CAPÍTULO 11
GEOMETRÍA, EL PLANO CARTESIANO

11.1 CONCEPTOS BÁSICOS

[1]*Así como podemos representar los números reales como puntos de la recta real, podemos asociar puntos del plano a los pares ordenados de números reales. Un par ordenado (x, y) de números reales tiene x como primer elemento e y como segundo. El modelo para su representación se llama sistema coordenado rectangular o plano cartesiano. Se construye mediante dos rectas perpendiculares.*

La recta horizontal se llama tradicionalmente eje x y la vertical y la vertical eje y. Su punto de intersección es el origen y esas rectas dividen al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes.

Identificamos cada punto de plano por un par ordenado (x, y) de números reales, llamados coordenadas del punto. El número x representa la distancia dirigida desde el eje y al punto, y el número y la distancia dirigida desde el eje x al punto. El primero se llama coordenada x ó abscisa, y el segundo coordenada y u ordenada. Así, la figura 3 muestra la situación de los puntos (4, 0), (5, 7) y (2, 1) en el plano.

NOTA: Usamos la notación (x, y) tanto para denotar un punto del plano cartesiano como un intervalo abierto de la recta real. Pero no habrá confusión porque en cada momento quedará claro de qué se trata.

11.2 FÓRMULAS DE LA DISTANCIA Y PUNTO MEDIO

Recordemos que, según el teorema de Pitágoras, para un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos ***a****,* ***b*** *se tiene* $a^2 + b^2 = c^2$. *Recíprocamente, si* $a^2 + b^2 = c^2$*, entonces el triángulo es rectángulo (Figura 1).*

Supongamos que queremos hallar la distancia entre los puntos (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *del plano. Formando con ellos un triángulo rectángulo, como indica la figura 2, vemos que el lado vertical tiene longitud* $|y_2 - y_1|$. *Análogamente el horizontal tiene longitud* $|x_2 - x_1|$. *Por el teorema de Pitágoras,*

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

Sustituyendo $|x_2 - x_1|^2$ *e* $|y_2 - y_1|^2$ *por las expresiones equivalentes* $(x_2 - x_1)^2$ *e* $(y_2 - y_1)^2$*, podemos escribir:* $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

La fórmula anterior representa la distancia entre los puntos (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2)*. Tomamos la raíz cuadrada positiva para* **d** *porque la distancia entre dos puntos no es una distancia dirigida.*

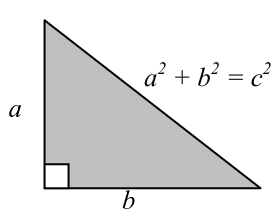


Figura 1 Teorema de Pitágoras

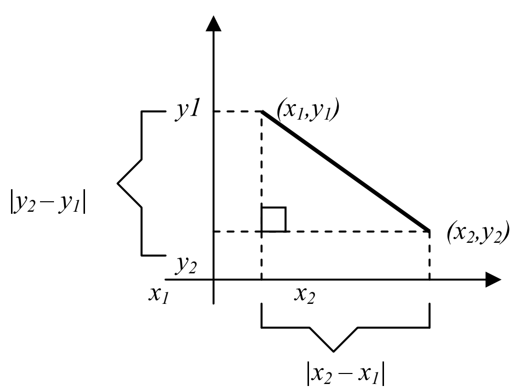


Figura 2 Distancia entre dos puntos

[1] Larson / Hostetler / Edwards. Cálculo. Quinta edición. Editorial Mc Graw Hill

Ejemplo número 1:
Distancia entre dos puntos.
Calcule la distancia entre los puntos (-2,1) y (3,4)
Aplicando el modelo tenemos que:

$$d = \sqrt{[3-(-2)]^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(5)^2 + (3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \approx 5.83$$

Ejemplo número 2:
Verificando que un triángulo es rectángulo
Se usa la fórmula de la distancia para probar que los puntos (2,1), (4,0) y (5,7) son vértices de un triángulo rectángulo.
Observe la figura 3, los tres lados tienen longitudes

$$d_1 = \sqrt{(5-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$
$$d_2 = \sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$d_3 = \sqrt{(5-4)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

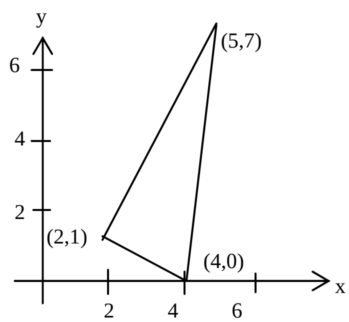


Figura 3

Como $d_1^{\,2} + d_2^{\,2} = 45 + 5 = 50 = d_3^{\,2}$*, podemos aplicar el teorema de Pitágoras para concluir que es un triángulo rectángulo.*

La fórmula del punto medio de un segmento de recta en el plano es similar a la de un segmento de la recta real.

El punto medio del segmento rectilíneo que une (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *es:*

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo número 3
Punto medio:
Calcule el punto medio (ver figura 4) de un segmento rectilíneo unido por los puntos: (-5,-3) y (9,3).
Por la fórmula del punto medio, tenemos que: $\left(\frac{-5+9}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) = (2{,}0)$

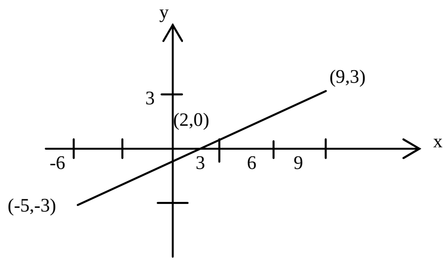


Figura 4

Ejemplo número 4:
Puntos situados a distancia prefijada de un punto dado
Calcule x de modo que la distancia entre (x, 3) y (2,-1) es 5.
Según la fórmula de la distancia,

$$d = 5 = \sqrt{(x-2)^2 + (3+1)^2}$$

$$25 = (x^2 - 4x + 4) + 16$$

$$0 = x^2 - 4x - 5 \text{ factorizando tenemos que: } 0 = (x-5)(x+1)$$

Por tanto, x = 5 o x = -1, y concluimos que ambos puntos (5, 3) y (-1, 3) distan 5 unidades del punto (2,-1), tal como muestra la figura 5.

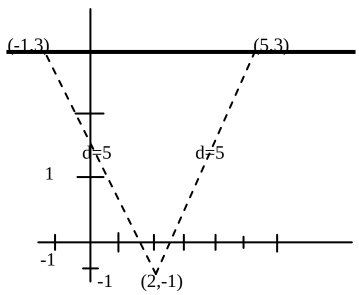


Figura 5

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1.Calcule la distancia entre los puntos que se indican. También determine el punto medio.
a) (2, 1), (4, 5) b) (-3, 2), (3, -2) c) (½, 1), (-¾, -3)d) (¼, 2), (-1, 3)

2.Verifique que los puntos que se dan corresponden a la figura que se indica.
a) (4, 0), (2, 1), (-1, -5) es triángulo rectángulo b) (1, -3), (3, 2), (-2, 4) es triángulo isósceles

3.Verifique si los puntos que se indican son colineales (están en la misma recta).
a) (0, -4), (2, 0), (3, 2) b) (0, 4), (7, -6), (-5, 11) c) (-2, 1), (-1, 0), (2, -2)

4.Encuentre x de manera que la distancia entre los puntos sea 5.
a) (0, 0), (x, 4) b) (2, -1), (x, 2)

5.Determine y *de manera que la distancia entre los puntos sea 8.*
a) (0, 0), (3, y) b) (5, 1), (5, y)

CAPÍTULO 12
LA LÍNEA RECTA

[2]*El siguiente concepto es fundamental para el estudio de las líneas rectas. Todas las líneas rectas a las que nos referimos están en un plano coordenado fijo. Como es costumbre, usaremos frecuentemente el término recta en lugar de línea recta.*

12.1 PENDIENTE DE UNA RECTA

*Sean **l** una línea recta no paralela al eje y, y $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ dos puntos diferentes sobre **l**. Entonces la pendiente **m** de **l** está dada por:*

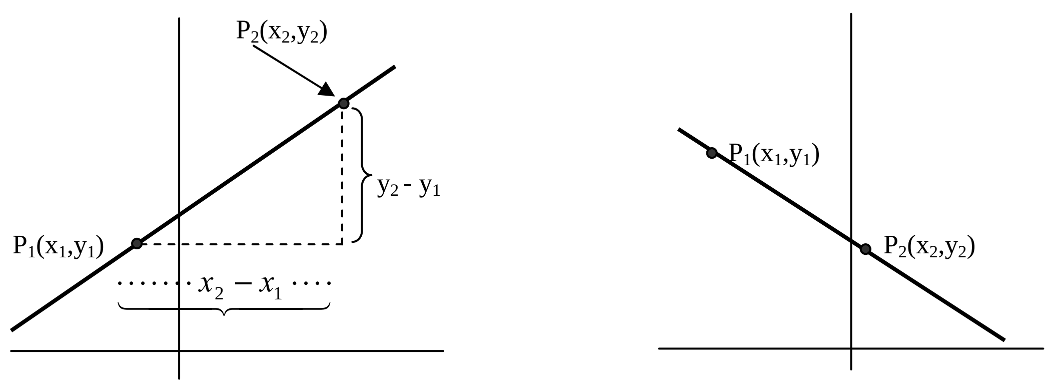
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

*Si **l** es paralela al eje y, entonces no está definida su pendiente.*

*El numerador $y_2 - y_1$ en la fórmula para **m**, mide el cambio en la dirección vertical al movernos de P_1 a P_2 y el denominador $x_2 - x_1$ mide el cambio horizontal al ir de P_1 a P_2. Para encontrar la pendiente de una recta no importa cuál de los puntos se llama P_1 y cuál P_2 ya que:*

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

En consecuencia podemos suponer que los puntos están numerados de manera tal que $x_1 < x_2$ como en la figura 1. En este caso $x_2 - x_1 > 0$ y por lo tanto la pendiente es positiva, negativa o cero si $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$ ó $y_2 = y_1$ respectivamente. La pendiente de la recta que se muestra en (a) de la figura 1 es positiva mientras que la pendiente de la recta en (b) de la figura 1 es negativa. La pendiente es cero si y sólo si la recta es horizontal. Si la pendiente es positiva, entonces a medida que crecen las abscisas de los puntos, también crecen las ordenadas y decimos que la recta sube. Si la pendiente es negativa, entonces a medida que las abscisas crecen, las ordenadas correspondientes decrecen y decimos que la recta baja.



(a) Pendiente positiva *(b) Pendiente negativa*

Figura 1

*Es importante notar que la definición de pendiente no depende de los dos puntos que se eligen sobre **l**, ya que si se usan otros puntos $P'_1(x'_1, y'_1)$ y $P'_2(x'_2, y'_2)$, entonces como se ve en la figura 2, el triángulo con vértices P'_1, P'_2 y $P'_3(x'_2, y'_1)$ es semejante al triángulo con vértices P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$. Como las razones de lados correspondientes son iguales concluimos que:*

[2] Earl W. Swokowski. Cálculo con geometría analítica. Grupo Editorial Iberoamérica

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

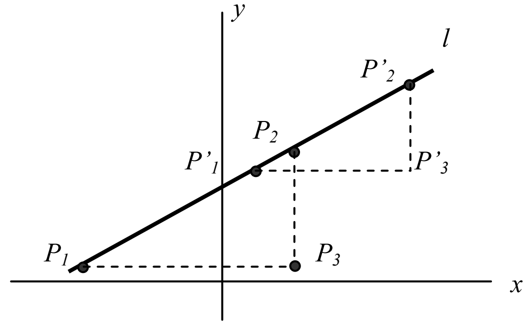


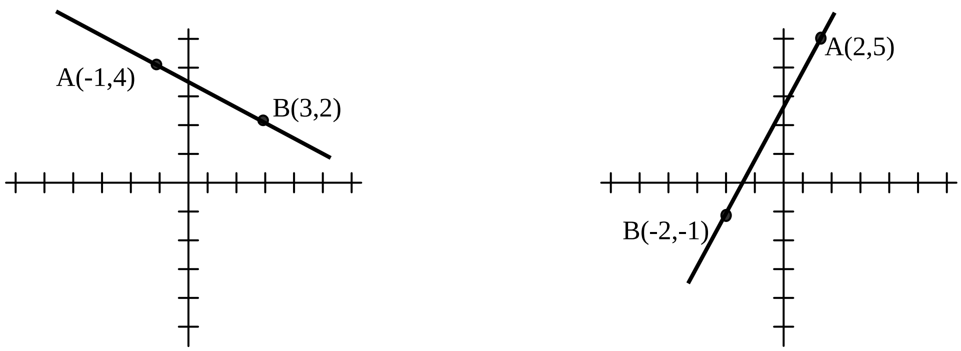
Figura 2

Ejemplo número 1:
Dibuje las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos y halle sus pendientes.
a) A(-1,4) y B(3,2) *b) A(2,5) y B(-2,-1)* *c) A(4,3) y B(-2,3)* *d) A(4,-1) y B(4,4)*

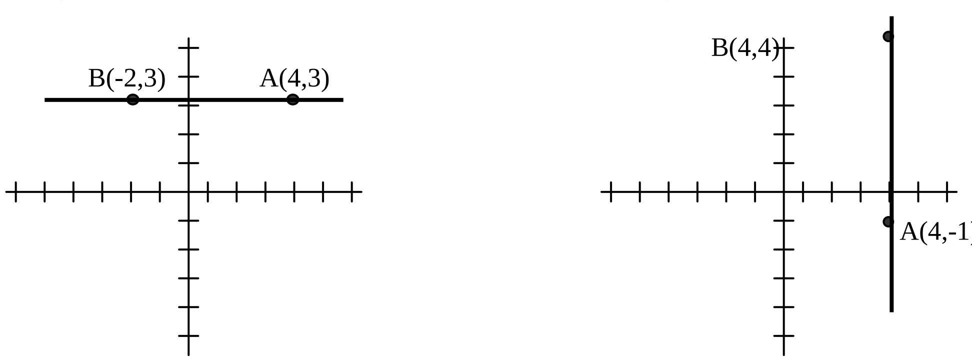
Las rectas están dibujadas en la figura 3. Usando el modelo para calcular la pendiente obtenemos para los incisos a), b) y c).

a) $m = \frac{2-4}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ *b)* $m = \frac{5-(-1)}{2-(-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ *c)* $m = \frac{3-3}{-2-4} = \frac{0}{-6} = 0$

d) La pendiente no está definida ya que la recta es vertical. Esto también se ve al intentar usar el modelo, ya que el denominador $x_2 - x_1$ *es cero.*



a) m = -1/2 *b) m = 3/2*



c) m = 0 *d) m no está definida*

Figura 3

Sea ***l*** una recta no paralela al *eje x* y ***P*** el punto de intersección de ***l*** con el *eje x*. Entonces la inclinación de ***l*** es el ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ más pequeño tal que al girar el *eje x* alrededor de ***P*** en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj éste coincida con ***l***. Si ***l*** es paralela al *eje x*, entonces $\boldsymbol{\alpha} = 0°$.

*Si **l** no es horizontal, entonces* $0° < \alpha < 180°$. *La recta mostrada en (a) de la figura 4 ilustra el caso en el que* $0° < \alpha < 90°$ *y la recta en (b) ilustra el caso en el que* $90° < \alpha < 180°$. *Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma inclinación.*

El siguiente teorema muestra la conexión entre la pendiente y la inclinación de una recta. En la demostración usaremos la definición de la tangente de un ángulo.

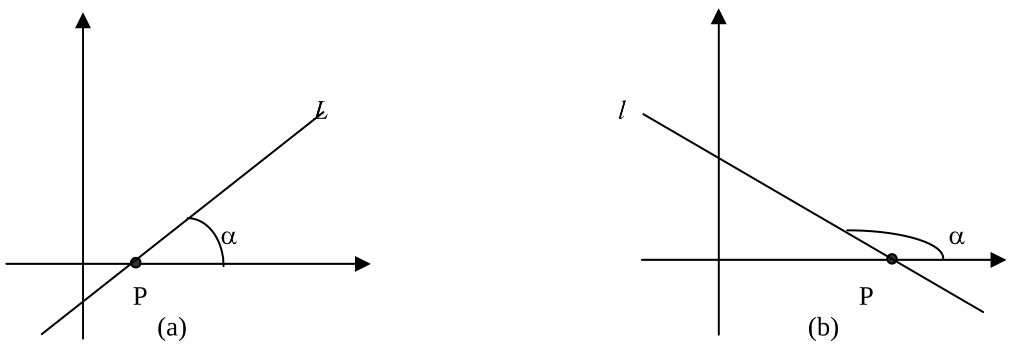


Figura 4 Inclinación α *de una recta*

Teorema: Si una recta tiene pendiente **m** *e inclinación* $\boldsymbol{\alpha}$, *entonces* $\mathbf{m = tan\ \alpha}$. *La demostración al enunciado anterior se da a continuación:*

*En la figura 5 está dibujada una recta típica cuya inclinación es un ángulo agudo. Como se ilustra en la figura, sea **l'** una recta que pasa por el origen paralela a **l**. Elija cualquier punto (x, y) sobre **l'** con y > 0. Si* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *son puntos distintos sobre **l** con* $y_2 > y_1$, *entonces usando la semejanza de los triángulos y la definición de tangente de un ángulo obtenemos:*

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

$$\therefore \tan\alpha = m$$

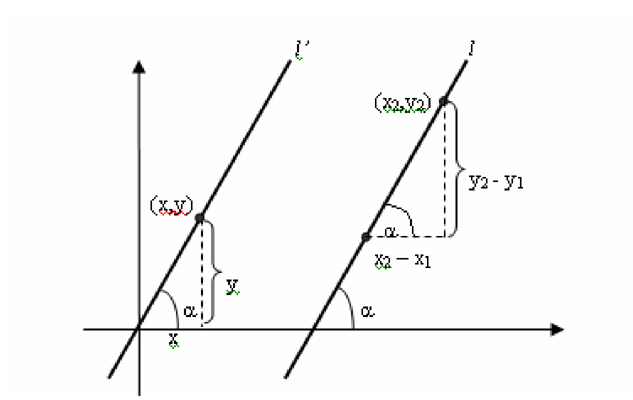


Figura 5

COROLARIO

Dos rectas con pendientes m_1 *y* m_2 *Son paralelas si y sólo si* $m_1 = m_2$

Demostración. Si las rectas tienen inclinaciones α_1 *y* α_2 *entonces son paralelas si y sólo si* $\alpha_1 = \alpha_2$ *ó equivalentemente si y sólo si* $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$. *El corolario se deduce del teorema anterior.*

TEOREMA

> *Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son Perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.*

Demostración. *Si α_1 y α_2 denotan las inclinaciones de las rectas, entonces por el teorema que dice: Si una recta tiene pendiente* **m** *e inclinación* $\boldsymbol{\alpha}$, *entonces* **m = tan** $\boldsymbol{\alpha}$**.**

$$m_1 = \tan \alpha_1 \qquad y \qquad m_2 = \tan \alpha_2.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_2 > \alpha_1$ como se muestra en la figura 6. Si $\boldsymbol{\theta}$ es el ángulo indicado en la figura, entonces:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta, \qquad \text{ó} \qquad \theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

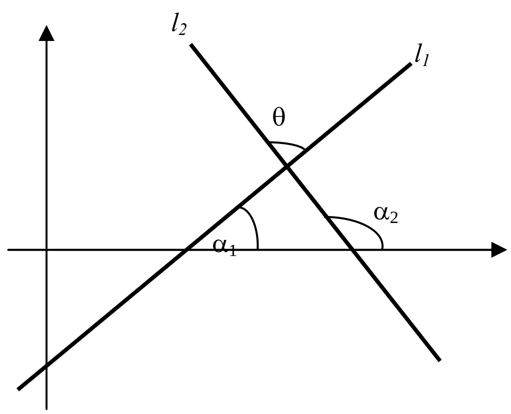


Figura 6

Usando una identidad trigonométrica:

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2} \qquad \text{ó} \qquad \tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Por definición las rectas son perpendiculares si y sólo si $\theta = 90°$ ó, equivalentemente, si y sólo si tan θ no está definida. Sin embargo, por la fórmula anterior, tan θ no está definida si y sólo si $1 + m_1 m_2 = 0$ ó $m_1 m_2 = -1$, que es lo que queríamos demostrar. Aunque hablamos de la figura 6, se puede usar un argumento semejante independientemente de las magnitudes de α_1 y α_2, o del punto donde se intersecan las rectas.

Ejemplo número 2:
Demuestre que el triángulo con vértices A(-1,-3), B(6,1) y C(2,-5) es un triángulo rectángulo.

Si m_1 es la pendiente de la recta que pasa por B y C y m_2 es la pendiente de la recta que pasa por A y C, entonces utilizando el modelo para cálculo de pendiente tenemos que:

$$m_1 = \frac{1-(-5)}{6-2} = \frac{3}{2}; \quad m_2 = \frac{-3-(-5)}{-1-2} = -\frac{2}{3}$$

Como $m_1 m_2 = -1$, el ángulo en C es recto.
La ecuación $y = b$ donde b es un número real puede considerarse igual a la ecuación $0 \cdot x + y = b$ en dos variables x y y . Las soluciones son todas las parejas ordenadas de la forma (x, b) donde x tiene cualquier valor y b es fijo. Concluimos que la gráfica de $y = b$ es una línea recta paralela al eje x cuya ordenada al origen es b. Análogamente la gráfica de la ecuación $x = a$ es una recta paralela al eje y cuya abscisa al origen es a. Las gráficas están dibujadas en la figura 7.

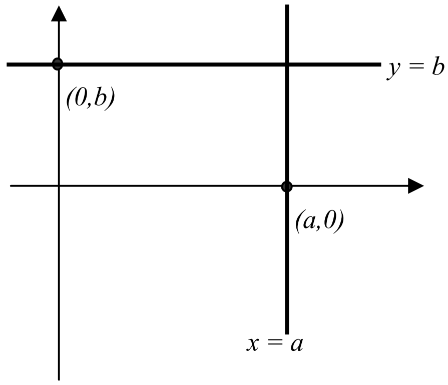


Figura 7

12.2 ECUACIÓN DE LA RECTA

*Hallemos ahora una ecuación de la recta **l** con pendiente **m** que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ (únicamente existe una recta tal). Si $P(x, y)$ es cualquier punto con $x \neq x_1$, entonces **P** está sobre **l** si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es **m**, es decir:* $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Esta ecuación se puede escribir en la forma: $y - y_1 = m(x - x_1)$

*Note que (x_1, y_1) también es una solución de la ecuación anterior y por lo tanto los puntos sobre **l** son precisamente aquellos que corresponden a las soluciones.*

La ecuación de la recta conocido un punto $P_1(x_1, y_1)$ y su pendiente m es: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ejemplo número 3:
Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1, 7) y B(-3, 2)
Calculando la pendiente m de la recta obtenemos: $m = \dfrac{7-2}{1-(-3)} = \dfrac{5}{4}$

Sustituyendo las coordenadas de A en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ obtenemos: $y - 7 = \dfrac{5}{4}(x - 1)$

que es equivalente a: $4y - 28 = 5x - 5$ *o bien* $5x - 4y + 23 = 0$

Habríamos obtenido la misma ecuación si hubiéramos utilizado el punto B en vez del punto A.

La ecuación de la recta conocido la pendiente y la ordenada al origen:

La gráfica de la ecuación $y = mx + b$ es una recta con pendiente m y ordenada al origen b.

*Una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ tal que a y b no son cero simultáneamente, se llama una ecuación lineal**.** Se sigue de la discusión en esta sección que toda línea recta es la gráfica de una ecuación lineal e, inversamente, la gráfica de una ecuación lineal es una línea recta. Por simplicidad usaremos el término la recta $ax + by + c = 0$, en lugar de la expresión más precisa la recta con ecuación $ax + by + c = 0$.*

Ejemplo número 4:
Dibuje la gráfica de la ecuación 2x – 5y = 8.
Como la gráfica es una línea recta, es suficiente hallar dos puntos sobre la gráfica. Sustituyendo $y = 0$ *en la ecuación obtenemos la abscisa al origen 4, y sustituyendo x = 0 obtenemos la ordenada al origen –8/5. Esto nos lleva a la gráfica dibujada en la figura 8.*

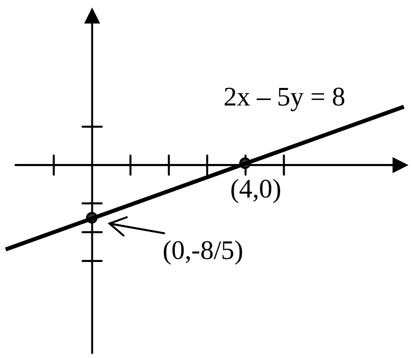


Figura 8

Otra manera para obtener la solución consiste en expresar la ecuación dada en la forma $y = ax + b$. *Para hacerlo primero despejamos el término que contiene a y de un lado de la ecuación obteniendo: 5y = 2x –8*

En seguida dividimos ambos lados por 5 y obtenemos: $y = \frac{2}{5}x + \left(\frac{-8}{5}\right)$

Comparando con $y = mx + b$ *vemos que la pendiente es* $m = \frac{2}{5}$ *y que la ordenada al origen es* $b = -\frac{8}{5}$

Luego podemos trazar la recta que pasa por $\left(0, -\frac{8}{5}\right)$ *con pendiente* $\frac{2}{5}$.

12.3 GRAFICACIÓN POR PARÁMETROS

[3]*La gráfica de la ecuación* $y = x$ *está dada en la Figura 9,* y *representa una recta que pasa por el origen (0, 0), con un ángulo de inclinación* $\theta = \frac{\pi}{4}$ *(45 grados) respecto al eje de las abscisas.*

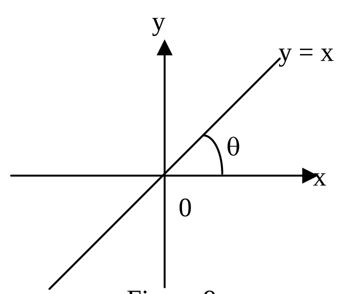


Figura 9

Si a esta ecuación le agregamos una constante <u>*a*</u> *como factor* $y = ax$, *analicemos que sucede con la función identidad gráficamente. El parámetro* <u>*a*</u> *deja en libertad a la función identidad para que gire sobre (0,0), dependiendo del valor que tome* <u>*a*</u>. *Y si consideramos que* <u>*a*</u> *es cualquier número real, entonces la ecuación* $y = ax$, *representa gráficamente la familia de todas las rectas que pasan por (0,0) y el caso a = 1 es la llamada función identidad.*

[3] Moreno M. A / Núñez J. / Miembros del Programa Nacional de Formalización y Actualización de Profesores de Matemáticas. Nodo Regional sonora; Sonora (UNISON).Graficación de funciones.

En la Figura 10 se representan los casos correspondientes a los valores que toma el parámetro a.

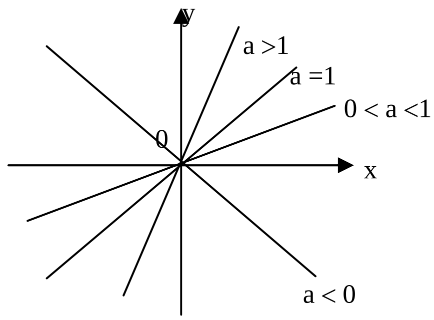


Figura 10

Si $0 < a < 1$, *la recta varía su inclinación en el intervalo* $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$; $a > 1$, *la recta varía su inclinación en el intervalo* $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$; *si* $a < 0$, *la recta varía su inclinación en el intervalo* $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. *Así, todas las rectas que pasan por el origen tienen la forma* $y = ax$, *dependiendo su inclinación del parámetro a.*

Si la ecuación $y = ax$ *le sumamos una constante b,* $y = ax + b$, *vemos que ahora el parámetro b deja en libertad a la función para que se desplace verticalmente, sobre el eje de las ordenadas, dependiendo del valor que tome b.*

Si b toma valores positivos, la función se desplaza hacia arriba, si b toma valores negativos, la función se desplaza hacia abajo, de tal manera que si b = 0, estamos en el caso $y = ax$. *Ver Figura 11 y figura 12.*

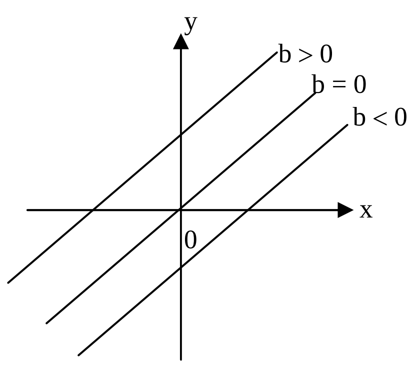


Figura 11
y = ax+b, a > 0

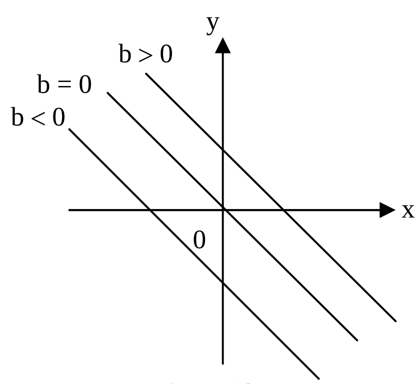


Figura 12
y = ax + b, a < 0

Si consideramos que b, al igual que a, es cualquier número real, la ecuación $y = ax + b$, gráficamente representa, todas las rectas contenidas en el plano, y es la forma general de la función lineal.

Conociendo los parámetros a y b, podemos determinar la inclinación y un punto de la recta, respectivamente; el punto conocido es (0, b), donde la recta interseca al eje de las ordenadas y, así, obtener una gráfica aproximada de la función.

Una estrategia amparada con lo anteriormente expuesto, radica en expresar la ecuación de la línea recta en la forma $y = mx + b$, de tal suerte que podamos identificar claramente la ordenada al origen, es pues el valor de

b, ubicando dicho punto en el sistema de coordenadas. Consideremos el caso $y = 3x + 1$, para ejemplificar lo que estamos describiendo. Una vez ubicado el punto $(0, b)$ (vea figura 13) proseguimos a analizar el valor correspondiente a la pendiente, si m = 3 significa un aumento en la distancia horizontal de 1 contra un aumento vertical de 3, partiendo de la ordenada al origen. Se ubica entonces el punto (1, 4) y luego se traza la recta (figura 14) tocando ambos puntos.

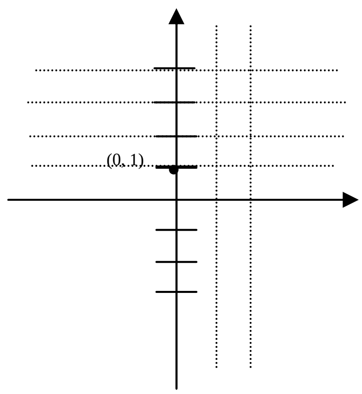


Figura 13

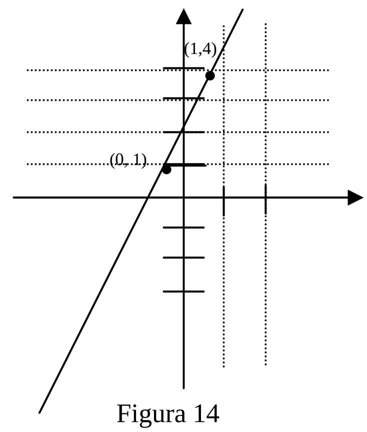
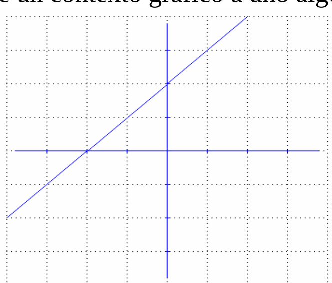


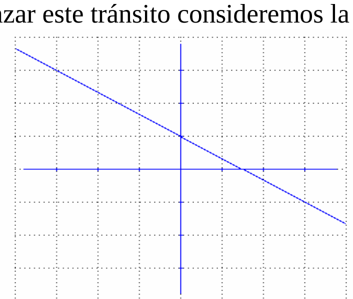
Figura 14

De hecho con esta estrategia —manipulando el concepto de pendiente y ordenada al origen— es factible transitar de un contexto gráfico a uno algebraico con mayor facilidad. Veamos la siguiente gráfica.



Ubiquemos primeramente la ordenada al origen, puede verse que es (0, 2) partiendo de ese punto tenemos que avanzar 1 unidad horizontalmente y 1 unidad verticalmente para llegar al punto (1, 3), con esto sabemos que la pendiente es m = 1, y la ecuación de la recta es: y = x + 2

Para afianzar este tránsito consideremos la siguiente gráfica.



Ubiquemos de primera instancia la ordenada al origen, puede verse que es (0, 1) partiendo de ese punto tenemos que avanzar 3 unidades horizontalmente y descender verticalmente 2 unidades para llegar al punto (3, -1), con esto sabemos que la pendiente es m = $-\frac{2}{3}$, (el signo menos se genera por el descenso) y la ecuación de la recta es:

$$y = -\frac{2}{3}x + 1$$

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1.Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q

a) P(1, 5), Q(4, 11)   b) P(1, 6), Q(4, 3)   c) P(3, 3), Q(1, 6)

2.Diga (con su respectivo argumento) cuáles de las siguientes parejas de rectas son paralelas o perpendiculares.

a) $y-1=5x$, $y=-\dfrac{1}{5}x+1$ b) $y-3x-2=0$, $y=3x+1$ c) $y=5x+1$, $y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{31}{5}$ d) $y=2x+5$, $2y+x=4$

3.Encuentre la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas en cada uno de los ejercicios.

a) Pasa por (2, -3), pendiente 6   b) Pasa por (-1, 4), pendiente –3   c) Pasa por (4, 5) paralela al eje x

d) Pasa por (1, -6) paralela a la recta $2x+3y+4=0$ e) Pasa por (-1, -2), perpendicular a la recta $4x-8y=1$

4.Elabore las gráficas de las siguientes expresiones.

a) $y=x$ b) $y=2x$ c) $y=4x$ d) $y=\dfrac{1}{2}x$ e) $y=\dfrac{1}{4}x$

f) $y=-x$ g) $y=-2x$ h) $y=-4x$ i) $y=-\dfrac{1}{2}x$ j) $y=-\dfrac{1}{3}x$

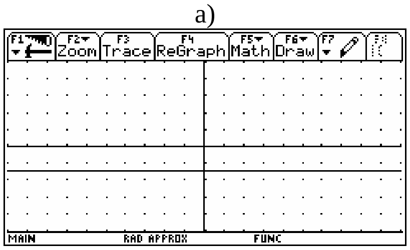
5.Elabore las gráficas de las siguientes expresiones.

a) $y=x+1$ b) $y=x+3$ c) $y=3x+2$ d) $y=-2x+1$ e) $y=-3x-2$

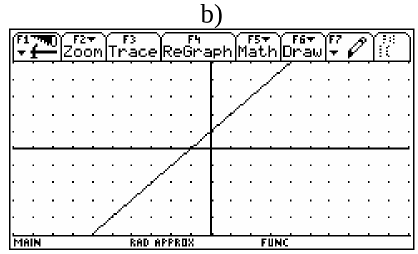
f) $y=\dfrac{1}{2}x+3$ g) $y=\dfrac{-2}{3}x+1$ h) $y=\dfrac{2}{5}x-1$ i) $y=-\dfrac{1}{2}x-3$

6.Basándose en la gráfica que se presenta, establezca la expresión algebraica correspondiente.

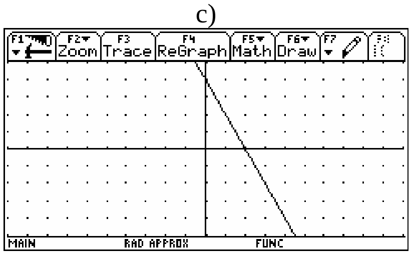
a)



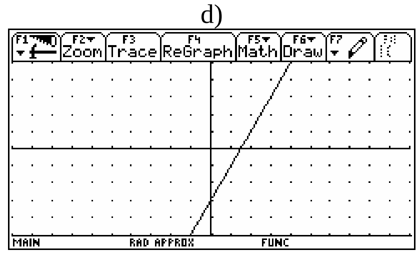
b)



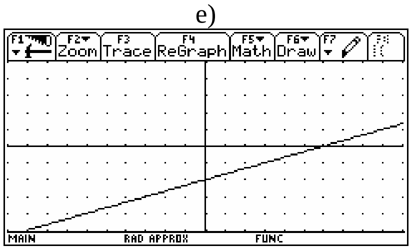
c)



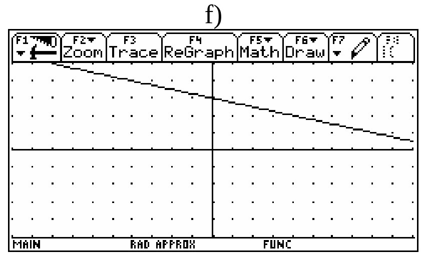
d)



e)



f)



CAPÍTULO 13
CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

13.1 CÍRCULOS

[4]*Una aplicación directa de la fórmula de la distancia permite definir los círculos en el plano.*
La definición de un círculo en el plano puede hacerse de la siguiente manera:
Sea (h, k) un punto en el plano y sea r > 0. El conjunto de los puntos (x, y) cuya distancia al punto (h, k) es r se llama círculo de centro (h, k) y radio r. Vea figura 1.

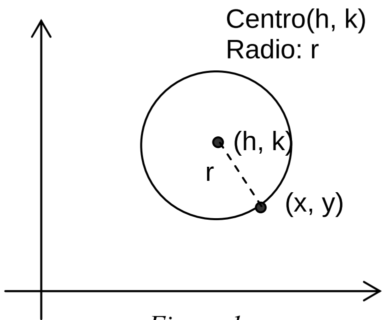


Figura 1

Podemos utilizar la fórmula de la distancia para escribir la ecuación de dicho círculo como:

[distancia entre (h, k) y (x, y)] = r luego: $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$

Elevando al cuadrado ambos lados de esta igualdad, se obtiene la ecuación canónica del círculo.

Teorema: Ecuación canónica del círculo
El punto (x, y) está en el círculo de radio r y centro (h, k) si y sólo si: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
De acuerdo al teorema anterior, un círculo centrado al origen tiene por ecuación canónica:

$$x^2+y^2=r^2$$

Si r = 1, la gráfica de esa ecuación se llama círculo unidad.

Ejemplo número 1:
Hallando la ecuación de un círculo
El punto (3,4) está en un círculo de centro (-1,2), como se ve en la figura 2. Halle la ecuación de ese círculo.

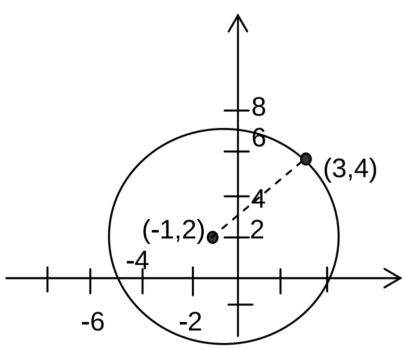


Figura 2
$(x+1)^2+(y-2)^2=20$

[4] Larson / Hostetler / Edwards. Cálculo. Quinta edición. Editorial Mc Graw Hill

Su radio es la distancia entre (-1,2) y (3,4), sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$r = \sqrt{[3-(-1)]^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Por tanto, la ecuación canónica resultante de ese círculo es:

$$[x-(-1)]^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$$

Efectuando los cuadrados y simplificando, la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ *se convierte en la forma general de la ecuación de un círculo:* $Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + F = 0$ *,* $A \neq 0$

Para convertir esta ecuación a la forma canónica $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ *usamos un proceso que consiste en completar el cuadrado.*

Ejemplo número 2:
Completando el cuadrado
Dibuje el círculo cuya ecuación en forma general es: $4x^2 + 4y^2 + 20x - 16y + 37 = 0$

Para completar el cuadrado, dividimos primero por 4 de modo que los coeficientes de x^2 *y* y^2 *sean 1.*

$4x^2 + 4y^2 + 20x - 16y + 37 = 0$	*Forma general*
$x^2 + y^2 + 5x - 4y + \frac{37}{4} = 0$	*Dividiendo por 4*
$\left(x^2 + 5x + \_\right) + \left(y^2 - 4y + \_\right) = -\frac{37}{4}$	*Agrupando términos*
$\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + \left(y^2 - 4y + 4\right) = -\frac{37}{4} + \frac{25}{4} + 4$	*Completando el cuadrado*
$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 1$	*Forma estándar*

Nótese que completamos el cuadrado añadiendo el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos lados de la ecuación. En consecuencia, el círculo está centrado en (-5/2, 2) y su radio es 1, como puede verse en la figura 3.

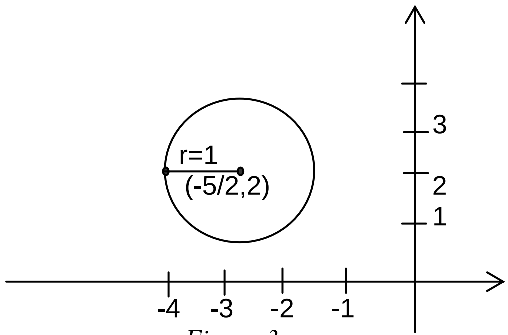


Figura 3

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-2\right)^2=1$$

En los tiempos en que nació la geometría analítica de la mano de Pierre de Fermat (1601-1655) y René Descartes (1596-1650), las dos grandes ramas de la matemática, álgebra y geometría, eran independientes entre sí. Los círculos pertenecían a la geometría, las ecuaciones al álgebra. La identificación de ambas es ya obra de lo que hoy llamamos geometría analítica. Es importante que el lector desarrolle su capacidad de manejar la geometría analítica para ir y venir entre álgebra y geometría. Así, en el Ejemplo número 1 nos da una descripción geométrica de un círculo y se solicita que halle su ecuación algebraica. Estamos moviéndonos, pues, de la geometría al álgebra. El ejemplo número 2 hacia la transición inversa.

1.Dada una gráfica, halle su ecuación.

Geometría → *Álgebra*

2.Dada una ecuación, halle su gráfica.

Álgebra → *Geometría*

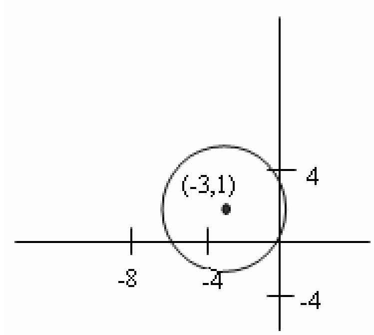
ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

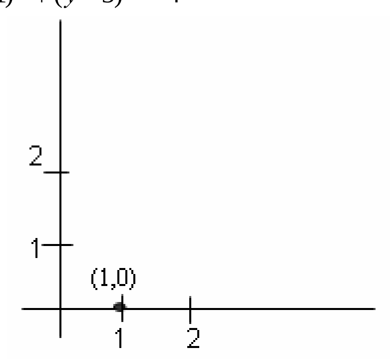
1.En los ejercicios siguientes complete el cuadrado.

a) x^2+5x b) x^2+8x+7 c) $4x^2-4x-39$ d) $5x^2+x$

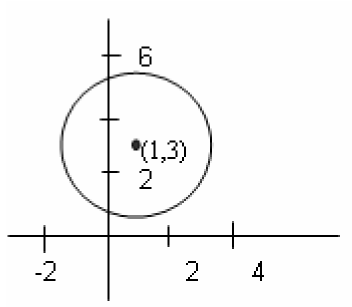
2.En los siguientes ejercicios, empareje cada ecuación con su gráfica:

a) $x^2+y^2=1$ b) $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

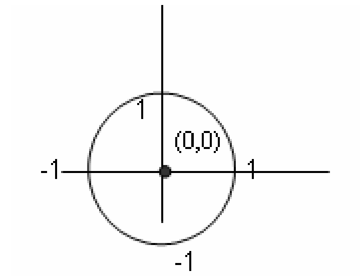




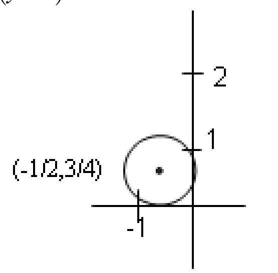
c) $(x-1)^2 + y^2 = 0$



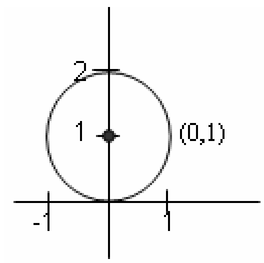
d) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$



e) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$



f) $x^2 + (y-1)^2 = 1$



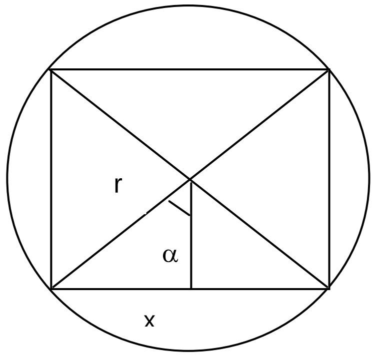
3.En los ejercicios siguientes, escriba la ecuación del círculo en forma general.
a) Centro: (0,0); radio: 3
b) Centro: (0,0); radio: 5
c) Centro: (2,-1); radio: 4
d) Centro: (-4,3); radio 5/8
e) Centro: (-1,2); punto del círculo: (0,0)
f) Centro: (3,-2); punto del círculo: (-1,1)
g) Puntos terminales del diámetro: (2,5), (4,-1)
h) Extremos del diámetro: (1,1),(-1,-1)
i) Puntos del círculo: (0,0), (0,8), (6,0)
j) Puntos del círculo: (1,-1), (2,-2), (0,-2)

4.En los Ejercicios siguientes, escriba cada ecuación en forma canónica y esboce la gráfica.
a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 17 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$
d) $3x^2 + 3y^2 - 6y - 1 = 0$
e) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$
f) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$
g) $16x^2 + 16y^2 + 16x + 40y - 7 = 0$
h) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$

13.2 CIRCUNFERENCIA

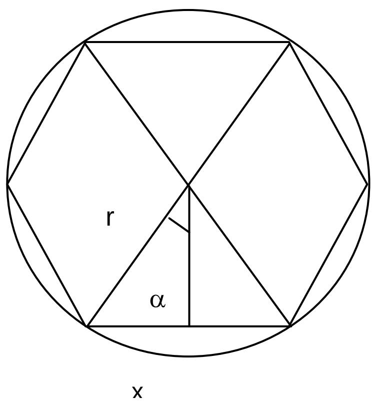
En el apartado anterior el tratamiento hecho se dirigió a la superficie plana (círculo), en particular su ecuación general y canónica, su gráfica y la estrategia para transitar de un contexto geométrico al algebraico y viceversa.

En ocasiones se presentan confusiones debido al uso indistinto de los términos circunferencia y círculo, aquí aprovechamos la ocasión para distinguirlos, mientras que el círculo es la superficie plana, la línea curva cerrada que limita o acota a la superficie citada es la circunferencia.
La medida de la longitud de la curva, conocido como perímetro del círculo es singularmente importante, por la parte geométrica y por involucrar un número real irracional llamado pi y denotado por π. Intentemos establecer la medida de la circunferencia de un círculo de radio r.
Inscribamos un polígono regular de cuatro lados en un círculo y calculemos su perímetro.



Sea α = *360 grados / [(2)(4)]* donde 4 es el número de lados del polígono.
Sea $x = r\ sen\ \alpha$. Sustituyendo el valor de α, obtenemos:
x = r sen (180 / 4) donde 4 es el número de lados del polígono.
Ahora el perímetro P del polígono estará dado por:
P = 4 (2x) nuevamente 4 corresponde al número de lados. Sustituyendo el valor de x, tenemos que:
P = 2r 4 sen (180 / 4), finalmente obtenemos:
P = (2r)(2.828427124746)

Si inscribimos un nuevo polígono regular de 6 lados, la figura quedaría de la siguiente manera.



Sea α = 360 grados / [(2)(6)] donde 6 es el número de lados del polígono.
Sea $x = r\ sen\ \alpha$. Sustituyendo el valor de α, obtenemos:
x = r sen (180 / 6) donde 6 es el número de lados del polígono.
Ahora el perímetro P del polígono estará dado por:
P = 6 (2x) nuevamente 6 corresponde al número de lados. Sustituyendo el valor de x, tenemos que:
P = (2r)[6 sen (180 / 6)]
P = (2r)(3)

Para observar lo que sucede nos apoyaremos de las siguientes preguntas:
¿Qué perímetro es mayor, el de la circunferencia o el del polígono regular de 4 lados?
¿Qué perímetro es mayor, el de la circunferencia o el del polígono regular de 6 lados?
¿Qué perímetro es mayor, el del polígono regular de 6 lados o el del polígono regular de 4 lados?
Las respuestas a estas preguntas sugerirán que si inscribimos polígonos regulares con mayor número de lados, el perímetro de estos será cada vez más cercano al perímetro de la circunferencia. En este sentido, consideremos un polígono regular de n lados (n > 3), de tal manera que el perímetro respectivo es:

$$P = 2r \cdot n \cdot sen\left(\frac{180}{n}\right)$$

Es decir que el perímetro del círculo es $P \approx 2r \cdot n \cdot sen\left(\frac{180}{n}\right)$ para valores de n considerablemente grande.

Ejemplifiquemos con un círculo de radio r = 1 *para determinar su perímetro. Utilicemos varios polígonos regulares incrementando el número de sus lados. La tabla siguiente resume la consideración correspondiente.*

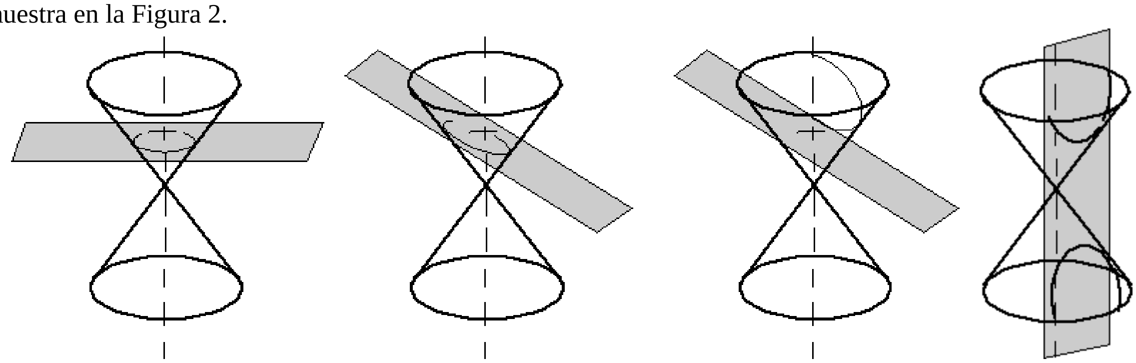
Lados (n)	*Perímetro (P)*
4	(2) 2.828427124746
16	(2) 3.121445152258
64	(2) 3.140331156955
256	(2) 3.141513801144
1024	(2) 3.141587725277
4096	(2) 3.14159234557

Por lo que podemos decir que el perímetro del círculo es aproximadamente 6.28318469114
Aunado al hecho de que el modelo para calcular el perímetro de un círculo es $P = 2\pi\, r$, y dado que consideramos que el radio $r = 1$ entonces $\pi \approx \frac{P}{2}$ concluyendo $\pi \approx 3.14159234557$
En un sentido estricto el valor de π es construido a través del concepto matemático de límite, el cual es tratado en el curso de Cálculo Diferencial.

13.3 SECCIONES CÓNICAS

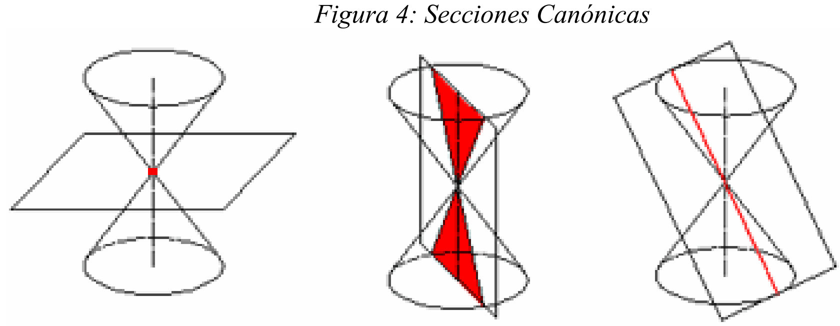
13.3.1 INTRODUCCIÓN

Toda sección cónica (o simplemente cónica) puede ser descrita como la intersección de un plano y un cono de dos hojas. En la Figura 1 se observa que las cuatro cónicas básicas el plano de intersección no pasa por el vértice del cono. Cuando el plano pasa por el vértice, la figura que resulta es una cónica degenerada, como se muestra en la Figura 2.



a) Circunferencia b) Elipse c) Parábola d) Hipérbola

Figura 4: Secciones Canónicas



a) Punto b) Dos Rectas c) Recta

Figura 5: Cónicas Degeneradas

En el capitulo anterior se vio ya la Circunferencia, en éste capítulo el estudio se centrará en la Elipse, la Parábola y la Hipérbola.

13.3.2 ECUACIONES GENERALES DE LAS CÓNICAS.

La ecuación general de segundo con dos variables en la forma: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$ corresponde a una cónica.

- Si carece del término Bxy y $A \equiv C$, representa una circunferencia y adopta la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$

- Si carece del término Bxy y tiene uno solo de los cuadráticos, representa una parábola vertical u horizontal y la ecuación adopta las formas:
  $y^2+Dx+Ey+F = 0$ parábola horizontal
  $x^2+Dx+Ey+F = 0$ parábola vertical

- Si carece del término Bxy y A y C tienen signos iguales, representa una elipse y la ecuación adopta la forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$

- Si carece del término Bxy y A y C tienen signos diferentes, representa una hipérbola y la ecuación adopta la forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$

Dada la ecuación general de las cónicas, se puede identificar a que sección cónica pertenece usando el discriminante o también llamado indicador, que es:

Si $B^2 - 4AC < 0$ es una elipse.
Si $B^2 - 4AC = 0$ es una parábola.
Si $B^2 - 4AC > 0$ es una hipérbola.

Ejemplo número 3: identificar la cónica descrita para la ecuación $x^2 + 10y^2 – 4x – 20y + 4 = 0$
Primero se identifican los valores para A, B y C:
$A = 1$, $B = 0$ y $C = 10$
Luego se realiza la operación:
$(0)^2 – 4(1)(10) = - 40$
Y se concluye:
Dado que el resultado es negativo, la ecuación representa una elipse.

Ejemplo número 4: identificar la cónica descrita para la ecuación $16x^2$ v $9y^2 – 144 = 0$
Identificando los valores para A, B y C:
$A = 16$, $B = 0$ y $C = - 9$
Se realiza la operación:
$(0)^2 – 4(16)(-9) = 576$
Conclusión:
Dado que el resultado es positivo, la ecuación representa una hipérbola.

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE
5. Identificar la cónica descrita para la ecuación dada.
a) $y^2 – 12x + 4y – 44 = 0$
b) $x^2 – 12x – 10y + 36 = 0$
c) $9x^2 – 4y^2 + 36x – 16y – 16 = 0$

13.3.3 LA ELIPSE

TEOREMA 1: ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA ELIPSE

La forma estándar o canónica de la ecuación de una elipse con centro (*h, k*) y longitudes de los ejes mayor y menor *2a* y *2b*, respectivamente, donde $a > b$, es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{El eje mayor es horizontal}$$

ó

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad \text{El eje mayor es vertical}$$

Los focos se encuentran en el eje mayor a *c* unidades del centro, con $c^2 = a^2 - b^2$.
El lado recto de la elipse es una línea perpendicular al eje focal que pasa por el foco. Su ecuación es:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

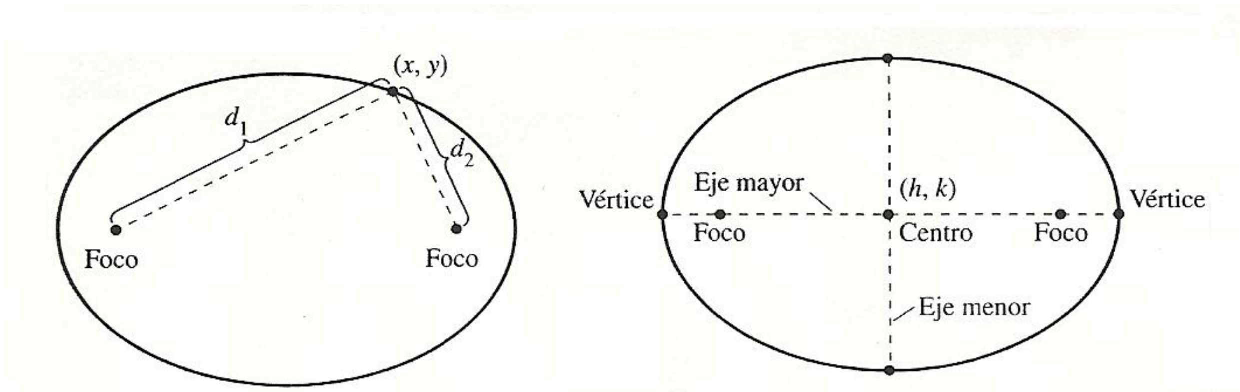


Figura 6: Elementos de una Elipse

Ejemplo número 5:

Determinar la ecuación general de la elipse con centro en el punto (2, -3), uno de sus focos es el punto (-1,-3) y su semieje menor es igual a 4
.

a) Determinar si el eje mayor es horizontal o vertical y ubicar los valores para h y k:

Dado que el centro y uno de los focos comparten la misma coordenada y (-3), entonces el eje mayor es vertical. Los valores para h y k son: h = 2 y k = -3.

b) Obtener los valores para a y b:

De acuerdo con el enunciado del problema, el semieje menor es 4, entonces b = 4.

Para obtener a es necesario primero saber cuántas unidades hay entre el centro y el foco (valor de c):
c = 2 – (-1) = 3

Del Teorema 1 sabemos que: $a = \sqrt{c^2 + b^2}$, por lo tanto $a = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$

c) Sustituir en la ecuación canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y+3)^2}{5^2} = 1$$

d) Obtener la ecuación general:

Desarrollando los binomios al cuadrado y realizando la suma de fracciones se llega a:

$$25x^2 - 16y^2 - 100x + 96y - 156 = 0$$

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

6. Resolver los siguientes problemas:

a) Dada la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ calcular las longitudes del eje mayor y eje menor; las coordenadas de los focos y la longitud del lado recto. Graficar el resultado.

b) Determinar y graficar la ecuación de la elipse cuyo centro se encuentra en el origen, uno de sus focos es el punto (0,3) y su semieje mayor es igual a 5.

c) Empleando la ecuación general, obtener los elementos para la elipse representada por la siguiente ecuación: $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$. Graficar el resultado.

13.3.4 LA PARÁBOLA

TEOREMA 2: ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA PARÁBOLA

La forma estándar o canónica de una parábola con vértice (h, k) y directriz $y = k - p$ es:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \qquad \text{(Eje vertical)}$$

Para la directriz $x = h - p$, la ecuación es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \qquad \text{(Eje horizontal)}$$

El foco se encuentra en el eje a p unidades (distancia dirigida) del vértice. Las coordenadas del foco son las siguientes:

$(h, k+p)$ (Eje vertical)
$(h+p, k)$ (Eje horizontal)

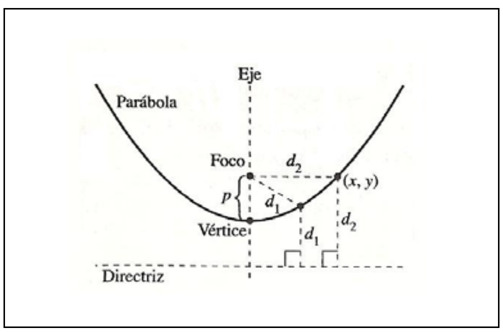


Figura 7: Elementos de la Parábola

Ejemplo número 6:
Encontrar la ecuación general para una parábola cuyo vértice esta en el origen, su eje focal coincide con el eje y, y contiene al punto (4, -2).

a) Determinar si el eje es vertical u horizontal y ubicar los valores de h y k:

Como el eje focal coincide con el eje y, entonces la parábola tiene eje vertical. Dado que el vértice esta en el origen, las coordenadas de h y k son: h = 0, k = 0.

b) Encontrar el valor de p utilizando las coordenadas del vértice y las del punto dado (4,-2):

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
$(4 - 0)^2 = 4p(-2 - 0)$
$(4)^2 = 4p(-2)$
$16 = -8p$
$p = -2$

c) Sustituir en la ecuación canónica las coordenadas de vértice y el valor de p para encontrar la ecuación general:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
$(x - 0)^2 = 4(-2)(y - 0)$
$x^2 = - 8y$
$x^2 + 8y = 0$

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

7. Resolver los siguientes problemas:
 a) Determinar la ecuación de la parábola con vértice en (3,4) y foco (3,2) y representarla gráficamente.

 b) Representar gráficamente la siguiente ecuación: $y = \frac{1}{4} x^2 - x + 1 \frac{1}{4}$

 c) Expresar la siguiente ecuación en forma canónica, determinar las coordenadas de foco y el vértice, y construir la grafica: $y^2 + 12x - 6y + 45 = 0$

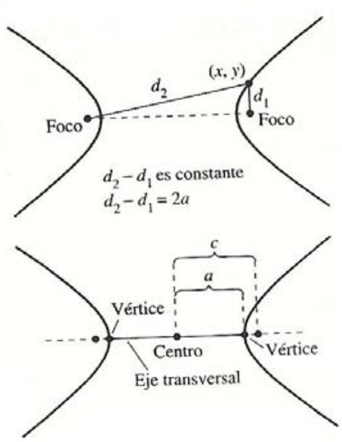
13.3.5 LA HIPÉRBOLA

TEOREMA 3: ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA HIPÉRBOLA
La forma estándar o canónica de una hipérbola con centro (*h, k*) es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ El eje transversal es horizontal

ó

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$ El eje transversal es vertical



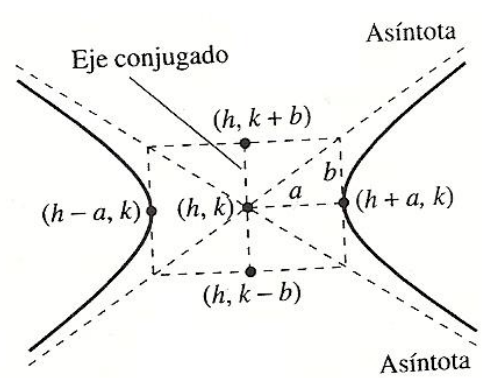


Figura 8: Elementos de la Hipérbola

Los focos se encuentran en el eje mayor a *c* unidades del centro, con $c^2 = a^2 + b^2$.

TEOREMA 4: ASÍNTOTAS DE UNA HIPÉRBOLA

Si el eje transversal es horizontal, las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = k + \frac{b}{a}(x - h) \qquad \text{y} \qquad y = k - \frac{b}{a}(x - h)$$

Si el eje transversal es vertical, las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = k + \frac{a}{b}(x - h) \qquad \text{y} \qquad y = k - \frac{a}{b}(x - h)$$

Ejemplo número 7:

La ecuación general de una hipérbola es $7y^2 - 9x^2 = 63$. Determinar las coordenadas de los focos, de los vértices y las ecuaciones de las asíntotas.

a) Buscar la forma canónica dividiendo los elementos de ambos lados de la ecuación entre 63:

$$\frac{7y^2}{63} - \frac{9x^2}{63} = \frac{63}{63}$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$$

b) Por el Teorema 3, se puede observar que el eje transversal es vertical, por lo que el eje focal coincide con el eje y. Los valores de a = 3 y b = $\sqrt{7}$, por lo que $c = \sqrt{9+7} = 4$. Con estos datos se tienen las coordenadas de los focos: F (0, 4) y F' (0, -4) y de los vértices: V (0,3) y V' (0,-3).

c) Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \frac{3}{\sqrt{7}}x \quad e \quad y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x$$

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

8. Resolver los siguientes problemas:

a) Determinar la ecuación y la grafica de la hipérbola con centro en el origen, eje focal en el eje y, y que contiene los puntos A (4,6) y B (1,-3).

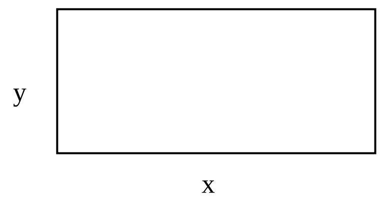
b) Determinar la ecuación y la grafica de la hipérbola con centro en C (-4,1) un vértice en V (2,1) y semieje conjugado igual a 4,

c) Determinar la ecuación de la hipérbola en su forma canónica si la ecuación general es:
$x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$.

CAPÍTULO 14
PERÍMETRO, ÁREA Y VOLUMEN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

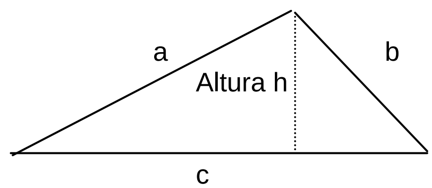
En ésta unidad nos abocaremos particularmente a recapitular los modelos matemáticos de figuras geométricas elementales, en cuanto a su perímetro, área y/o volumen.

1.El rectángulo



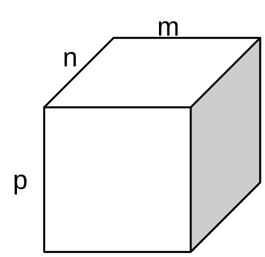
Perímetro $P = 2x + 2y$ Área: $A = xy$ (recuerde: base por altura)

2.El triángulo



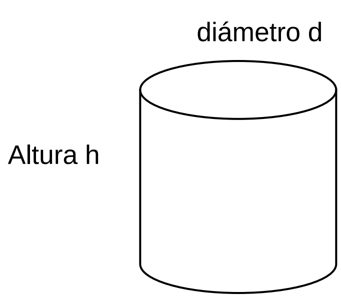
Perímetro $P = a + b + c$ Área: $A = \frac{1}{2}ch$ (base por altura perpendicular a la base por ½)

3.El paralelepípedo



Superficie $S = 2mn + 2pn + 2mp$ Volumen $V = mnp$

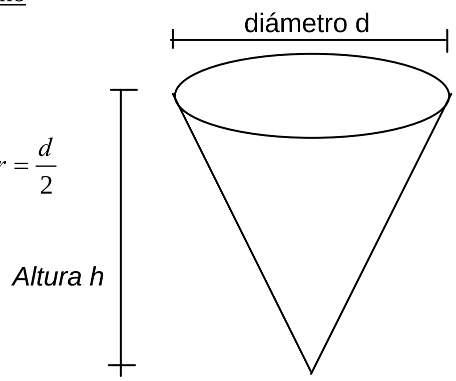
4.El cilindro



$r = \frac{d}{2}$

Superficie $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ Volumen $V = \pi r^2 h$

5.<u>El cono</u>

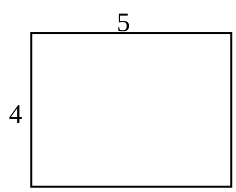


radio $r = \frac{d}{2}$

Superficie $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ *Volumen* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

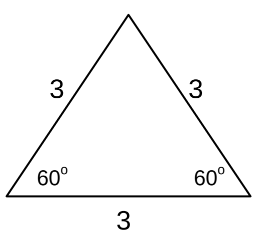
ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1.Determine el perímetro y el área de un rectángulo que tiene por lados x = 5 y y = 4 (vea figura anexa).



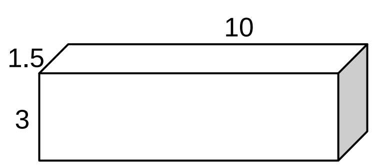
Nota: las acotaciones están en metros.

2.Determine el perímetro y el área de un triángulo cuyas medidas se muestran en la siguiente figura.

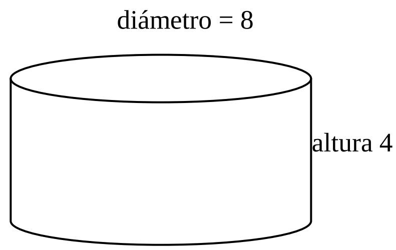


60°

3.Determine el área y volumen del siguiente paralelepípedo.



4.Determine la superficie y volumen del cilindro siguiente.



5.Determine la superficie y el volumen de un cono cuyo diámetro es 2 y altura 4.