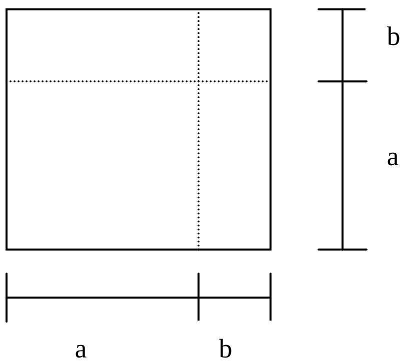
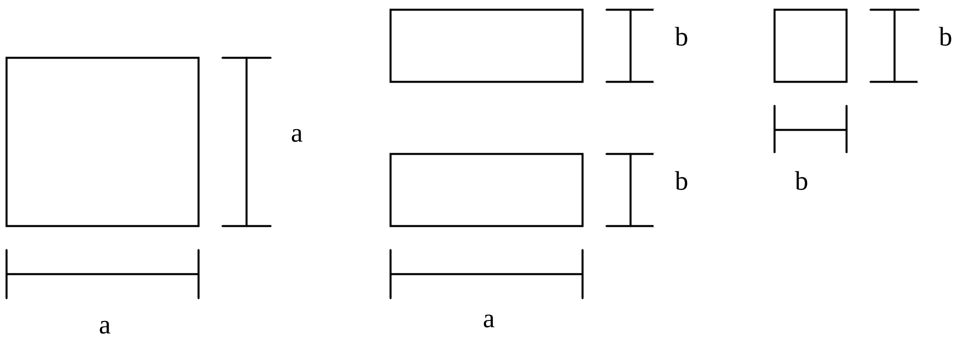
APÉNDICE A

INTERPRETACIONES GEOMÉTRICAS DE ALGUNOS PRODUCTOS NOTABLES

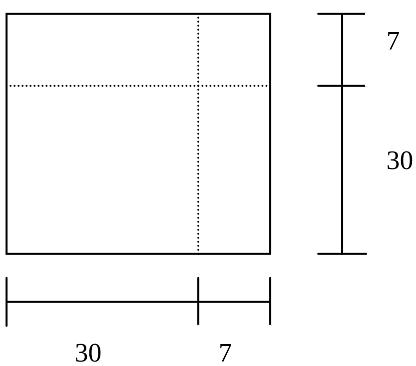
Un binomio al cuadrado de la forma $(a+b)^2$, donde a, b $\in \Re$, puede interpretarse de manera geométrica con la siguiente figura:



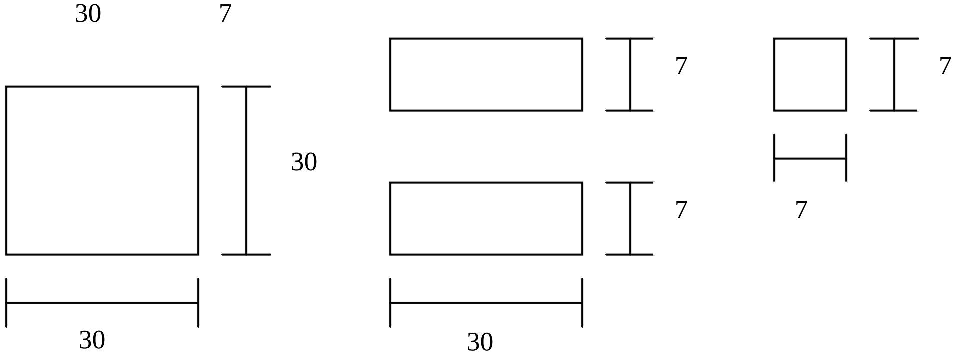
La figura es subdividida en 4 secciones, de tal manera que para encontrar el área correspondiente a $(a+b)^2$ basta sumar las áreas de las cuatro secciones, tales áreas son: $a^2 + ab + ab + b^2$, simplificando tenemos que: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Este binomio elevado al cuadrado recibe el nombre general de producto notable.



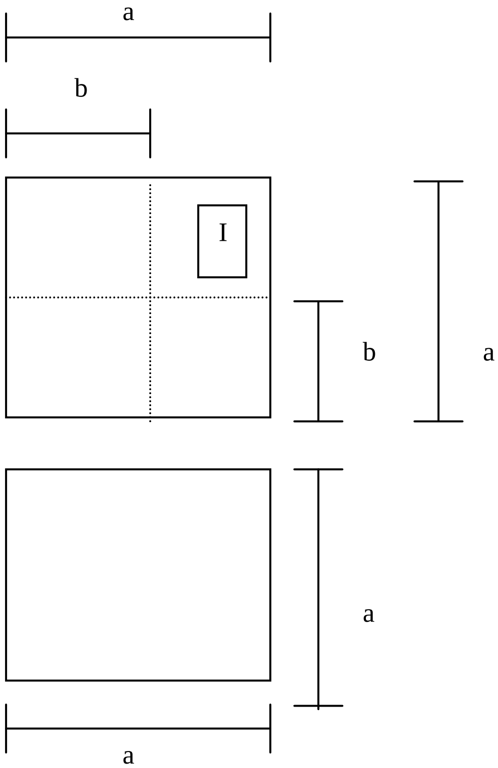
En un caso numérico, digamos $37*37=(30+7)^2$, también es factible la percepción geométrica, quedando de la siguiente forma:



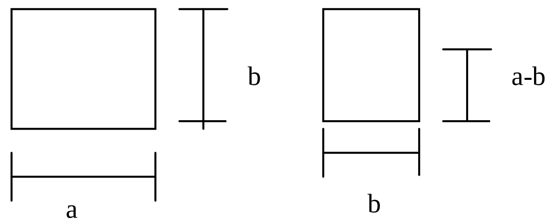
De igual manera la figura es subdividida en 4 secciones, de tal forma que para encontrar el resultado correspondiente a $37*37= (30+7)^2$ basta sumar las áreas de las cuatro secciones, tales áreas son: $30^2 + 30*7 + 30*7 + 7^2$, simplificando tenemos que: $(30+7)^2 = 30^2 + 2(30)(7) + 7^2 = 900+420+49 = 1369$



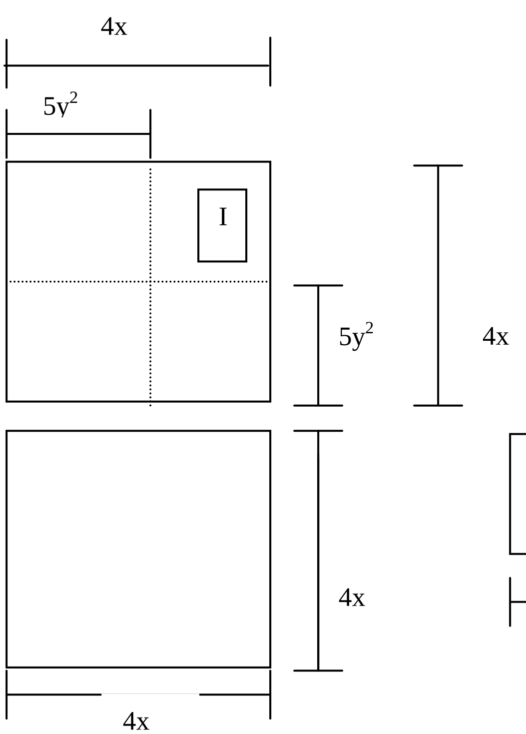
Un binomio al cuadrado de la forma $(a-b)^2$, donde $a, b \in \Re$, puede interpretarse de manera geométrica con la siguiente figura:



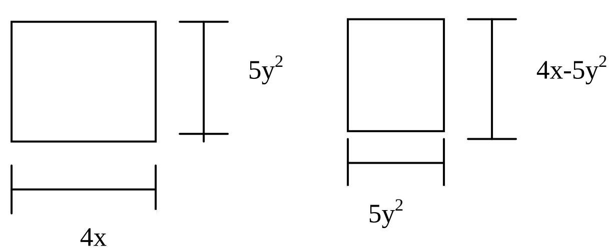
> Si asociamos el cálculo de $(a-b)^2$ con la figura adjunta, lo que se busca es el área de la sección denominada como I, esta puede calcularse mediante la diferencia del área total y las secciones restantes. Es decir $a^2 - ab - b(a-b)$
> $(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$, simplificando obtenemos que:
> $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
> Este binomio elevado al cuadrado recibe el nombre también de producto notable.



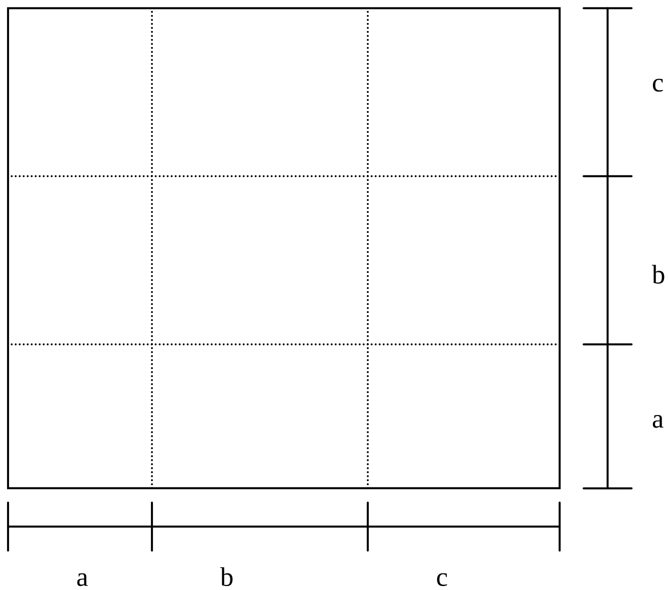
Ahora consideremos el binomio $(4x-5y^2)^2$ para asociarlo con la figura geométrica y desarrollarlo con la misma metodología.



> Nuevamente asociamos el cálculo de $(4x-5y^2)^2$ con la figura adjunta, lo que se busca también es el área de la sección denominada como I, esta puede calcularse mediante la diferencia del área total y las secciones restantes. Es decir $(4x)^2 - (4x)(5y^2) - (5y^2)(4x-5y^2)$ simplificando obtenemos que:
> $(4x-5y^2)^2 = 16x^2 - 40xy^2 + 25y^4$

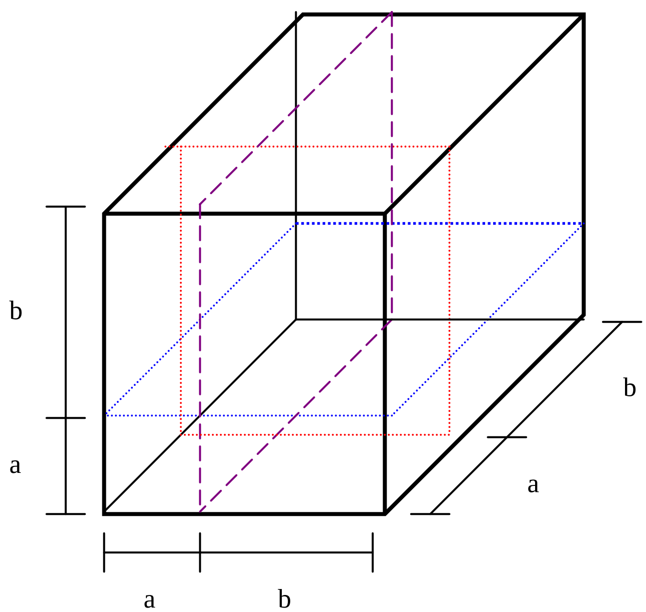


Un trinomio de la forma $(a + b + c)^2$ también puede asociarse a una figura geométrica, aquí a, b y c $\in \Re$. La figura y el desarrollo quedaría de la siguiente manera.

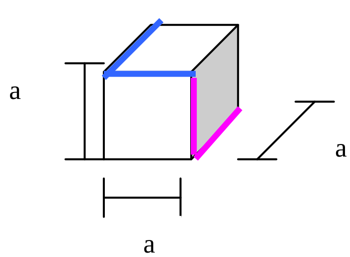


Para determinar $(a + b + c)^2$ podemos calcular el área de las nueve secciones y sumarlas. Puede observarse que tres de ellas (en la diagonal) son a^2, b^2 y c^2. El resto de las figuras tiene áreas igual a: 2ab, 2ac y 2bc. Por lo que:
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Un binomio al cubo puede tener un tratamiento similar a los anteriores, descomponiéndolo en paralelepípedos con volumen conocido. Al respecto se propone la siguiente figura.

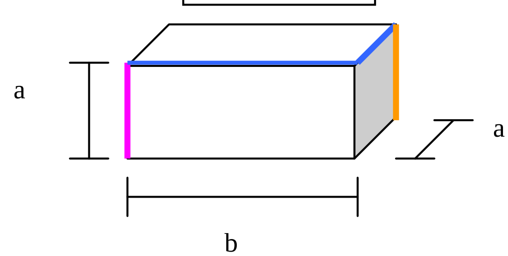


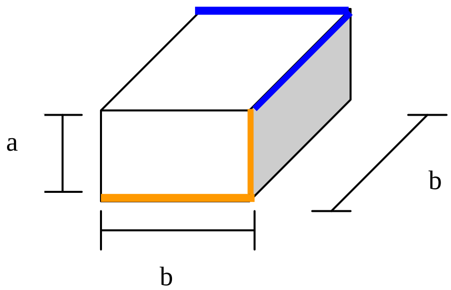
Si descomponemos en los 8 paralelepípedos obtenemos:
$V = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
De tal manera que:
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Este binomio elevado al cubo recibe el nombre de producto notable.



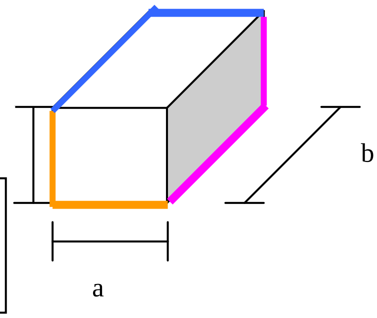
El volumen de la figura es a^3

El volumen de la figura es ba^2

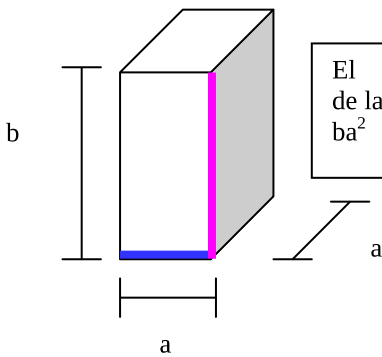




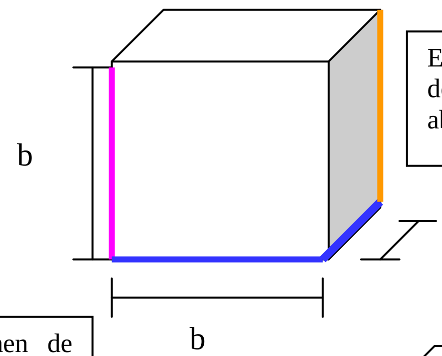
El volumen de la figura es ab^2



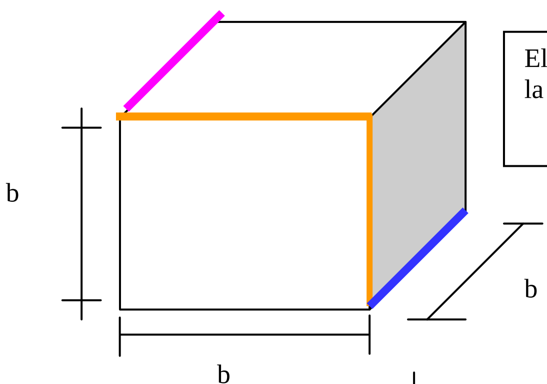
El volumen de la figura es ba^2



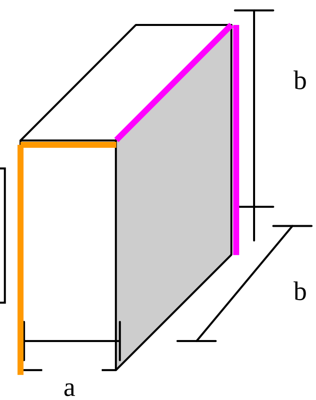
El volumen de la figura es ba^2



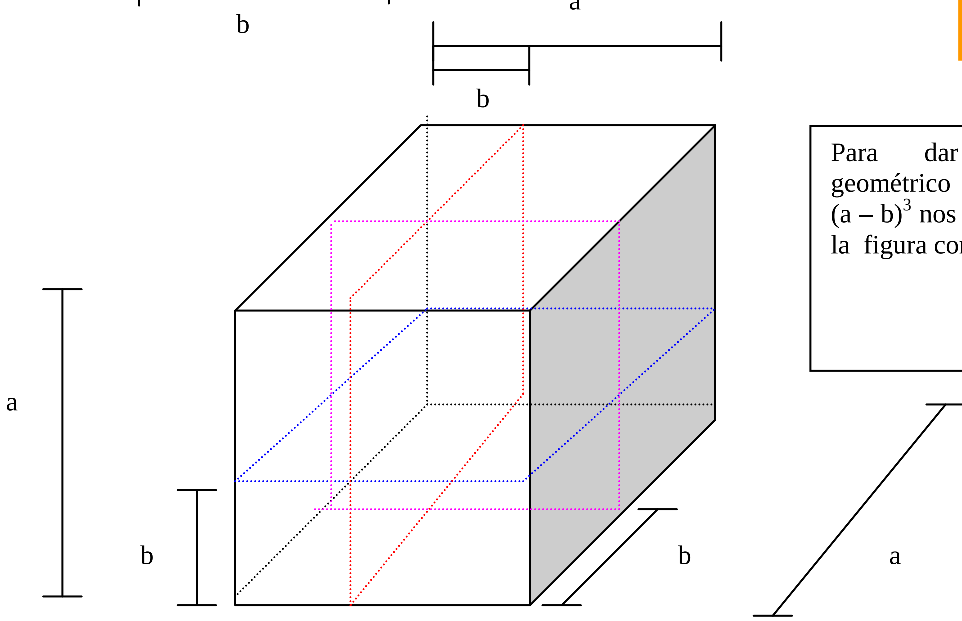
El volumen de la figura es ab^2



El volumen de la figura es b^3

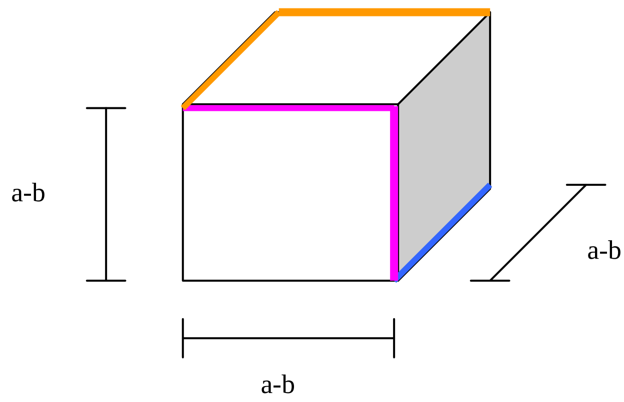


El volumen de la figura es ab^2

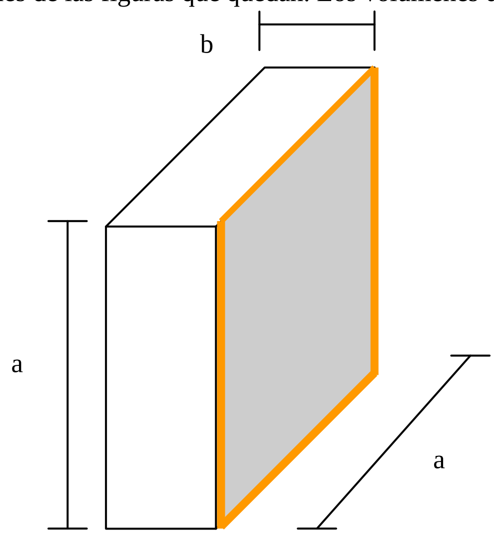


Para dar tratamiento geométrico al binomio $(a - b)^3$ nos apoyaremos de la figura contigua.

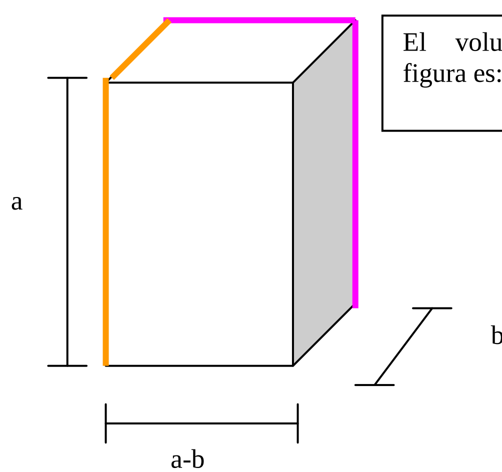
El binomio $(a-b)^3$ extraído del cubo anterior es.



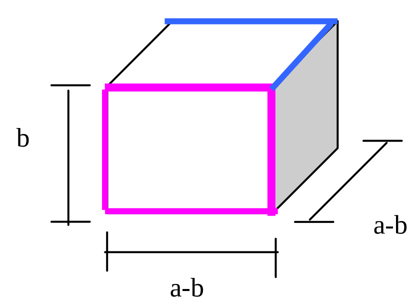
El volumen de este, puede calcularse por la diferencia entre dos cubos, es decir $(a-b)^3 = a^3 -$ resto de volúmenes de las figuras que quedan. Los volúmenes de las figuras que quedan son los siguientes:



El volumen de la figura es: a^2b



El volumen de la figura es: $ba(a-b)$

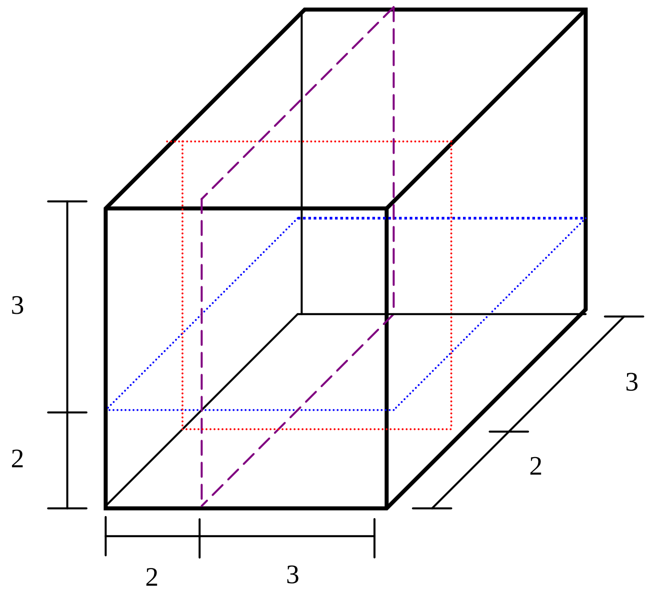


El volumen de la figura es: $(a-b)^2b$

Podemos decir entonces que:

$(a-b)^3 = a^3 - [\, a^2b + ab(a-b) + b(a-b)^2 \,]$ luego tenemos que:
$(a-b)^3 = a^3 - [\, a^2b + a^2b - ab^2 + b(a^2 - 2ab + b^2) \,]$ simplificando llegamos a:
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

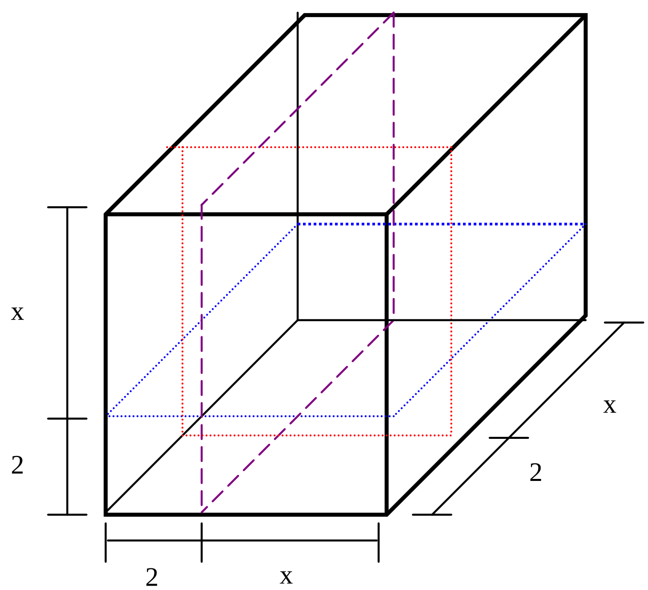
ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE.



1.El paralelepípedo que se muestra a continuación tiene las medidas indicadas. Determine el volumen de cada uno de los 8 paralelepípedos.

Hay volúmenes de paralelepípedos iguales?
¿Cuántos?
¿Cuánto es la suma de los 8 paralelepípedos?

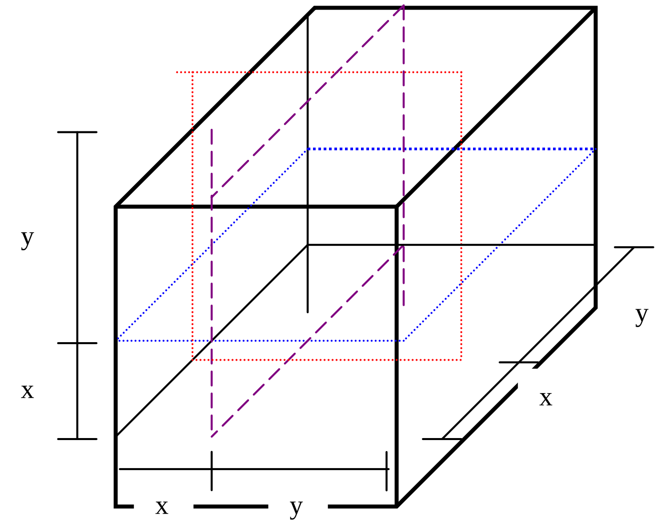
Si calculamos el volumen como:
$$(2+3)^3 = (2+3)(2+3)(2+3)$$
¿resulta igual al que obtuviste sumando los paralelepípedos?



2.El paralelepípedo que se muestra a continuación tiene las medidas indicadas (x>2). Determine el volumen de cada uno de los 8 paralelepípedos.

Hay volúmenes de paralelepípedos iguales?
¿Cuántos?
¿Cuánto es la suma de los 8 paralelepípedos?

Calculemos el volumen como:
$$(2+x)^3 = (2+x)(2+x)(2+x)$$
Compárelo con el resultado correspondiente a la suma de los 8 paralelepípedos.



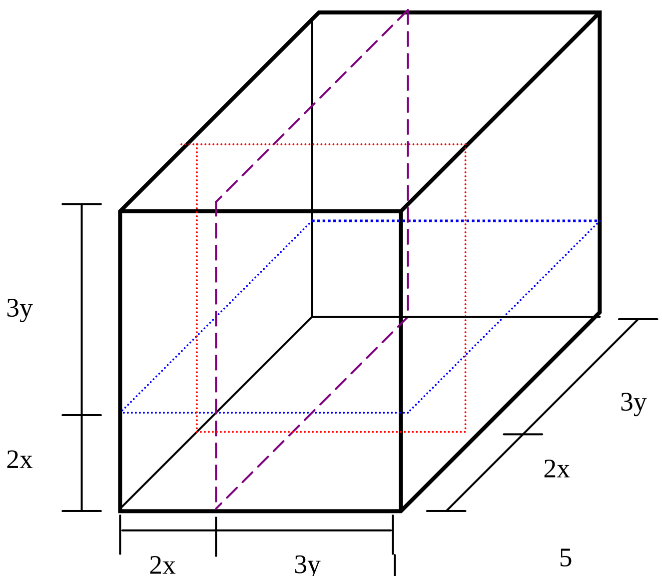
3.El paralelepípedo que se muestra a continuación tiene las medidas indicadas ($y>x>0$). Determine el volumen de cada uno de los 8 paralelepípedos.

¿Hay volúmenes de paralelepípedos iguales?
-En caso de haber- ¿Cuántos?
¿Cuánto es la suma de los 8 paralelepípedos?

Si calculamos el volumen como:

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$$

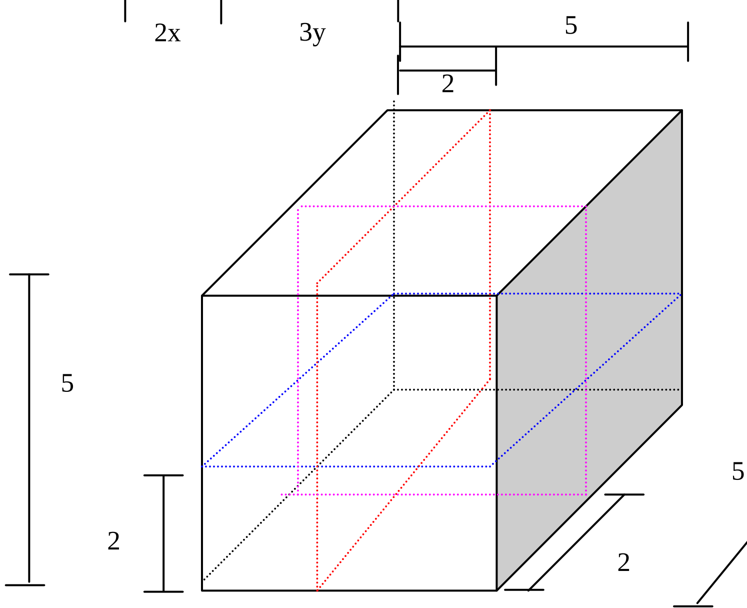
¿resulta igual al que obtuviste sumando los paralelepípedos?



4.El paralelepípedo que se muestra a continuación tiene las medidas indicadas ($y>x>0$). Determine el volumen de cada uno de los 8 paralelepípedos.

¿Hay volúmenes de paralelepípedos iguales?
-En caso de haber- ¿Cuántos?
¿Cuánto es la suma de los 8 paralelepípedos?

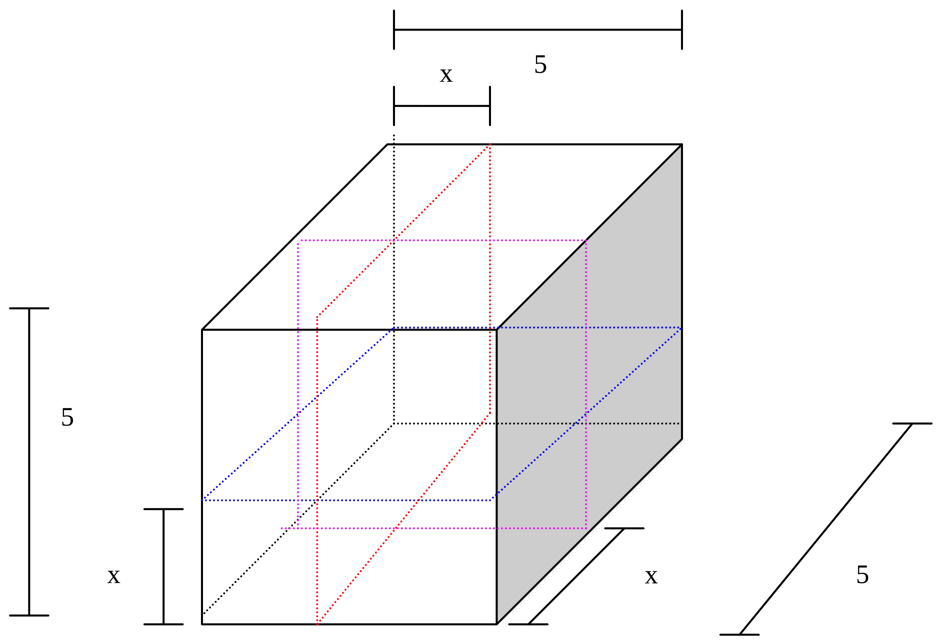
Si calculamos el volumen como: $(2x+3y)^3 = (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$ ¿resulta igual al que obtuviste sumando los paralelepípedos?
Determine $(7x+5y)^3$



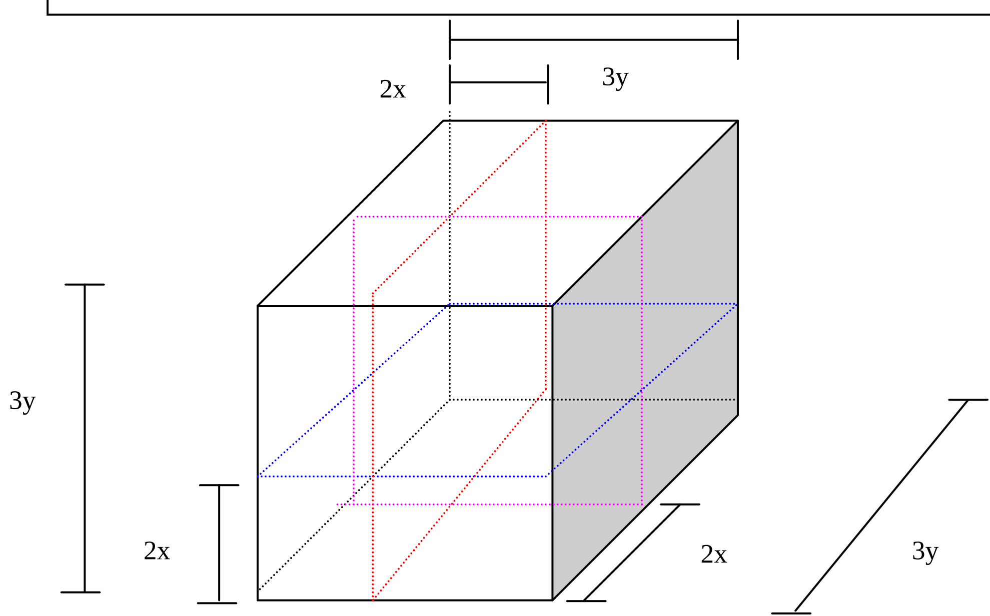
5.El paralelepípedo que se muestra a continuación tiene las medidas indicadas seccionado con tres planos perpendiculares. Nuestro interés versa sobre el paralelepípedo $(5-2)^3$. Ubíquelo en la figura y calcule su volumen por diferencia entre el volumen total y los 7 paralelepípedos restantes.

Compare el resultado que obtuvo con el resultado de la siguiente operación: (Primero desarrollando el producto y luego a través del producto previo cálculo dentro de cada paréntesis).
$(5-2)^3 = (5-2)(5-2)(5-2)$

6.El paralelepípedo que se muestra a continuación tiene las medidas indicadas ($5 > x > 0$). Seccionado con tres planos perpendiculares. –Se generan 8 paralelepípedos- Nuestro interés versa sobre el paralelepípedo $(5-x)^3$. Ubíquelo en la figura y calcule su volumen por diferencia entre el volumen total y los 7 paralelepípedos restantes.
Compare el resultado que obtuvo con el resultado de la siguiente operación: (desarrollando el producto).
$(5-x)^3 = (5-x)(5-x)(5-x)$



7.El paralelepípedo que se muestra a continuación tiene las medidas indicadas (y>x>0). Seccionado con tres planos perpendiculares. –Se generan 8 paralelepípedos- Nuestro interés versa sobre el paralelepípedo $(3y-2x)^3$ .. Ubíquelo en la figura y calcule su volumen por diferencia entre el volumen total y los 7 paralelepípedos restantes.
Compare el resultado que obtuvo con el resultado de la siguiente operación: (desarrollando el producto).
$(3y-2x)^3 = (3y-2x)(3y-2x)(3y-2x)$. Calcule $(4x-2y)^3$

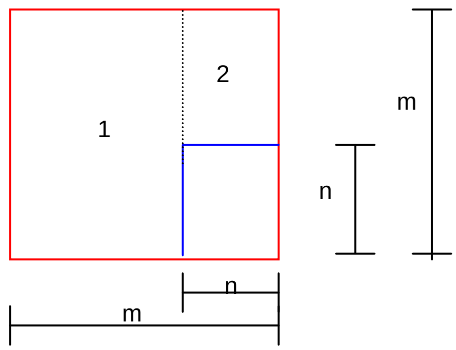


APÉNDICE B

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE ALGUNOS TIPOS DE FACTORIZACIÓN

La diferencia de cuadrados.

La factorización de la diferencia de cuadrados $m^2 - n^2$, (donde m y n pertenecen al conjunto de los números reales), se basa en la observancia de que los factores resultantes son, respectivamente, la diferencia y la suma de los dos números.



La expresión algebraica $m^2 - n^2$ puede ser referida a la figura de la izquierda, y la operación indicada gráficamente consiste en calcular la suma de las áreas de las figuras numeradas como 1 y 2, pues son éstas las figuras restantes producto de la diferencia de los cuadrados ($m^2 - n^2$). Por lo tanto tenemos que: $m^2 - n^2 = m(m-n) + n(m-n)$

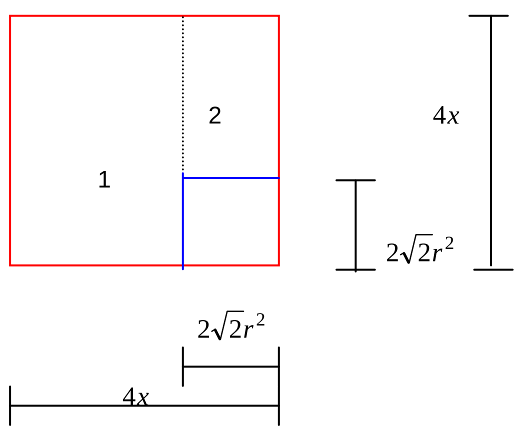
Factorizando mediante término común nos queda: $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$

Aquí m y n pueden tomar valores numéricos o monomios o multinomios.

Nota: En todos los casos se asume que las variables utilizadas representan números reales.

Ejemplo número 1: Factoricemos el binomio $16x^2 - 8r^4$

Geométricamente podemos representarlo así.



Sabemos que tal diferencia de cuadrados da como resultado la suma de las figuras 1 y 2.

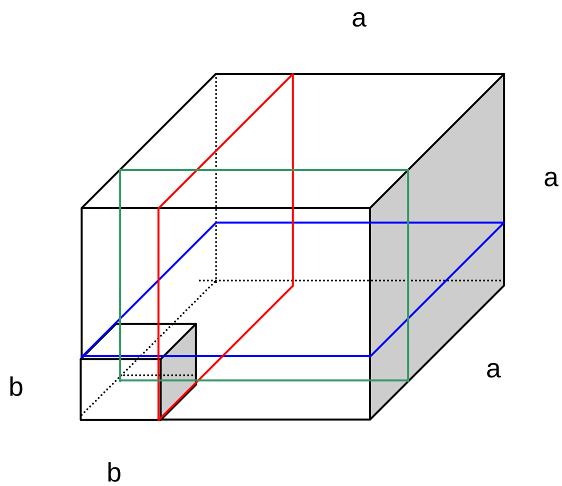
El área de la figura 1 es: $(4x - 2\sqrt{2}r^2)(4x)$.

Mientras que el área de la figura 2 es: $(4x - 2\sqrt{2}r^2)(2\sqrt{2}r^2)$.

Factorizamos el término común que es: $(4x - 2\sqrt{2}r^2)$ por lo que finalmente nos queda:

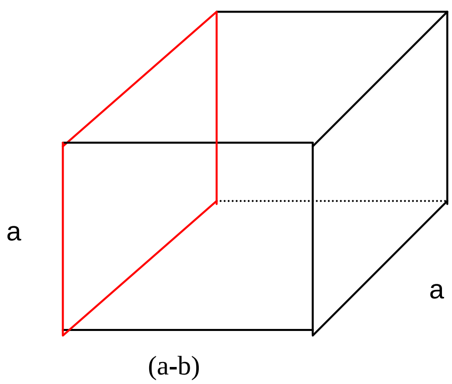
$$16x^2 - 8r^4 = (4x - 2\sqrt{2}r^2)(4x + 2\sqrt{2}r^2)$$

La diferencia de cubos.

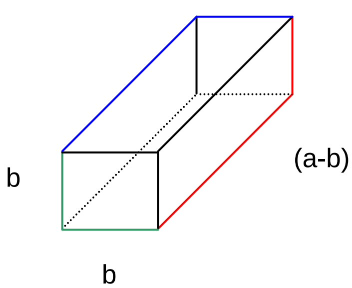


La diferencia de cubos puede tener un tratamiento similar al anterior, consideremos el volumen del cubo mayor como a^3, el volumen del cubo menor como b^3, así que la diferencia de cubos, es:

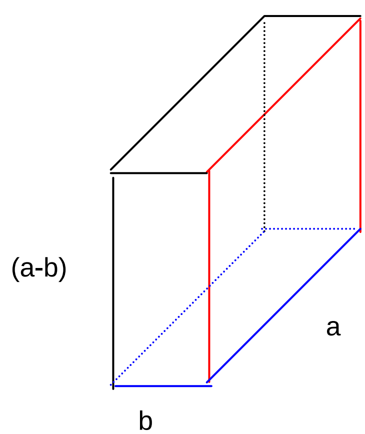
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab).$$



El volumen de esta sección es: $(a-b)a^2$

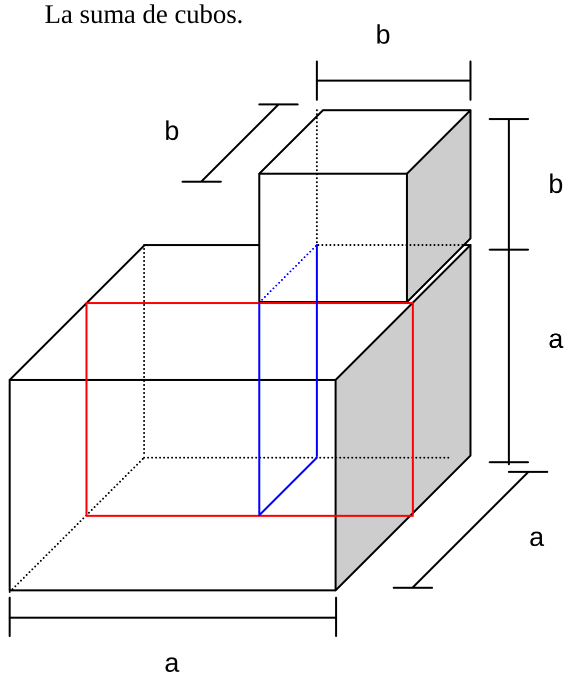


El volumen de esta sección es: $(a-b)b^2$



El volumen de esta sección es: $(a-b)ab$

La suma de cubos.



Si nos referimos a la suma de cubos como a^3 (el volumen de la figura mayor) y b^3 (el volumen de la figura menor) entonces este es:

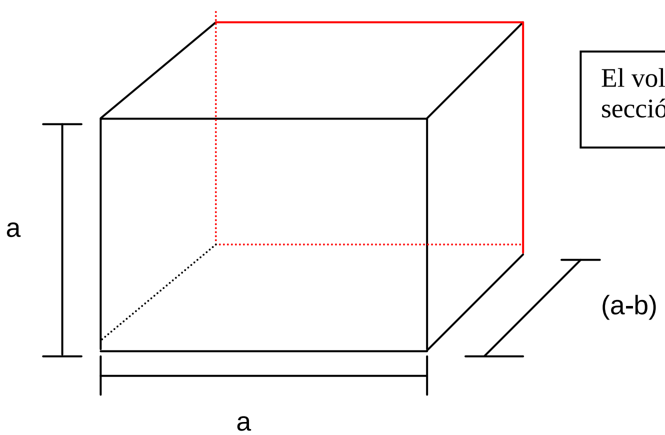
$$(a-b)ab + (a-b)a^2 + (a+b)b^2$$

Factorizando (a-b)a, obtenemos que:

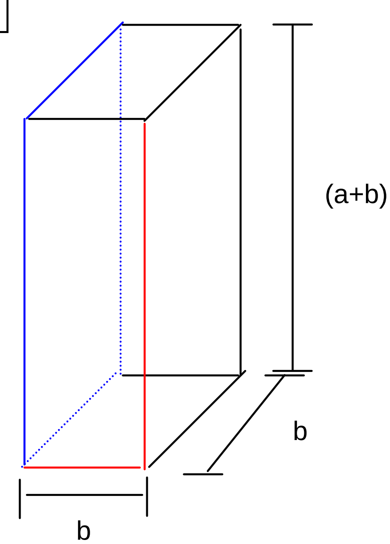
$$V(\text{volumen}) = (a-b)a(a+b) + (a+b)b^2$$

Ahora factorizamos (a+b) y nos queda:

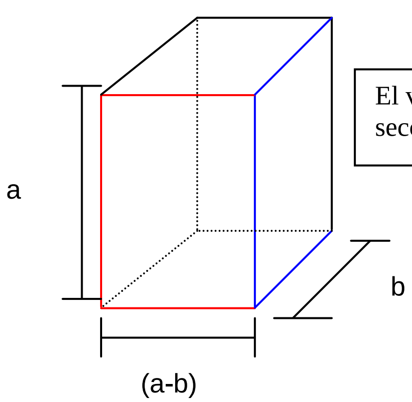
$$V= (a+b)(a^2-ab+b^2).$$



El volumen de esta sección es: $(a-b)a^2$



El volumen de esta sección es: $(a+b)b^2$

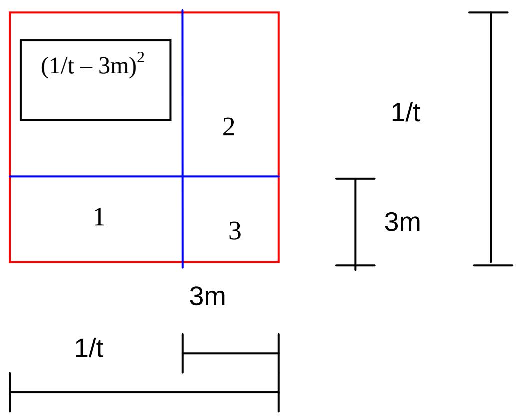


El volumen de esta sección es: (a-b)ab

Trinomio cuadrado perfecto

Ejemplo número 2: Factoricemos $\frac{1}{t^2} - \frac{6m}{t} + 9m^2$

Para realizar esta factorización incorporemos el contexto geométrico, de cualquier forma las raíces correspondientes son $\frac{1}{t}$ y $3m$ obteniendo que $\frac{1}{t^2} - \frac{6m}{t} + 9m^2 = \left(\frac{1}{t} - 3m\right)^2$



El área buscada esta marcada precisamente como $(1/t - 3m)^2$ así que tal área la calcularemos por la diferencia del cuadrado mayor, es decir $(1/t)^2$ menos la suma de los restantes (designados como 1, 2 y 3), el área 1 es: (1/t-3m)(3m). El área 2 es (1/t-3m)(3m), es decir, el área 2 es igual al área 1. Finalmente el área 3 es: $9m^2$.

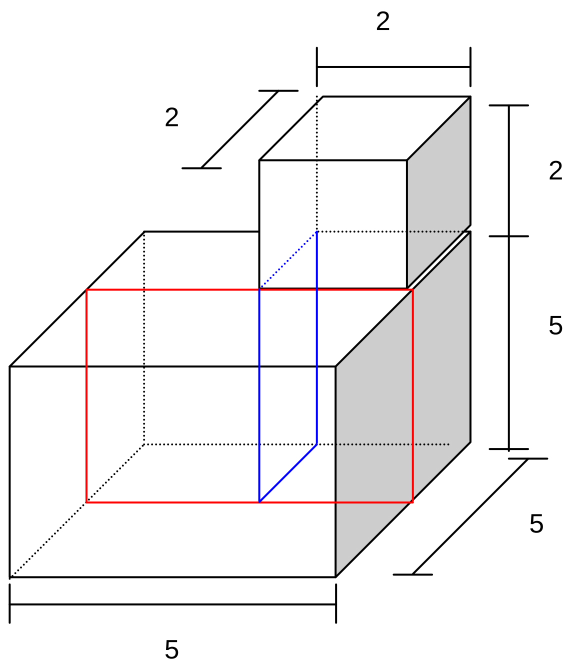
Luego podemos decir que:
$(1/t - 3m)^2 = (1/t)^2 - [2(1/t-3m)(3m) + 9m^2]$.

Concluyendo:
$$(1/t - 3m)^2 = (1/t)^2 - 6m/t + 9m^2$$

Nota: En esta factorización es muy conveniente hacer la comprobación correspondiente.

Estas diferentes representaciones nos ayudan un tanto a entender el significado de los términos que conforman los factores en un proceso de factorización. En el sentido, de que en vez de recurrir a la memoria como almacén de información, particularmente de fórmulas para factorizar, podemos recurrir a la memoria como ejecutor de operaciones con significado implícito. Una vez comprendido los procedimientos, el significado de los términos o el posible significado de los términos, así como la facultad de asociación con representaciones geométricas nos permite tener otras herramientas tales que posibiliten el mejoramiento de nuestras competencias algebraicas.

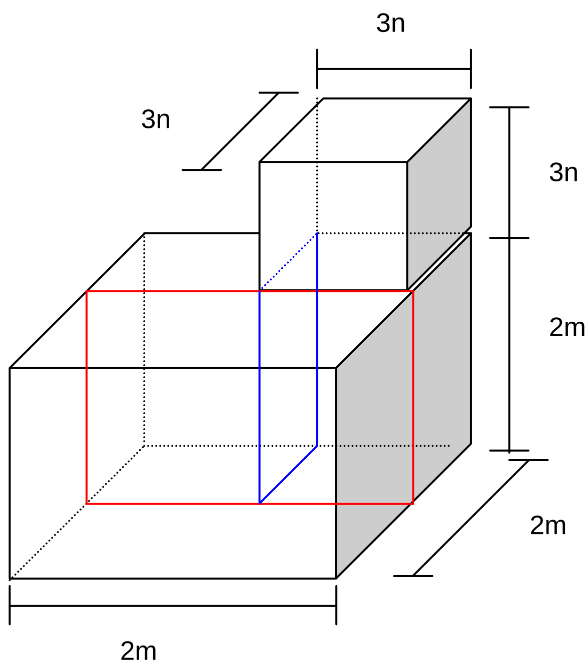
ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE



1.Tenemos dos cubos cuyas medidas son las que se indican, nuestro interés versa sobre la determinación de la suma de ambos cubos. Iniciaremos considerando como uno solo el paralelepípedo de altura (5+2). De tal manera que su volumen es:

Y la de los otros dos:

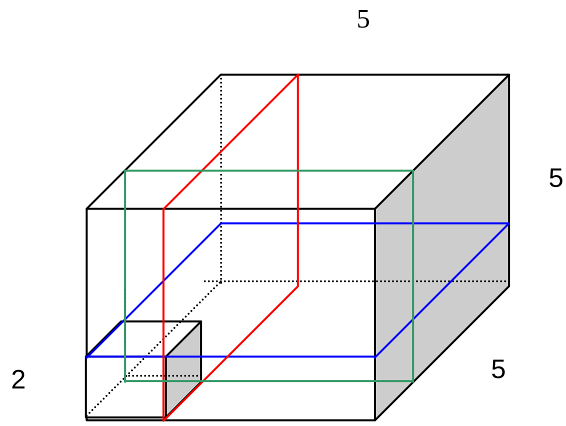
Tenemos que la suma 5^3+2^3 es igual a:



2.Tenemos dos cubos cuyas medidas son las que se indican, nuestro interés versa sobre la determinación de la suma de ambos cubos. Iniciaremos considerando como uno solo el paralelepípedo de altura (2m+3n). De tal manera que su volumen es:

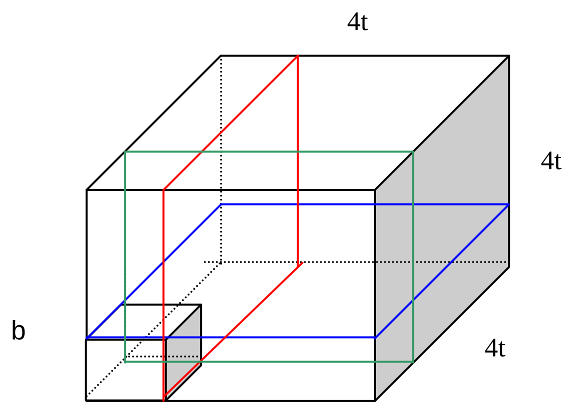
Y la de los otros dos:

Tenemos entonces que la suma $(2m)^3+(3n)^3$ es decir $8m^3 + 27n^3$ es igual a:



3.El esquema que se presenta tiene dos cubos cuyas medidas se indican. Al cubo con medida de lado 5 le restaremos el de medida 2. Es decir $5^3 - 2^3$. Determine el resultado a través de la suma de los paralelepípedos restantes.

Compruebe el resultado realizando la diferencia directamente.



4.El esquema que se presenta tiene dos cubos cuyas medidas se indican. Al cubo con medida de lado 4t le restaremos el de medida b. Es decir $64t^3 - b^3$.

Determine el resultado a través de la suma de los paralelepípedos restantes.

APÉNDICE C
Valores a Utilizar para Funciones Trigonométricas

θ			Sen θ	Cos θ	Tan θ
Grados	**Radianes**				
0	0	0	0	1	0
30	0.523599	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45	0.785398	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60	1.047198	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90	1.570796	$\pi/2$	1	0	No existe
120	2.094395	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
135	2.356194	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150	2.617994	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$
180	3.141593	π	0	-1	0
210	3.665191	$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
225	3.926991	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
240	4.188790	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$
270	4.712389	$3\pi/2$	-1	0	No existe
300	5.235988	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$
315	5.497787	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
330	5.759587	$11\pi/6$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$
360	6.283185	2π	0	1	0
	En decimal	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$	$\sqrt{3} = 1.7321$

θ			Cot θ	Sec θ	Csc θ
Grados	**Radianes**				
0	0	0	No existe	1	No existe
30	0.523599	$\pi/6$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2
45	0.785398	$\pi/4$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60	1.047198	$\pi/3$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$
90	1.570796	$\pi/2$	0	No existe	1
120	2.094395	$2\pi/3$	$-1/\sqrt{3}$	-2	$2/\sqrt{3}$
135	2.356194	$3\pi/4$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150	2.617994	$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	2
180	3.141593	π	No existe	-1	No existe
210	3.665191	$7\pi/6$	$\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	-2
225	3.926991	$5\pi/4$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240	4.188790	$4\pi/3$	$1/\sqrt{3}$	-2	$-2/\sqrt{3}$
270	4.712389	$3\pi/2$	0	No existe	-1
300	5.235988	$5\pi/3$	$-1/\sqrt{3}$	2	$-2/\sqrt{3}$
315	5.497787	$7\pi/4$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330	5.759587	$11\pi/6$	$-\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	-2
360	6.283185	2π	No existe	1	No existe
	En decimal	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.5774$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.1547$	$\sqrt{2} = 1.4142$

BIBLIOGRAFÍA

Larson / Hostetler / Edwards, Cálculo. Volumen 1, Quinta edición. Editorial Mc Graw Hill. 1995.

Dennis G. Zill / Jacqueline M. Dewar. Álgebra y Trigonometría. Segunda Edición. Editorial Mc Graw Hill. 1993.

García Velázquez Á. / Amado Moreno G. Curso propedéutico de matemáticas. Tópicos de álgebra. Mexicali, Baja California. Julio de 1997.

Earl W. Swokowski. Cálculo con geometría analítica. Grupo Editorial Iberoamérica. 1982.

Moreno M. A / Núñez J. / Miembros del Programa Nacional de Formalización y Actualización de Profesores de Matemáticas. Nodo Regional sonora; Sonora (UNISON).Graficación de funciones.

Arthur Goodman / Lewis Hirsch. ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. Primera Edición. Editorial Prentice Hall.

De Las Fuentes Lara Maximiliano. Tesis, Una propuesta para la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta – objeto y el juego de marcos. El caso de las funciones lineales y cuadráticas.

Paul K. Rees / Fred W. Sparks. Álgebra. Editorial Reverté. México 1968.