cos θ	tan θ
$\frac{7\pi}{6}$			
$\frac{5\pi}{4}$			
$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{7\pi}{4}$			
$\frac{11\pi}{6}$			
2π			

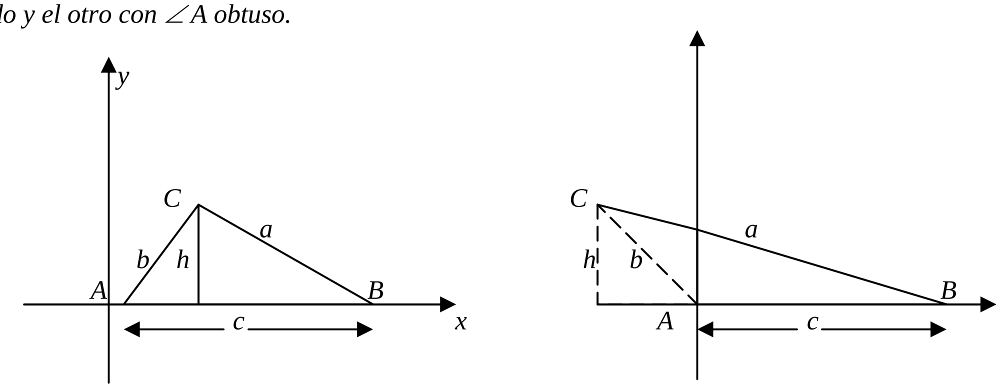
θ	sec θ	csc θ	cot θ
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{4}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
π			

CAPÍTULO 10
LEY DE SENOS Y COSENOS

10.1 LA LEY DE LOS SENOS

[3]Continuaremos utilizando la convención de etiquetar los ángulos de un triángulo con A, B y C y los lados opuestos a estos ángulos como a, b y c, respectivamente.

En la figura 1, hemos trazado dos triángulos ABC (con $\angle A$ en posición canónica), uno con $\angle A$ agudo y el otro con $\angle A$ obtuso.



ΔABC *con* $\angle A$ *agudo* ΔABC *con* $\angle A$ *agudo*

Figura 1

Si observamos ambas partes (a) y (b) de la figura 1, podemos ver que:

$senA = \frac{h}{b}$ *y* $senB = \frac{h}{a}$ *Y por lo tanto tenemos*

$bsenA = h$ *y* $asenB = h$ *lo que implica*

$bsenA = asenB$ *Si dividimos ambos lados entre ab, obtenemos:* $\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b}$

Si reorientamos estos ángulos de modo que $\angle C$ esté en posición canónica con (a) a lo largo del eje x positivo, tenemos

$$\frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$$

Al combinar estos resultados obtenemos la ley de los senos.

En el Δ ABC con los lados a, b y c, tenemos

$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$$

[3] Arthur Goodman / Lewis Hirsch. ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. Primera Edición. Editorial Prentice Hall.

Observe que la primera igualdad en la ley de los senos se puede escribir como: $\frac{a}{b} = \frac{senA}{senB}$

En palabras, la ley de los senos dice que en cualquier triángulo, la razón de dos lados cualesquiera es igual a la razón de los senos de los ángulos opuestos a tales lados.

También tenemos una forma alternativa de la ley de los senos, que se obtiene al invertir cada una de las razones. Utilizaremos la forma que parezca más adecuada.

En lo sucesivo, a menos que se especifique lo contrario, redondearemos todas las respuestas a décimos.

Ejemplo número 1:
En la figura 2, resuelva $A\Delta ABC$: $\angle A=48°$, $\angle B=39°$, $c=10$.

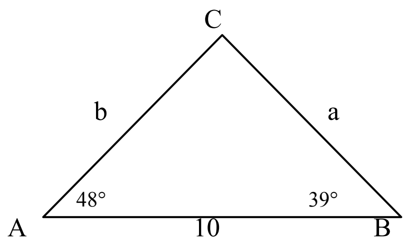


Figura 2

Recuerde que resolver el triángulo significa determinar todos los lados ó ángulos faltantes.
Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, vemos que $\angle C = 93°$.
Determine ***a*** *utilizando la ley de los senos, que implica:* $\frac{a}{sen48°} = \frac{10}{sen93°}$ *despejando* ***a***

$$a = \frac{10sen48°}{sen93°} = 7.4416468 \qquad a = 7.4$$

De manera análoga, para determinar ***b*** *tenemos:* $\frac{b}{sen39°} = \frac{10}{sen93°}$

$$b = \frac{10sen39°}{sen93°} = 6.3018404 \qquad b = 6.3 \text{ Redondeado a décimos}$$

Ejemplo número 2:
Determine la distancia entre los puntos A y B en las orillas opuestas de un lago, como se indica en la figura 3. Redondee la respuesta a metros.

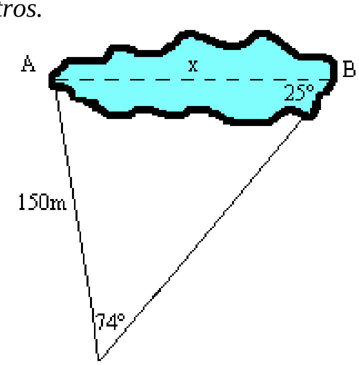


Figura 3

La información dada permite utilizar la ley de los senos, de manera que: $\dfrac{x}{sen74°} = \dfrac{150}{sen25°}$

$x = \dfrac{150sen74°}{sen25°} = 341.18084$ *x = 341 metros*   *Redondeado a metros*

Ejemplo número 3:
El caso ambiguo. Es decir, si se especifican dos lados de un triángulo y uno de los ángulos no incluido entre ellos, esto no determina por completo al triángulo, como se muestra a continuación.
En el Δ *ABC, determine la medida de* $\angle$ *B (figura 4).*

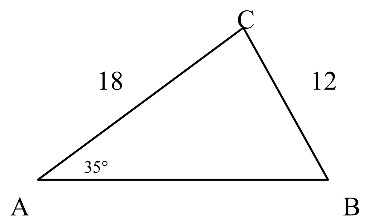


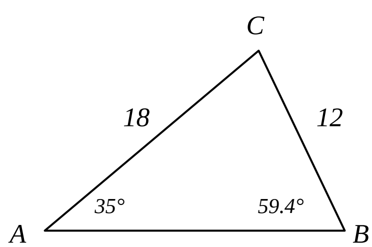
Figura 4

Si aplicamos la ley de los senos para determinar $\angle$ B, obtenemos: $\dfrac{senB}{18} = \dfrac{sen35°}{12}$

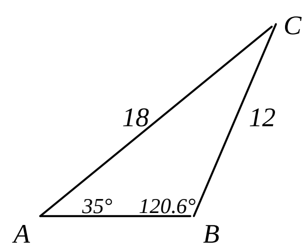
$$senB = \frac{18sen35°}{12} = 0.8603647$$

Con 0.8603647 en la pantalla de la calculadora, podemos oprimir la tecla que indique seno inverso (sen^{-1} *) para obtener el ángulo B. Sin embargo, sólo obtenemos el ángulo agudo (primer cuadrante) cuyo seno es 0.860347, que es igual a B=59.4° (redondeado a décimos). Como la función seno también es positiva en el segundo cuadrante, nos sirve también un ángulo en el segundo cuadrante con un ángulo de referencia de 59.4°, y por lo tanto, B puede ser también 120.6°.*
Por lo tanto, la respuesta de este ejemplo es B = 59.4° ó 120.6° .

Esta respuesta significa que podemos trazar dos triángulos con la información dada. Los dos triángulos aparecen en la figura 5(a) y (b).



Δ *ABC con* $\angle$ *B = 59.4°*
(a)



Δ *ABC con* $\angle$ *B = 120.6°*
(b)

Figura 5

10.2 LA LEY DE LOS COSENOS

La ley de los cosenos, que deduciremos en un momento, trata las situaciones LAL (lado, ángulo, lado) y LLL (lado, lado, lado), no cubiertas por la ley de los senos.
Consideremos un triángulo general ABC y coloquémoslo en un sistema de coordenadas, de modo que $\angle C$ esté en posición canónica, como se indica en la figura 6.

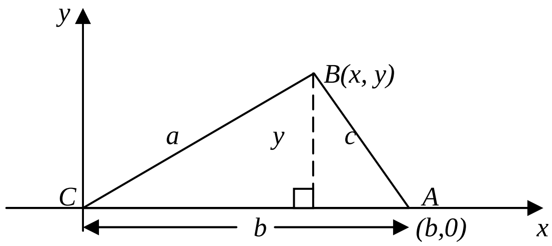


Figura 6 ΔABC*, con* $\angle C$ *en posición canónica.*

Observe que podemos trazar Δ *ABC con* $\angle C$ *agudo.*

La altura del vértice B al lado $\overline{AC}$ *ha sido etiquetada como* ***y***. *De la figura 6, tenemos:*

$$\cos C = \frac{x}{a} \qquad\qquad sen C = \frac{y}{a}$$

$$x = a \cos C \qquad\qquad y = a \ sen\ C$$

Ahora utilizaremos la fórmula de la distancia entre dos puntos para calcular la longitud de $\overline{AB}$, *que designamos como* ***c***, *utilizando las coordenadas que hemos determinado.*

$$c = \sqrt{(x-b)^2 + (y-0)^2}$$

$$c = \sqrt{(a\cos C - b)^2 + (asenC)^2}$$

$$c = \sqrt{a^2(\cos C)^2 - 2ab\cos C + b^2 + a^2(senC)^2}$$

Agrupamos el primer y último términos y factorizamos a^2.

$$c = \sqrt{a^2(sen^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C + b^2}$$

Como $sen^2C + cos^2C = 1$, *tenemos*

$$c = \sqrt{a^2 - 2ab\cos C + b^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Esta última ecuación es la ley de los cosenos.

Observe que si $\angle C$ *es un ángulo recto, entonces cos C = 0 y la ley de los cosenos se reduce al teorema de Pitágoras. De hecho, podemos ver a la ley de los cosenos como una generalización de este teorema.*

Recuerde que podríamos haber comenzado con el ángulo A o el ángulo B en posición canónica, lo que nos daría otras dos formas de la ley de los cosenos.

La ley de los cosenos

En cualquier ΔABC, el cuadrado de cualquier lado es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados, menos dos veces el producto de los otros dos lados por el coseno del ángulo entre ellos.

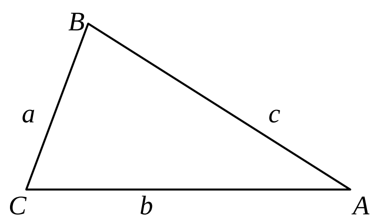


Figura 7

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1. En los ejercicios siguientes, utilice la información dada para determinar las partes faltantes de ΔABC. Aproxime sus respuestas hasta décimos. Una calculadora científica le será útil para este conjunto de ejercicios.

a) $A = 80°$, $B = 35°$, $a = 12$	*b) $A = 80°$, $B = 35°$, $c = 12$*	*c) $A = 72°$, $a = 24$, $b = 15$*
d) $A = 72°$, $b = 24$, $c = 15$	*e) $a = 6$, $b = 9$, $c = 10$*	*f) $B = 53°$, $b = 7$, $c = 10$*
g) $B = 110°$, $C = 25°$, $c = 16$	*h) $a = 15$, $b = 12$, $c = 5$*	*I) $A = 138°$, $b = 5$, $c = 11$*

2. Resuelva los siguientes problemas.

a) Un globo meteorológico flota en el aire exactamente sobre la recta que une los puntos A y B que están a 4.6 km de distancia. Si el ángulo de elevación del globo desde los puntos A y B es de 28°50' y 52°10', respectivamente, determine la altura del globo.

b) Dos torres de observación A y B se localizan a 15 millas de distancia entre sí, en un parque nacional. Los dos observadores ven un incendio en el punto C, de modo que $\angle$ CAB = 73° y $\angle$ CBA = 59°. ¿A qué distancia está el incendio de la torre B?

c) Un poste telefónico se sostiene mediante dos cables sujetos a la parte superior del poste y en el suelo, en lados opuestos del poste, en los puntos A y B, que están a 80 pies de distancia entre sí. Si los ángulos de elevación en A y B son de 70° y 58°, respectivamente, determine las longitudes de ambos cables y la altura del poste.